Zestaw 8

Rekurencje

Teoria

Mówimy, że ciąg (a_n) liczb zespolonych spełnia rekurencję liniową rzędu r, jeśli istnieją liczby zespolone $c_0, \dots, c_{r-1}$ oraz ciąg (b_n) takie, że $c_0 \neq 0$ oraz

$$a_{n+r} = c_{r-1}a_{n+r-1} + c_{r-2}a_{n+r-2} + \cdots + c_0 a_n + b_n \tag{1}$$

dla każdej liczby naturalnej n. Gdy $b_n = 0$ dla każdej liczby naturalnej n, to mówimy, że powyższa rekruencja jest jednorodna.

Jeśli znamy początkowe wartości wyrazów ciągu (a_n), tj. $a_0, \dots, a_{r-1}$, to powyższe warunki jednoznacznie wyznaczają ciąg (a_n). Przedstawimy teraz metodę rozwiązywania powyższej rekurencji, tj. znalezienia wzoru (zwanego wzorem jawnym), który pozwala na wyliczanie wartości wyrazu a_n bez konieczności wyliczenia wartości wszystkich wcześniejszych wyrazów. Metoda ta może być stosowana w sytuacji, gdy ciąg (b_n) jest zadany wielomianem, tzn. istnieją liczby zespolone $u_0, \dots, u_d$ takie, że

$$b_n = u_d n^d + u_{d-1}n^{d-1} + \cdots + u_0$$

dla każdej liczby naturalnej n.

Metoda, o której mowa, składać się będzie z trzech etapów:

I. Wyznaczenie pierwiastków wielomianu charakterystycznego.

II. Wyznaczenie rozwiązania pomocniczego.

III. Wyznaczenie wzoru jawnego.

Poniżej zostaną omówione poszczególne etapy.

I. Wyznaczenie pierwiastków wielomianu charakterystycznego
Wielomianem charakterystycznym rekurencji (1) nazywamy wielomian

$$\chi(t) = t^r - c_{r-1}t^{r-1} - c_{r-2}t^{r-2} - \cdots - c_0.$$

Zauważmy, że ciąg (b_n) nie ma wpływy na postać wielomianu charakterystycznego. W kroku pierwszym wyznaczamy pierwiastki wielomianu $\chi(t)$, a więc liczby zespolone λ takie, że $\chi(\lambda) = 0$. Aby omawiana metoda mogła być skutecznie zastosowana, musimy być w stanie wyznaczyć wszystkie pierwiastki wielomianu $\chi(t)$, a więc liczba wyznaczonych pierwiastków liczonych z krotnościami musi być równa r. Innymi słowy, jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ są wszystkimi parami różnymi pierwiastkami wielomianu $\chi(t)$ krotności $k_1, \ldots, k_l$ odpowiednio, to musi zachodzić równość

$$k_1 + \cdots + k_l = r.$$

II. Wyznaczenie rozwiązania pomocniczego

W tym kroku wyznaczamy rozwiązanie pomocnicze rekurencji (1), tj. ciąg (a'_n) taki, że

$$a'_{n+r} = c_{r-1}a'_{n+r-1} + c_{r-2}a'_{n+r-2} + \cdots + c_0 a'_n + b_n. \tag{2}$$

Tym co różni ciąg (a'_n) od ciągu (a_n) jest fakt, że nie musi on spełniać warunków początkowych, tzn. nie muszą zachodzić równości $a'_0 = a_0$, $a'_1 = a_1$, $\ldots$, $a'_{r-1} = a_{r-1}$. Krok II można pominąć, gdy rekurencja (1) jest jednorodna (przypomnijmy, że oznacza to, iż $b_n = 0$ dla każdej liczby naturalnej n), gdyż łatwo widać, że w tym przypadku możemy przyjąć $a'_n = 0$ dla każdej liczby naturalnej n.

