Zadanie 1

Zadanie

Ile jest liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 10000 podzielnych przynajmniej przez jedną z liczb 2, 3, 5?

Rozwiązanie

Dla $k \in \mathbb{N}_+$ niech $A_k := \{m \in [1, 10000] : k \mid m\}$.
Zauważmy, że $|A_k| = \lfloor \frac{10000}{k} \rfloor$.
Chcemy policzyć $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.
Z powyższego wzoru

$$|A_2| = 5000, \qquad |A_3| = 3333, \qquad |A_5| = 2000.$$

Ponieważ

$$A_2 \cap A_3 = A_6, \qquad A_2 \cap A_5 = A_{10}, \qquad A_3 \cap A_5 = A_{15}, \qquad A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30},$$

więc

$$|A_2 \cap A_3| = 1666, \qquad |A_2 \cap A_5| = 1000, \qquad |A_3 \cap A_5| = 666, \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 333.$$

Stosując wzór włączeń i wyłączeń, otrzymujemy

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 5000 + 3333 + 2000 - 1666 - 1000 - 666 + 333 = 7334.$$

Zadanie 2 (a)

Zadanie

Ile jest ciągów $(x_1, \ldots, x_6)$ liczb całkowitych takich, że $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ oraz $0 \leq x_i \leq 10$ dla każdego $i = 1, \ldots, 6$?

Rozwiązanie

Niech X będzie zbiorem ciągów $(x_1, \ldots, x_6)$ liczb całkowitych takich, że $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ oraz $x_i \geq 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, 6$.

Ponadto niech A_i będzie zbiorem tych ciągów $(x_1, \ldots, x_6) \in X$, dla których $x_i \geq 11$.

Chcemy wyliczyć $|X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_6)|$.

Zauważmy, że jeśli $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ i $A_I := A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$, to

$$A_I := \{(x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{Z}^6 : x_1 + \cdots + x_6 = 30,\ x_i \geq 11 \text{ dla } i \in I,\ x_j \geq 0 \text{ dla } j \notin I\}.$$

Stąd

$$|X| = \binom{30 + 6 - 1 - 6 \cdot 0}{6 - 1} = \binom{35}{5},$$

$$|A_1| = \cdots = |A_6| = \binom{30 + 6 - 1 - (5 \cdot 0 + 11)}{6 - 1} = \binom{24}{5},$$

$$|A_1 \cap A_2| = \cdots = |A_5 \cap A_6| = \binom{30 + 6 - 1 - (4 \cdot 0 + 2 \cdot 11)}{6 - 1} = \binom{13}{5},$$

a pozostałe przekroje są puste.

Stosując wzór włączeń i wyłączeń, otrzymujemy

$$|X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_6)| = |X| - |A_1 \cup \cdots \cup A_6| = \binom{35}{5} - 6 \cdot \binom{24}{5} + \binom{6}{2} \cdot \binom{13}{5}.$$

Zadanie

Ile jest ciągów $(x_1, \ldots, x_6)$ liczb całkowitych takich, że $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ oraz $-10 \leq x_i \leq 20$ dla każdego $i = 1, \ldots, 6$?

Rozwiązanie

Niech X będzie zbiorem ciągów $(x_1, \ldots, x_6)$ liczb całkowitych takich, że $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ oraz $x_i \geq -10$ dla każdego $i = 1, \ldots, 6$.

Ponadto niech A_i będzie zbiorem tych ciągów $(x_1, \ldots, x_6) \in X$, dla których $x_i \geq 21$.

Chcemy wyliczyć $|X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_6)|$.

Zauważmy, że jeśli $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ i $A_I := A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$, to

$$A_I := \{(x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{Z}^6 : x_1 + \cdots + x_6 = 30,\ x_i \geq 21 \text{ dla } i \in I,\ x_j \geq -10 \text{ dla } j \notin I\}.$$

Stąd

$$|X| = \binom{30 + 6 - 1 - 6 \cdot (-10)}{6 - 1} = \binom{95}{5},$$

$$|A_1| = \cdots = |A_6| = \binom{30 + 6 - 1 - (5 \cdot (-10) + 21)}{6 - 1} = \binom{64}{5},$$

$$|A_1 \cap A_2| = \cdots = |A_5 \cap A_6| = \binom{30 + 6 - 1 - (4 \cdot (-10) + 2 \cdot 21)}{6 - 1} = \binom{33}{5},$$

a pozostałe przekroje są puste.

