Zestaw 5

Podstawowe obiekty kombinatoryczne

Przypomnimy w skrócie najważniejsze obiekty kombinatoryczne.

Permutacja

Permutacja zbioru n-elementowego X to każda bijekcja $[1, n] \to X$. Innymi słowy, permutacja zbioru X to ustawienie wszystkich elementów zbioru X w ciąg bez powtórzeń. Jest $n!$ (czytamy n silnia) permutacji zbioru n-elementowego, gdzie $n!$ jest iloczynem wszystkich liczb całkowitych od 1 do n, tzn.

$$n! := 1 \cdots n,$$

przy czym zgodnie z umową iloczyn pusty jest równy 1, a więc $0! := 1$. Rekurencyjnie $n!$ można zdefiniować następująco:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = 0, \\ (n-1)! \cdot n & \text{gdy } n > 0. \end{cases}$$

Konieczność zliczania permutacji pojawia się w zadaniach, w których należy ustawić elementy jakiegoś zbioru w ciąg. Na przykład, odpowiedzią w zadaniu:

Na ile sposobów 10 *studentów może wejść do sali?*

jest 10! (oczywiście, jeżeli dwa „sposoby” wejścia uważamy za różne wtedy i tylko wtedy, gdy studenci wchodzą w innej kolejności).

Kombinacje

Jeśli k jest nieujemną liczbą całkowitą, to k-elementową kombinacją zbioru X nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru X. Innymi słowy jest to „ciąg” złożony z k parami różnych elementów zbioru X, w którym nieważna jest kolejność elementów – słowo „ciąg” jest w cudzysłowie, gdyż właściwe użycie słowa ciąg implikuje, że kolejność elementów ma znaczenie.

Aby podać wzór na liczbę k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego, należy wprowadzić symbol Newtona n nad k oznaczany $\binom{n}{k}$ i definiowany wzorem

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{gdy } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{gdy } k > n. \end{cases}$$

W powyższej definicji k i n są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Kombinacje pojawiają się w zadaniach, w których wybieramy określoną liczbę elementów ustalonego zbioru, nie zwracając uwagi na ich kolejność. Przykładowo, jeśli zadanie brzmi

> *Prowadzący zdecydował, że zaliczenie otrzyma połowa studentów spośród* 10*-cio osobowej grupy. Na ile sposobów można wybrać studentów, którzy otrzymają zaliczenie?*

to odpowiedź brzmi $\binom{10}{5} = 252$.

Wariacje bez powtórzeń

Jeśli k jest nieujemną liczbą całkowitą, to k-elementową wariacją bez powtórzeń zbioru X nazywamy każdą różnowartościową funkcję $[1, k] \to X$, tj. ciąg k parami różnych elementów zbioru X. W tej sytuacji słowo ciąg nie wymaga cudzysłowu, gdyż kolejność elementów ma w przypadku wariacji znaczenie. Określenie „bez powtórzeń" jest związane z różnowartościowością rozważanych funkcji. Zauważmy, że jeśli k jest liczbą elementów zbioru X, to k-elementowe wariacje bez powtórzeń zbioru X są tym samym co permutacje zbioru X.

Permutując k-elementowe kombinacje, widzimy, że każda k-elementowa kombinacji wyznacza $k!$ różnych wariacji bez powtórzeń. Zatem, mamy

$$\binom{n}{k} \cdot k!$$

k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego. Oczywiście takich wariacji jest 0, gdy $k > n$. W przeciwnym wypadku, przekształcając powyższy wzór, otrzymujemy wyrażenia

$$\frac{n!}{(n-k)!} \qquad \text{oraz} \qquad n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

Szczególnie ostatni wzór ma naturalną intuicyjną interpretację: pierwszy element naszego ciągu możemy wybrać na n sposobów, drugi na $(n-1)$ sposobów, itd. W szczególności ostatni, k-ty element wybieramy w momencie, gdy zostało nam jeszcze $n - (k-1) = n - k + 1$ elementów do wyboru.