Aby wyznaczyć ciąg (a'_n) korzystamy z twierdzenia, które mówi, że możemy go szukać w postaci

$$a'_n = n^k \cdot (v_d n^d + v_{d-1}n^{d-1} + \cdots + v_1 n + v_0) \tag{3}$$

dla pewnych liczb (niewiadomych) $v_0, \ldots, v_d$, gdzie k jest (wyznaczonym w kroku I) stopniem liczby 1 jako pierwiastka wielomianu $\chi(t)$ (w szczególności $k = 0$, gdy 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $\chi(t)$) oraz d jest stopniem wielomianu opisującego ciąg (b_n). Podstawiamy wyrażenia ze wzoru (3) do wzoru (2) – zauważmy, że wzór (3) oznacza, iż

$$\begin{aligned}
a'_{n+1} &= (n+1)^k \cdot (v_d(n+1)^d + v_{d-1}(n+1)^{d-1} + \cdots + v_1(n+1) + v_0),\\
a'_{n+2} &= (n+2)^k \cdot (v_d(n+2)^d + v_{d-1}(n+2)^{d-1} + \cdots + v_1(n+2) + v_0),\\
&\ \vdots\\
a'_{n+r} &= (n+r)^k \cdot (v_d(n+r)^d + v_{d-1}(n+r)^{d-1} + \cdots + v_1(n+r) + v_0).
\end{aligned}$$

Po uporządkowaniu otrzymanych wyrażeń (w tym przeniesieniu wszystkich wyrazów zawierających niewiadome na lewą stronę równości), otrzymujemy równość postaci

$$f_d n^d + f_{d-1}n^{d-1} + \cdots + f_1 n + f_0 = b_n = u_d n^d + u_{d-1}n^{d-1} + \cdots + u_0, \tag{4}$$

gdzie

$$f_i = f_i(v_0, \ldots, v_d), \qquad i = 0, 1, \ldots, d,$$

są pewnymi wyrażeniami zależnymi od niewiadomych $v_0, \ldots, v_d$ (oraz liczb $c_0, \ldots, c_{r-1}$). Ponieważ równość (4) zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych n, więc oznacza to, że

$$f_i(v_0, \ldots, v_d) = u_i$$

dla każdego $i = 0, 1, \ldots, d$. Otrzymujemy w ten sposób układ $d+1$ równań z $d+1$ niewiadomymi. Rozwiązując ten układ równań, wyznaczamy wartości niewiadomych $v_0, \ldots, v_d$, a więc ciąg (a'_n).

III. Wyznaczenie wzoru jawnego

Z wykładu wiadomo, że poszukiwany ciąg jest postaci

$$\begin{aligned} a_n = a'_n + \mu_{1,1}\lambda_1^n + \mu_{1,2}n\lambda_1^n + \cdots + \mu_{1,k_1}n^{k_1-1}\lambda_1^n \\ + \cdots + \mu_{l,0}\lambda_l^n + \mu_{1,1}n\lambda_1^n + \cdots + \mu_{l,k_l}n^{k_l-1}\lambda_l^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Przypomnijmy, że

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego wyznaczonymi w kroku I,
- $k_1, \ldots, k_l$ są krotnościami powyższych pierwiastków,
- (a'_n) jest rozwiązaniem pomocniczym wyznaczonym w kroku II.

Gdy rekurencja jest jednorodna, to możemy przystąpić do kroku III z pominięciem kroku II i w tym przypadku przyjmujemy $a'_n = 0$. Zauważmy, że w powyższym wzorze każdy pieriwastkek λ pojawia się tyle razy ile wynosi jego krotność: za każdym razem we wzorze mamy λ^n, przy czym i-te wystąpienie jest dodatkowo przemnożone przez n^{i-1}, a więc odpowiedni składnik ma postać $\mu n^{i-1}\lambda^n$.

Podstawiając do wzoru (5) kolejno $n = 0, 1, \ldots, r-1$, otrzymujemy układ n równań z n niewiadomymi $\mu_{i,j}$. Rozwiązując ten układ wyznaczamy wartości niewiadomych $\mu_{i,j}$, a co za tym idzie znajdujemy wzór jawny ciągu (a_n).

Przykład I (rekurencja jednorodna): Zadanie 1(e)

Krok I

Wielomianem charakterystycznym rekurencji

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$$

jest wielomian

$$\chi(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2.$$

Pierwiastkami powyższego wielomianu są 1 (pierwiastek dwukrotny) oraz 2 (pierwiastek jednokrotny).

Krok II
Pomijamy, gdyż rekurencja jest jednorodna.

