Wzór włączeń i wyłączeń

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \dots, A_n$ są zbiorami skończonymi, to

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

Przykład

Ile jest pięcioliterowych ciągów (26 małych) liter alfabetu łacińskiego, które zawierają każdą z liter a, b i c?

Rozwiązanie

Interesuje nas $|B_\mathrm{a} \cap B_\mathrm{b} \cap B_\mathrm{c}|$, gdzie B_x to zbiór pięcioliterowych „słów" zawierających literę x.

Zauważmy, że $B_\mathrm{a} \cap B_\mathrm{b} \cap B_\mathrm{c} = X \setminus (A_\mathrm{a} \cup A_\mathrm{b} \cup A_\mathrm{c})$, gdzie X jest zbiorem wszystkich pięcioliterowych „słów", natomiast A_x zbiorem tych spośród nich, które nie zawierają litery x.

Zauważmy, że

$$|X| = 26^5, \qquad |A_\mathrm{a}| = 25^5 = |A_\mathrm{b}| = |A_\mathrm{c}|,$$

$$|A_\mathrm{a} \cap A_\mathrm{b}| = |A_\mathrm{a} \cap A_\mathrm{c}| = |A_\mathrm{b} \cap A_\mathrm{c}| = 24^5, \qquad |A_\mathrm{a} \cap A_\mathrm{b} \cap A_\mathrm{c}| = 23^5.$$

Zatem

$$|B_\mathrm{a} \cap B_\mathrm{b} \cap B_\mathrm{c}| = |X| - |A_\mathrm{a} \cup A_\mathrm{b} \cup A_\mathrm{c}| = |X| - (|A_\mathrm{a}| + |A_\mathrm{b}| + |A_\mathrm{c}|$$
$$- |A_\mathrm{a} \cap A_\mathrm{b}| - |A_\mathrm{a} \cap A_\mathrm{c}| - |A_\mathrm{b} \cap A_\mathrm{c}| + |A_\mathrm{a} \cap A_\mathrm{b} \cap A_\mathrm{c}|) = 26^5 - 3 \cdot 25^5 + 3 \cdot 24^5 - 23^5.$$

Wzór

Liczba ciągów $(x_1, \dots, x_k)$ liczb całkowitych takich, że $x_1 + \dots + x_k = n$ oraz $x_1 \geq m_1, \dots, x_k \geq m_k$ jest równa $\binom{n+(k-1)-(m_1+\dots+m_k)}{k-1}$ (lub 0, jeśli $m_1 + \dots + m_k > n$).

Przykład

Ile jest ciągów (x_1, x_2, x_3, x_4) liczb całkowitych takich, że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ oraz $-10 \leq x_1 \leq 10$, $-20 \leq x_2 \leq 20$, $-30 \leq x_3 \leq 30$, $x_4 \geq -40$?

Rozwiązanie

Szukana liczba to $|X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, gdzie X jest zbiorem ciągów (x_1, x_2, x_3, x_4) liczb całkowitych takich, że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ oraz $x_1 \geq -10$, $x_2 \geq -20$, $x_3 \geq -30$, $x_4 \geq -40$, oraz A_i jest zbiorem tych ciągów $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X$, dla których $x_i > 10i$.

Mamy

$$|X| = \binom{0+(4-1)-(-10-20-30-40)}{4-1} = \binom{103}{3}.$$

Zauważmy, że A_1 jest zbiorem ciągów (x_1, x_2, x_3, x_4) liczb całkowitych takich, że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ oraz $x_1 \geq 11$, $x_2 \geq -20$, $x_3 \geq -30$, $x_4 \geq -40$, zatem

$$|A_1| = \binom{0+(4-1)-(11-20-30-40)}{4-1} = \binom{82}{3}.$$

Podobnie,

$$|A_2| = \binom{0+(4-1)-(-10+21-30-40)}{4-1} = \binom{62}{3} \quad \text{i} \quad |A_3| = \binom{42}{3}.$$

Wzór

Liczba ciągów $(x_1, \ldots, x_k)$ liczb całkowitych takich, że $x_1 + \cdots + x_k = n$ oraz $x_1 \geq m_1, \ldots, x_k \geq m_k$ jest równa $\binom{n+(k-1)-(m_1+\cdots+m_k)}{k-1}$ (lub 0, jeśli $m_1 + \cdots + m_k > n$).

Przykład

Ile jest ciągów (x_1, x_2, x_3, x_4) liczb całkowitych takich, że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ oraz $-10 \leq x_1 \leq 10$, $-20 \leq x_2 \leq 20$, $-30 \leq x_3 \leq 30$, $x_4 \geq -40$?

Rozwiązanie (c.d.)

Szukana liczba to $|X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

Mamy

$$|X| = \binom{103}{3}, \qquad |A_1| = \binom{82}{3}, \qquad |A_2| = \binom{62}{3}, \qquad |A_3| = \binom{42}{3}.$$

Zauważmy, że $A_1 \cap A_2$ jest zbiorem ciągów (x_1, x_2, x_3, x_4) liczb całkowitych takich, że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ oraz $x_1 \geq 11$, $x_2 \geq 21$, $x_3 \geq -30$, $x_4 \geq -40$, więc

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{0 + (4-1) - (11 + 21 - 30 - 40)}{4-1} = \binom{41}{3}.$$

Podobnie,

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{21}{3}.$$

Ponadto $|A_2 \cap A_3| = 0$, gdyż $-10 + 21 + 31 - 40 = 2 > 0$, więc również $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$.

Ostatecznie, odpowiedź to

$$\binom{103}{3} - \binom{82}{3} - \binom{62}{3} - \binom{42}{3} + \binom{41}{3} + \binom{21}{3}.$$