Przykład zadania, w którym można wykorzystać powyższe pojęcie jest następujący:

> *W zawodach brało udział 10 zawodników. Na ile sposób można rozdzielić pomiędzy nich medale (złoty, srebrny i brązowy)?*

Oczywiście musimy w tym przypadku policzyć ile jest 3-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru 10-elementowego, a więc otrzymujemy $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Wariacje z powtórzeniami

Jak łatwo zgadnąć w przypadku wariacji z powtórzeniami rezygnujemy z różnowartościowości rozważanych funkcji, a więc k-elementowa wariacja z powtórzeniami zbioru X to funkcja $[1, k] \to X$, czyli ciąg długości k złożony z (niekoniecznie różnych) elementów zbioru X. Łatwo zauważyć, że jeśli X ma n elementów, to takich ciągów jest n^k – każdy z k wyrazów ciągu możemy wybrać ze zbioru X na n sposobów.

Przykład zadania to:

> *Student ma do zaliczenia* 5 *przedmiotów, z każdego z nich może otrzymać jedną z czterech ocen:* 2, 3, 4 *i* 5. *Ile jest możliwych różnych zestawów ocen?*

Odpowiedź brzmi $4^5 = 1024$, przy czym oczywiście, jeśli jeden student dostanie z kolejnych egzaminów oceny 5, 4, 3, 2 i 5, a drugi 2, 3, 4, 5 i 5, to zestawy uważamy za różne – aby uznać zestawy ocen za identyczne, to z każdego przedmiotu oceny muszą być takie same.

Etapy, przypadki, dopełnienie

W zadaniach kombinatorycznych często nie wystarczy ograniczyć się do bezpośredniego wykorzystania jednego z powyżej opisanych typów obiektu kombinatorycznych. Aby można było wykorzystać powyższe „standardowe" obiekty, czasami konieczne jest rozłożenie oryginalnego problemu na bardziej elementarne podproblemy. Dwie wykorzystywane w tym celu techniki można określić nazwami: podział na etapy i podział na przypadki.

Etapy

Z podziałem na etapy mamy do czynienia, gdy procedura zliczania interesujących nas obiektów w naturalny sposób składa się z kilku kroków (czyli etapów). Aby ta technika mogła być zastosowana, ważne jest, aby liczba wyborów w kolejnych etapach nie zależała od wyborów dokonanych na etapach wcześniejszych (podkreślmy wyraźnie, że niezależna od wcześniejszych wyborów ma być *liczba* możliwości). Jeśli powyższy warunek jest spełniony oraz procedura składa się z m etapów takich, że na etapie pierwszym możemy dokonać n_1 wyborów, na etapie drugim możemy dokonać n_2 wyborów, itd. (a więc na m-tym etapie możemy dokonać n_m wyborów), to łączna liczba obiektów wynosi

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_m.$$

Przykładami zastosowania powyższego schematu są wzory na liczby wariacji (z powtórzeniami lub bez). W obu przypadkach i-ty etap odpowiadał wyborowi i-tego elementu ciągu. W prostszym przypadku wariacji z powtórzeniami mogliśmy to zrobić na n sposobów, więc otrzymywaliśmy wzór

$$\underbrace{n \cdots n}_{k \text{ razy}} = n^k.$$

W przypadku wariacji bez powtórzeń wybór na i-tym etapie zależał od wyborów dokonanych na wcześniejszych etapach. Nie mniej istotne okazywało się tylko, że wybraliśmy już $i-1$ elementów, więc i-tego wyboru mogliśmy dokonać na $n-(i-1)$ sposób. Zgodnie z powyższą reguła daje to wzór

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-(i-1)) \cdots (n-(k-1)).$$

Przykład zadania wykorzystującego powyższy sposób rozumowania jest następujący:

> *W szkolnym turnieju siatkówki biorą udział drużyny złożone z 3 dziewcząt i 3 chłopców. Na ile sposobów można wybrać drużynę z 28-osobowej klasy, w której jest 15 dziewcząt?*

Odpowiedź to $\binom{15}{3} \cdot \binom{13}{3} = 455 \cdot 286 = 130130$ – w pierwszym kroku (etapie) wybieram 3 dziewczyny spośród 15, a następnie 3 chłopców spośród $28-15 = 13$.