Stosując wzór włączeń i wyłączeń, otrzymujemy

$$|X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_6)| = |X| - |A_1 \cup \cdots \cup A_6| = \binom{95}{5} - 6 \cdot \binom{64}{5} + \binom{6}{2} \cdot \binom{33}{5}.$$

Zadanie

Ile jest ciągów $(x_1, \ldots, x_6)$ liczb całkowitych takich, że $x_1 + \cdots + x_6 = 30$, $x_i \geq 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, 6$ oraz $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 10$, $x_3 \leq 15$ i $x_4 \leq 21$?

Rozwiązanie

Niech X będzie zbiorem ciągów $(x_1, \ldots, x_6)$ liczb całkowitych takich, że $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ oraz $x_i \geq 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, 6$.

Ponadto niech

- A_1 będzie zbiorem tych ciągów $(x_1, \ldots, x_6) \in X$, dla których $x_1 \geq 6$,
- A_2 będzie zbiorem tych ciągów $(x_1, \ldots, x_6) \in X$, dla których $x_2 \geq 11$,
- A_3 będzie zbiorem tych ciągów $(x_1, \ldots, x_6) \in X$, dla których $x_3 \geq 16$,
- A_4 będzie zbiorem tych ciągów $(x_1, \ldots, x_6) \in X$, dla których $x_4 \geq 22$.

Mamy

- $|X| = \binom{30+6-1-6\cdot 0}{6-1} = \binom{35}{5}$,
- $|A_1| = \binom{30+6-1-(5\cdot 0+6)}{6-1} = \binom{29}{5}$, $|A_2| = \binom{30+6-1-(5\cdot 0+11)}{6-1} = \binom{24}{5}$,
  $|A_3| = \binom{30+6-1-(5\cdot 0+16)}{6-1} = \binom{19}{5}$, $|A_4| = \binom{30+6-1-(5\cdot 0+22)}{6-1} = \binom{13}{5}$,
- $|A_1 \cap A_2| = \binom{30+6-1-(4\cdot 0+6+11)}{6-1} = \binom{18}{5}$, $|A_1 \cap A_3| = \binom{30+6-1-(4\cdot 0+6+16)}{6-1} = \binom{13}{5}$,
  $|A_1 \cap A_4| = \binom{30+6-1-(4\cdot 0+6+16)}{6-1} = \binom{7}{5}$, $|A_2 \cap A_3| = \binom{30+6-1-(4\cdot 0+11+16)}{6-1} = \binom{8}{5}$,

a pozostałe przekroje są puste.
Stosując wzór włączeń i wyłączeń, otrzymujemy

$$|X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_4)| = \binom{35}{5} - \binom{29}{5} - \binom{24}{5} - \binom{19}{5} - \binom{13}{5} + \binom{18}{5} + \binom{13}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5}$$

$$= \binom{35}{5} - \binom{29}{5} - \binom{24}{5} - \binom{19}{5} - \binom{18}{5} + \binom{8}{5} + \binom{7}{5}.$$

Zadanie

Ile jest ciągów $(x_1, \dots, x_6)$ liczb całkowitych takich, że $x_1 + \dots + x_6 = 30$ oraz $x_i \leq 10$?

Rozwiązanie

Zauważmy, że poszukiwanych ciągów jest tyle samo, co ciągów $(y_1, \dots, y_6)$ liczb całkowitych takich, że $y_1 + \dots + y_6 = -30$ oraz $y_i \geq -10$.

Zatem poszukiwana liczba to $\binom{-30+6-1-6\cdot(-10)}{6-1} = \binom{35}{5}$.

