Definicja

Funkcją tworzącą ciągu (a_n) nazywamy szereg formalny

$$\mathcal{A} := a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n + \cdots .$$

Problem

Niech $F \in \mathbb{C}[T]$.
Znaleźć funkcję tworzącą (a_n) będącego rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = F(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

takiego, że $a_0, \ldots, a_{k-1}$ są dane.

Funkcje tworzące, przypadek jednorodny

Problem

Znaleźć funkcję tworzącą (a_n) będącego rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

takiego, że $a_0, \ldots, a_{k-1}$ są dane.

Metoda

1. Mnożąc równanie (1) przez T^{n+k} oraz dodając stronami otrzymane równania dla $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy równość (szeregów formalnych)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+k} T^{n+k} + u_{k-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+k-1} T^{n+k} + \cdots + u_0 \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^{n+k} = 0.$$

2. Zauważmy, że

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+k-i} T^{n+k} = T^i \cdot \sum_{n\geq k-i} a_n T^n = T^i \cdot (\mathcal{A} - G_{k-i}),$$

gdzie $G_{k-i} := \sum_{j<k-i} a_j T^j$.
Zatem otrzymujemy

$$\mathcal{A} - G_k + u_{k-1} T \cdot (\mathcal{A} - G_{k-1}) + \cdots + u_1 T^{k-1} \cdot (\mathcal{A} - G_1) + u_0 T^k \cdot \mathcal{A} = 0.$$

3. Traktując powyższą równość jako równanie z niewiadomą $\mathcal{A}$, otrzymujemy

$$\mathcal{A} = \frac{G_k + u_{k-1} T G_{k-1} + \cdots u_1 T^{k-1} G_1}{1 + u_{k-1} T + \cdots + u_1 T^{k-1} + u_0 T^k}.$$

Zadanie

Znaleźć funkcję tworzącą ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

oraz $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ i $a_2 = 6$.

Rozwiązanie

1. Mnożąc równanie (2) przez T^{n+3} i dodając otrzymane równania dla $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy równość (szeregów formalnych)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+3} T^{n+3} - 4\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+2} T^{n+3} + 5\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} T^{n+3} - 2\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^{n+3} = 0.$$

2. Mamy

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+3} T^{n+3} = \mathcal{A} - (a_0 + a_1 T + a_2 T^2), \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+2} T^{n+3} = T \cdot [\mathcal{A} - (a_0 + a_1 T)],$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} T^{n+3} = T^2 \cdot (\mathcal{A} - a_0), \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^{n+3} = T^3 \cdot \mathcal{A}.$$

Wykorzystując powyższe wzory oraz znajomość a_0, a_1 i a_2, otrzymujemy

$$\mathcal{A} - (1 + 3T + 6T^2) - 4T \cdot [\mathcal{A} - (1 + 3T)] + 5T^2 \cdot (\mathcal{A} - 1) - 2T^3 \cdot \mathcal{A} = 0.$$

3. Wyznaczając $\mathcal{A}$ z powyższego równania, otrzymujemy

$$\mathcal{A} = \frac{1 + 6T + 8T^2}{1 - 4T + 5T^2 - 2T^3}.$$

Problem

Niech $F \in \mathbb{C}[T]$.
Znaleźć funkcję tworzącą (a_n) będącego rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = F(n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

takiego, że $a_0, \ldots, a_{k-1}$ są dane.

Metoda – Część I

1. Mnożąc równanie (3) przez T^{n+k} oraz dodając stronami otrzymane równania dla $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy równość (szeregów formalnych)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+k} T^{n+k} + u_{k-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+k-1} T^{n+k} + \cdots + u_0 \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^{n+k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} F(n) T^{n+k}.$$

2. Podobnie jako poprzednio otrzymujemy

$$\mathcal{A} - G_k + u_{k-1} T \cdot (\mathcal{A} - G_{k-1}) + \cdots + u_1 T^{k-1} \cdot (\mathcal{A} - G_1) + u_0 T^k \cdot \mathcal{A} = \sum_{n\in\mathbb{N}} F(n) T^{n+k}.$$

3. Zatem

$$\mathcal{A} = \frac{G_k + u_{k-1} T G_{k-1} + \cdots u_1 T^{k-1} G_1}{1 + u_{k-1} T + \cdots + u_1 T^{k-1} + u_0 T^k} + \frac{T^k \cdot \mathcal{B}}{1 + u_{k-1} T + \cdots + u_1 T^{k-1} + u_0 T^k},$$

gdzie $\mathcal{B} := \sum_{n\in\mathbb{N}} F(n) T^n$.

