Rekurencje jednorodne

Definicja

Rekurencją jednorodną (liniową o stałych współczynnikach) nazywamy układ równań postaci

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

z niewiadomymi $a_0, a_1, \dots$ (i ustalonymi $u_0, \dots, u_{k-1}$).

Przykład

Ciąg taki, że

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ nazywamy ciągiem Fibonacciego.

Problem

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) będącego rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

takiego, że $a_0, \dots, a_{k-1}$ są dane.

Definicja

Wielomianem charakterystycznym rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

nazywamy wielomian $x^k + u_{k-1}x^{k-1} + \cdots + u_1 x + u_0$.

Rozwiązywanie rekurencji jednorodnych

Problem

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) będącego rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

takiego, że $a_0, \ldots, a_{k-1}$ są dane.

Metoda

1. Znajdujemy pierwiastki (zespolone) $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ (parami różne) wielomianu charakterystycznego rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

wraz z krotnościami $m_1, \ldots, m_l$.

3. Wiadomo, że

$$a_n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i-1} \mu_{i,j} n^j \lambda_i^n.$$

Współczynniki $\mu_{i,j}$ znajdujemy, rozwiązując układ równań powstały przez podstawienie $n = 0, \ldots, k-1$.

Rozwiązywanie rekurencji jednorodnych – przykład

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ i $a_2 = 6$.

Rozwiązanie

1. Ciąg (a_n) jest rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+3} - 4a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

   której wielomianem charakterystycznym jest

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

   Pierwiastkami tego wielomianu są 1 (dwukrotny) oraz 2 (jednokrotny).

3. Wiemy, że

$$a_n = \mu_{1,0} + \mu_{1,1} \cdot n + \mu_2 \cdot 2^n.$$

   Podstawiając $n = 0, 1, 2$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \mu_{1,0} & & & + & \mu_2 & = & 1, \\ \mu_{1,0} & + & \mu_{1,1} & + & 2\mu_2 & = & 3, \\ \mu_{1,0} & + & 2\mu_{1,1} & + & 4\mu_2 & = & 6. \end{cases}$$

   Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $\mu_{1,0} = 0$, $\mu_{1,1} = 1$ i $\mu_2 = 1$, a więc

$$a_n = n + 2^n.$$

Problem

Niech $F \in \mathbb{C}[T]$.
Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) będącego rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = F(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

takiego, że $a_0, \ldots, a_{k-1}$ są dane.

Definicja

Wielomianem charakterystycznym rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = F(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

nazywamy wielomian $x^k + u_{k-1}x^{k-1} + \cdots + u_1 x + u_0$.

Metoda

1. Znajdujemy pierwiastki (zespolone) $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ (parami różne) wielomianu charakterystycznego rekurencji
$$a_{n+k} + u_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = F(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$
wraz z krotnościami $m_1, \dots, m_l$.

2. Niech d będzie stopniem wielomianu F.

   Znajdujemy ciąg (a'_n) taki, że
$$a'_{n+k} + u_{k-1} a'_{n+k-1} + \cdots + u_0 a'_n = F(n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$
oraz
$$a'_n = n^m \cdot (\xi_d n^d + \xi_{d-1} n^{d-1} + \cdots + \xi_0), \tag{2}$$
gdzie m jest krotnością 1 jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego oraz ξ_d, ξ_{d-1}, $\dots$, ξ_0 są niewiadomymi.

   [Wartości niewiadomych ξ_d, ξ_{d-1}, $\dots$, ξ_0 znajdujemy, porównując współczynniki przy n^d, n^{d-1}, $\dots$, n^0 w równaniu otrzymanym z równania (1) po podstawieniu za a'_{n+k}, a'_{n+k-1}, $\dots$, a'_n wyrażeń otrzymanych ze wzoru (2).]

3. Wiadomo, że
$$a_n = a'_n + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i-1} \mu_{i,j} n^j \lambda_i^n.$$
Współczynniki $\mu_{i,j}$ znajdujemy, rozwiązując układ równań powstały przez podstawienie $n = 0, \dots, k-1$.

Rozwiązywanie rekurencji niejednorodnych – przykład

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 2n + 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$.

Rozwiązanie

1. Ciąg (a_n) jest rozwiązaniem rekurencji
$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = -2n + 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$
której wielomianem charakterystycznym jest $x^2 - 3x + 2$.

   Pierwiastkami (jednokrotnymi) tego wielomianu są 1 oraz 2.

2. Szukamy ciągu $a'_n = n \cdot (\xi_1 n + \xi_0)$ takiego, że
$$a'_{n+2} - 3a'_{n+1} + 2a'_n = -2n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$
Mamy
$$a'_n = \xi_1 n^2 + \xi_0 n, \qquad a'_{n+1} = \xi_1(n+1)^2 + \xi_0(n+1), \qquad a'_{n+2} = \xi_1(n+2)^2 + \xi_0(n+2).$$
Po podstawieniu powyższych wzorów do równania (3) i uporządkowaniu wyrazów, otrzymujemy równanie
$$-2\xi_1 n + (\xi_1 - \xi_0) = -2n + 1.$$
Porównując współczynniki przy n^1 oraz n^0, otrzymujemy układ równań
$$\begin{cases} -2\xi_1 & & = -2, \\ \xi_1 - \xi_0 & & = 1, \end{cases}$$
którego rozwiązaniem jest para liczb $\xi_0 = 0$ i $\xi_1 = 1$.

   Zatem $a'_n = n^2$.

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 2n + 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$.

Rozwiązanie

1. Pierwiastkami (jednokrotnymi) wielomianu charakterystycznego są 1 oraz 2.
2. $a_n' = n^2$.
3. Wiemy, że
$$a_n = n^2 + \mu_1 + \mu_2 \cdot 2^n.$$
Podstawiając $n = 0, 1$, otrzymujemy układ równań
$$\begin{cases} & & \mu_1 & + & \mu_2 & = & 1, \\ 1 & + & \mu_1 & + & 2\mu_2 & = & 3. \end{cases}$$
Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $\mu_1 = 0$ i $\mu_2 = 1$, a więc
$$a_n = n^2 + 2^n.$$