Zadanie

Ile jest ciągów n-wyrazowych, $n \geq 3$, złożonych z cyfr 0, 1, ..., 9 takich, że każda z cyfr 1, 2, 3 występuje w każdym z ciągów co najmniej raz?

Rozwiązanie

Niech X będzie zbiorem wszystkich n-wyrazowych ciągów złożonych z cyfr 0, 1, ..., 9.

Ponadto, dla $k = 1, 2, 3$, niech A_k będzie zbiorem tych ciągów należących do X, w których nie występuje cyfra k.

Chcemy policzyć $|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$.

Mamy

$$|X| = 10^n, \qquad |A_1| = |A_2| = |A_3| = 9^n,$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 8^n, \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 7^n.$$

Stosując wzór włączeń i wyłączeń, otrzymujemy

$$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 10^n - 3 \cdot 9^n + 3 \cdot 8^n - 7^n.$$

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 5 kart tak, aby otrzymać co najmniej jednego asa, co najmniej jednego króla i co najmniej jedną damę?

Rozwiązanie

Niech X będzie zbiorem wszystkich wyborów 5 kart z talii złożonej z 52 kart.

Ponadto niech

- A_1 będzie zbiorem tych wyborów należących do zbioru X, w których nie ma asa,
- A_2 będzie zbiorem tych wyborów należących do zbioru X, w których nie ma króla,
- A_3 będzie zbiorem tych wyborów należących do zbioru X, w których nie ma damy.

Chcemy policzyć $|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$.

Mamy

$$|X| = \binom{52}{5}, \qquad |A_1| = |A_2| = |A_3| = \binom{48}{5},$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = \binom{44}{5}, \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{40}{5}.$$

Stosując wzór włączeń i wyłączeń, otrzymujemy

$$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \binom{52}{5} - 3 \cdot \binom{48}{5} + 3 \cdot \binom{44}{5} - \binom{40}{5}.$$

Zadanie

Jakie jest prawdopodobieństwo, że po rozdaniu kart do brydża ustalony gracz otrzyma cztery karty tego samego rodzaju (np. cztery dwójki)?

Rozwiązanie

Niech X będzie zbiorem wszystkich układów kart, które może otrzymać ustalony gracz.

Ponadto dla $i = A, 2, \ldots, 10, W, D, K$, niech A_i będzie zbiorem tych układów należących do zbioru X, w których znajdują się cztery karty rodzaju i.

Chcemy policzyć $P(A_A \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10} \cup A_W \cup A_D \cup A_K) = \frac{|A_A \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10} \cup A_W \cup A_D \cup A_K|}{|X|}$.

Mamy

$$|X| = \binom{52}{13}, \qquad |A_i| = \binom{48}{9},$$

$$|A_i \cap A_j| = \binom{44}{5}, \qquad |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{40}{1},$$

a pozostałe przekroje są puste.

Stosując wzór włączeń i wyłączeń, otrzymujemy

$$P(A_A \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10} \cup A_W \cup A_D \cup A_K) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{48}{9} - \binom{13}{2} \cdot \binom{44}{5} + \binom{13}{3} \cdot \binom{40}{1}}{\binom{52}{13}}.$$

Zadanie

Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, w których pierwsza liczba jest większa od 2, a ostatnia jest mniejsza od 9?

Rozwiązanie

Niech X będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Ponadto niech A będzie zbiorem tych permutacji należący do zbioru X, w których pierwsza liczba jest równa 1 lub 2, zaś B zbiorem tych permutacji, w których ostatnia liczba jest równa 9 lub 10.

Chcemy policzyć $|X \setminus (A \cup B)|$.

Mamy

$$|X| = 10!, \qquad |A| = 2 \cdot 9! = |B|, \qquad |A \cap B| = 2 \cdot 2 \cdot 8!.$$

Stosując wzór włączeń i wyłączeń, otrzymujemy

$$|X \setminus (A \cup B)| = |X| - |A \cup B| = 10! - 4 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = (6 \cdot 7 + 2 \cdot 8) \cdot 8!.$$