Zadanie

Iloma zerami kończy się rozwinięcie liczby 1000! w systemie o podstawie 10?

Rozwiązanie

Mamy $10 = 2 \cdot 5$.

Ponadto

$$\nu_2(1000!) = \lfloor \tfrac{1000}{2} \rfloor + \lfloor \tfrac{1000}{2^2} \rfloor + \cdots = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994,$$

oraz

$$\nu_5(1000!) = \lfloor \tfrac{1000}{5} \rfloor + \lfloor \tfrac{1000}{5^2} \rfloor + \cdots = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Zatem

$$\nu_{10}(1000!) = \min\{\nu_2(1000!), \nu_5(1000!)\} = \{994, 249\} = 249.$$

Zadanie 7

Zadanie

Iloma zerami kończy się rozwinięcie liczby 200! w systemie o podstawie 16?

Rozwiązanie

Mamy $16 = 2^4$.

Ponadto

$$\nu_2(200!) = \lfloor \tfrac{200}{2} \rfloor + \lfloor \tfrac{200}{2^2} \rfloor + \cdots = 100 + 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 197,$$

więc

$$\nu_{16}(200!) = \lfloor \tfrac{\nu_2(200!)}{4} \rfloor = \lfloor \tfrac{197}{4} \rfloor = 49.$$

Zadanie

Iloma zerami kończy się rozwinięcie liczby 500! w systemie o podstawie 20?

Rozwiązanie

Mamy $20 = 2^2 \cdot 5$.

Ponadto

$$\nu_2(500!) = \lfloor \tfrac{500}{2} \rfloor + \lfloor \tfrac{500}{2^2} \rfloor + \cdots = 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 494,$$

oraz

$$\nu_5(500!) = \lfloor \tfrac{500}{5} \rfloor + \lfloor \tfrac{500}{5^2} \rfloor + \cdots = 100 + 20 + 4 = 124.$$

Zatem

$$\nu_{20}(500!) = \min\{\tfrac{\nu_2(500!)}{2}, \nu_5(500!)\} = \min\{\lfloor \tfrac{494}{2}, 124 \rfloor\} = \min\{247, 124\} = 124.$$

Zadanie

Niech $p \in \mathbb{P}$.
Udowodnić, że jeśli $1 \leq k \leq p-1$, to $p \mid \binom{p}{k}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $p \mid \binom{p}{k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu_p(\binom{p}{k}) > 0$.
Ponieważ

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!},$$

więc

$$\nu_p\left(\binom{p}{k}\right) = \nu_p(p!) - \nu_p(k!) - \nu_p((p-k)!).$$

Mamy

$$\nu_p(p!) = \lfloor \tfrac{p}{p} \rfloor + \lfloor \tfrac{p}{p^2} \rfloor + \cdots = 1 + 0 + \cdots = 1.$$

Ponadto

$$\nu_p(k!) = \lfloor \tfrac{k}{p} \rfloor + \lfloor \tfrac{k}{p^2} \rfloor + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

gdyż $k < p$.
Podobnie

$$\nu_p((p-k)!) = \lfloor \tfrac{p-k}{p} \rfloor + \lfloor \tfrac{p-k}{p^2} \rfloor + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

gdyż $k < 0$.
Ostatecznie

$$\nu_p\left(\binom{p}{k}\right) = \nu_p(p!) - \nu_p(k!) - \nu_p((p-k)!) = 1 - 0 - 0 = 1 > 0. \quad \square$$

Zadanie

Udowodnić, że jeśli n jest liczbą złożoną, to n ma dzielnik pierwszy nie przekraczający $\sqrt{n}$.

Rozwiązanie

Ponieważ n jest liczba złożoną, więc istnieją liczby $k, l > 1$ takie, że $n = k \cdot l$.
Ponieważ $k, l > 1$, więc istnieją liczby pierwsze p i q takie, że $p \mid k$ i $q \mid l$.
Wtedy $p \leq k$ i $q \leq l$, więc $p \cdot q \leq k \cdot l = n$.
Bez straty ogólności możemy założyć, że $p \leq q$.
Wtedy

$$p^2 \leq p \cdot q \leq n,$$

a więc $p \leq \sqrt{n}$. $\square$