Funkcje tworzące, przypadek ogólny, II

Problem

Niech $F \in \mathbb{C}[T]$.

Znaleźć funkcję tworzącą (a_n) będącego rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+k} + u_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = F(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

takiego, że $a_0, \ldots, a_{k-1}$ są dane.

Metoda – Część II

Niech $b_n := F(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Wiadomo, że ciąg (b_n) spełnia rekurencyjne

$$b_{n+d+1} + v_d b_{n+d} + \cdots + v_0 b_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gdzie d jest stopniem wielomianu F oraz $v_i := (-1)^{d+1-i} \binom{d+1}{i}$.

Ponieważ znamy $b_0, \ldots, b_{d-1}$, szereg $\mathcal{B}$ znajdujemy, stosując metodę opisaną w przypadku jednorodnym.

Podstawiając znalezioną postać funkcji $\mathcal{B}$ do wzoru

$$\mathcal{A} = \frac{G_k + u_{k-1} T G_{k-1} + \cdots u_1 T^{k-1} G_1}{1 + u_{k-1} T + \cdots + u_1 T^{k-1} + u_0 T^k} + \frac{T^k \cdot \mathcal{B}}{1 + u_{k-1} T + \cdots + u_1 T^{k-1} + u_0 T^k},$$

otrzymujemy odpowiedź.

Zadanie

Znaleźć funkcję tworzącą ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 2n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

oraz $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$.

Rozwiązanie

Część I

1. Mnożąc równanie (4) przez T^{n+2} i dodając otrzymane równania dla $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy równość (szeregów formalnych)
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+2} T^{n+2} - 3\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} T^{n+2} + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^{n+2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-2n+1) T^{n+2}.$$
2. Podobnie jak w przypadku jednorodnym otrzymujemy
$$\mathcal{A} - (1+3T) - 3T\cdot(\mathcal{A}-1) + 2T^2\cdot\mathcal{A} = T^2\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}}(-2n+1)T^n.$$
3. Wyznaczając $\mathcal{A}$ z powyższego równania, otrzymujemy
$$\mathcal{A} = \frac{1+6T}{1-3T+2T^2} + \frac{T^2\cdot\mathcal{B}}{1-3T+2T^2},$$
gdzie $\mathcal{B} := \sum_{n\in\mathbb{N}}(-2n+1)T^n$.

Funkcje tworzące, przypadek ogólny – przykład (c.d.)

Zadanie

Znaleźć funkcję tworzącą ciągu (a_n) takiego, że $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$.

Rozwiązanie (c.d.)

Część I

Mamy
$$\mathcal{A} = \frac{1+6T}{1-3T+2T^2} + \frac{T^2 \cdot \mathcal{B}}{1-3T+2T^2},$$
gdzie $\mathcal{B} := \sum_{n\in\mathbb{N}}(-2n+1)T^n$.

Część II

Niech $b_n := -2n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

Wiadomo, że ciąg (b_n) spełnia rekurencyjne $b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ponadto $b_0 = 1$ i $b_1 = -1$.

Stosując metodę opisaną przedstawioną w przypadku jednorodnym, otrzymujemy
$$\mathcal{B} = \frac{1-3T}{1-2T+T^2}.$$

Ostatecznie
$$\mathcal{A} = \frac{1+6T}{1-3T+2T^2} + \frac{T^2-3T^3}{(1-2T+T^2)(1-3T+2T^2)}.$$
Sprowadzając do wspólnego mianownika, dostajemy
$$\mathcal{A} = \frac{1+4T-10T^2+3T^3}{(1-2T+T^2)(1-3T+2T^2)}.$$