(1) $\varphi(1000) = \varphi(2^3 \cdot 5^3) = (2-1) \cdot 2^2 \cdot (5-1) \cdot 5^2 = 400.$

(2) $\varphi(125) = \varphi(5^3) = (5-1) \cdot 5^2 = 100.$

(3) $\varphi(180) = \varphi(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5) = (2-1) \cdot 2^1 \cdot (3-1) \cdot 3^1 \cdot (5-1) \cdot 5^0 = 48.$

(4) $\varphi(360) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = (2-1) \cdot 2^2 \cdot (3-1) \cdot 3^1 \cdot (5-1) \cdot 5^0 = 96.$

(5) $\varphi(1001) = \varphi(7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1) = (7-1) \cdot 7^0 \cdot (11-1) \cdot 11^0 \cdot (13-1) \cdot 13^0 = 720.$

Zadanie 2 (1)

Zadanie

Wyznaczyć wszystkie liczby $n \in \mathbb{N}_+$ takie, że $\varphi(n) = 14$.

Rozwiązanie

1. Dzielnikami liczby 14 są: 14, 7, 2, 1.

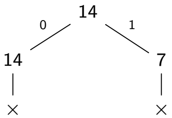
   Po dodaniu do nich 1 otrzymujemy liczby: 15, 8, 3, 2.

   Po usunięciu liczb złożonych, otrzymujemy liczby: 3, 2.

2.

	3	2
0	1	1
1	2	1
2	$\cancel{6}$	2
3		$\cancel{4}$

3.



Odpowiedź: $n \in \varnothing$

Zadanie

Wyznaczyć wszystkie liczby $n \in \mathbb{N}_+$ takie, że $\varphi(n) = 8$.

Rozwiązanie

1. Dzielnikami liczby 8 są: 8, 4, 2, 1.

   Po dodaniu do nich 1 otrzymujemy liczby: 9, 5, 3, 2.

   Po usunięciu liczb złożonych, otrzymujemy liczby: 5, 3, 2.

2.

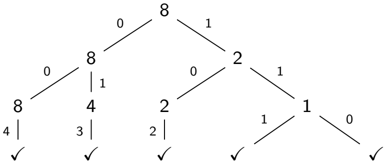
	5	3	2
0	1	1	1
1	4	2	1
2	~~20~~	~~6~~	2
3			4
4			8
5			~~16~~

Zadanie 2 (2) (c.d.)

2.

	5	3	2
0	1	1	1
1	4	2	1
2	$\cancel{20}$	$\cancel{6}$	2
3			4
4			8
5			$\cancel{16}$

3.



Ciągi etykiet krawędzi prowadzących z korzenia do wierzchołków znakiem ✓:

$$(0,0,4), \qquad (0,1,3), \qquad (1,0,2), \qquad (1,1,1), \qquad (1,1,0).$$

Powyższe ciągi odpowiadają następującym odpowiedziom:

$$5^0 \cdot 3^0 \cdot 2^4 = 16, \qquad 5^0 \cdot 3^1 \cdot 2^3 = 24, \qquad 5^1 \cdot 3^0 \cdot 2^2 = 20, \qquad 5^1 \cdot 3^1 \cdot 2^1 = 30, \qquad 5^1 \cdot 3^1 \cdot 2^0 = 15.$$

Zadanie

Wyznaczyć wszystkie liczby $n \in \mathbb{N}_+$ takie, że $\varphi(n) = 12$.

Rozwiązanie

1. Dzielnikami liczby 12 są: 12, 6, 4, 3, 2, 1.

   Po dodaniu do nich 1 otrzymujemy liczby: 13, 7, 5, 4, 3, 2.

   Po usunięciu liczb złożonych, otrzymujemy liczby: 13, 7, 5, 3, 2.

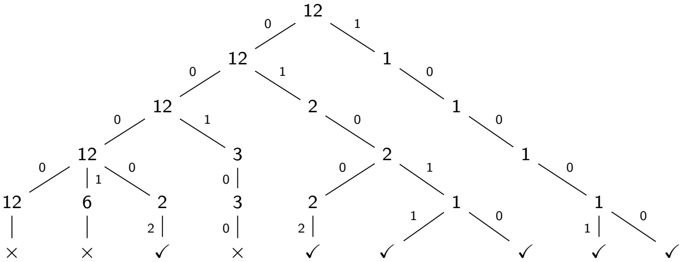
2.

	13	7	5	3	2
0	1	1	1	1	1
1	12	6	4	2	1
2	$\cancel{156}$	$\cancel{42}$	$\cancel{20}$	6	2
3				$\cancel{20}$	4
4					$\cancel{8}$

2.

	13	7	5	3	2
0	1	1	1	1	1
1	12	6	4	2	1
2				6	2
3					4

3.



Ciągi etykiet krawędzi prowadzących z korzenia do wierzchołków znakiem ✓:

$$(0,0,0,2,2),\quad (0,1,0,0,2),\quad (0,1,0,1,1),\quad (0,1,0,1,0),\quad (1,0,0,0,1),\quad (1,0,0,0,0).$$

Powyższe ciągi odpowiadają następującym odpowiedziom:

$$3^2\cdot 2^2=36,\quad 7^1\cdot 2^2=28,\quad 7^1\cdot 3^1\cdot 2^1=42,\quad 7^1\cdot 3^1=21,\quad 13^1\cdot 2^1=26,\quad 13^1=13.$$

Zadanie

Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby 3^{1000}.

Rozwiązanie

Znalezienie dwóch ostatnich cyfr liczby 3^{1000} jest równoważne znalezieniu reszty z dzielenia 3^{1000} przez 100.

Ponieważ $\gcd(100, 3) = 1$ oraz $\varphi(100) = 40$, więc z twierdzenia Eulera $3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$.

Stąd

$$3^{1000} = (3^{40})^{25} \equiv 1^{25} = 1 \pmod{100}.$$

Zatem dwiema ostatnimi cyframi liczby 3^{1000} są 01.