Krok III
Wiemy, że
$$a_n = \mu_1 \cdot 1^n + \mu_2 \cdot n \cdot 1^n + \mu_3 \cdot 2^n.$$
Podstawiając do powyższego wzoru $n = 0, 1, 2$, otrzymujemy układ równań
$$\begin{cases} \mu_1 & & + & \mu_3 & = & 3, \\ \mu_1 & + & \mu_2 & + & 2\mu_3 & = & 3, \\ \mu_1 & + & 2\mu_2 & + & 4\mu_3 & = & 4. \end{cases}$$
Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka liczb
$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, -1, 1),$$
a więc otrzymujemy wzór
$$a_n = 2 - n + 2^n.$$

Przykład II (rekurencja niejednorodna): Zadanie 2(d)

Krok I
Wielomianem charakterystycznym rekurencji
$$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = -6n + 1$$
jest wielomian
$$\chi(t) = t^2 - t - 6,$$
którego pierwiastkami (jednokrotnymi) są 3 oraz -2.

Krok II
Ponieważ 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego oraz $b_n = -6n + 1$ jest wielomianem stopnia 1 (od n), więc szukamy ciągu (a'_n) postaci
$$a'_n = n^0(v_1 n + v_0) = v_1 n + v_0$$
spełniającego warunek
$$a'_{n+2} - a'_{n+1} - 6a'_n = -6n + 1.$$
Podstawiając wzory na a'_{n+2}, a'_{n+1} i a'_n do powyższej równości, otrzymujemy równość
$$[v_1(n+2) + v_0] - [v_1(n+1) + v_0] - 6[v_1 n + v_0] = -6n + 1,$$

skąd po przekształceniach mamy

$$-6v_1 n + (v_1 - 6v_0) = -6n + 1.$$

To oznacza, że liczby v_1 i v_0 są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} -6v_1 & & = -6 \\ v_1 & - \; 6v_0 & = 1 \end{cases}$$

zatem $v_1 = 1$ i $v_0 = 0$. Ostatecznie

$$a'_n = n.$$

Krok III
Z rachunków wykonanych w poprzednich krokach wynika, że ciąg (a_n) jest postaci

$$a_n = \mu_1 \cdot 3^n + \mu_2 \cdot (-2)^n + n.$$

Podstawiając $n = 0, 1$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 & = 3 \\ 3\mu_1 - 2\mu_2 + 1 & = 5 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para $(\mu_1, \mu_2) = (2, 1)$. Ostatecznie

$$a_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n + n.$$

Odpowiedzi do Zadania 1

(a) $a_n = 2^n + 3^n$.

(b) $a_n = -\frac{\imath\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{\imath\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

(c) $a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^n + 3 \cdot 2^n$.

(d) $a_n = (n + 3) \cdot 2^n$.

Odpowiedzi do Zadania 2

(a) $a_n = 6 \cdot 2^n - n^2 - 3 \cdot n - 6$.

(b) $a_n = \frac{1}{16} \cdot (-3)^{n+1} + \frac{1}{4}n + \frac{3}{16}$.

(c) $a_n = 2^{n+2} - n^2 - 4 \cdot n - 3$.

(e) $a_n = (n + 1) \cdot 2^n + 1$.

(f) $a_n = (7n - 3) \cdot 3^{n-1} - n + 2$.

(g) $a_n = (-n + 3) \cdot 2^n - n - 3$.

Odpowiedź do Zadania 8

Jeśli a_n jest maksymalną liczbą podziałów płaszczyzny przy pomocy n okręgów, to

$$a_n = n^2 - n + 2$$

dla $n \geq 1$.
Wskazówka. Uzasadnić, że ciąg (a_n) spełnia rekurencję

$$a_{n+1} = a_n + 2n$$

dla $n \geq 1$.

Odpowiedź do Zadania 9

Jeśli

$$s_n := 1^4 + 2^4 + \cdots + (n-1)^4 + n^4,$$

to

$$s_n = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n.$$

Wskazówka. Ciąg (s_n) spełnia rekurencję

$$s_{n+1} - s_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Odpowiedzi do Zadania 10

(a) $a_n = \frac{3}{2}n^2(n-1)$ dla $n \geq 1$.

Wskazówka. Zastosować podstawienie $a_n = nb_n$ dla $n \geq 1$.

(b) $a_n = \frac{1}{n}(2^n + 3^n)$ dla $n \geq 1$.

Wskazówka. Zastosować podstawienie $a_n = \frac{b_n}{n}$ dla $n \geq 1$.