Przypadki

Drugą techniką stosowaną często w rozwiązywaniu zadań kombinatorycznych jest podział na przypadki. Ogólnie można powiedzieć, że pojawia się on, gdy chcemy policzyć liczbę elementów zbioru X, który jest sumą rozłączną zbiorów $X_1, \ldots, X_m$. W takiej sytuacji

$$|X| = |X_1| + \cdots + |X_m|.$$

Przykładem, w którym można zastosować się powyższy schemat, jest następujące zadanie:

> *W szkolnym turnieju przeciągania liny biorą udział drużyny złożone z 3 dziewcząt lub z 2 chłopców. Na ile sposobów można wybrać drużynę z 28-osobowej klasy, w której jest 15 dziewcząt?*

Odpowiedź brzmi $\binom{15}{3} + \binom{13}{2} = 455 + 78 = 533$ – jeśli zdecydujemy się na drużynę złożoną z dziewcząt, to mamy $\binom{15}{3}$ możliwości wyboru, w przypadku drużyny chłopców jest ich $\binom{13}{2}$.

Często podział na przypadki łączony jest z podziałem na etapy. Dodatkowo nie musi on wynikać bezpośrednio z treści zadania (jak powyżej), ale ze sposobu rozumowania. Przykładem odpowiedniego zadania jest:

> *Dwie klasy postanowiły stoczyć bitwę na śnieżki. W jednej klasie jest* 28 *uczniów, w drugiej* 30*. Aby zapewnić równe szanse, ustalono, że z każdej klasy w zabawie będzie mogła wziąć udział taka sama liczba uczniów. O ostatecznej liczbie uczestników mieli zdecydować uczniowie pierwszej klasy (uczniowie drugiej klasy mieli wybrać miejsce potyczki). Na ile sposobów można wybrać uczniów uczestniczących w bitwie?*

Można zauważyć, że procedura wyboru przebiega w dwóch etapach: najpierw swoją reprezentację wybiera pierwsza klasa, potem druga. Przy założeniu, że co najmniej jeden uczeń z każdej klasy musi uczestniczyć w bitwie, pierwsza klasa może wybrać swoją reprezentację na $2^{28} - 1$ sposobów – 2^{28} to liczba wszystkich podzbiorów zbioru 28-elementowego, ale należy spośród nich odrzucić zbiór pusty. Nie ma jednak możliwości prostego zastosowania schematu z etapami, gdyż liczba wyborów, które ma druga klasa, zależy od liczby osób, które wybrała pierwsza klasa: jeśli pierwsza klasa wybrała 1 osobę, to druga może wybrać reprezentację na 30 sposobów, gdy wybrano 2 osoby, to na $\binom{30}{2}$ sposobów, itd.

Powyższe rozumowanie sugeruje, że należy rozważyć przypadki: dla $i = 1, \ldots, 28$ przypadek i-ty obejmuje sytuacje, w których w bitwie będzie brało udział po i uczniów z każdej z klas. W takim przypadku możliwości jest $\binom{28}{i} \cdot \binom{30}{i}$, zatem wszystkich możliwości jest

$$\binom{28}{1} \cdot \binom{30}{1} + \binom{28}{2} \cdot \binom{30}{2} + \cdots + \binom{28}{i} \cdot \binom{30}{i} + \cdots + \binom{28}{28} \cdot \binom{30}{28}.$$

Dopełnienie

Wróćmy na chwilę do poprzedniego zadania i policzmy jeszcze raz, na ile sposobów można wybrać (niepustą) reprezentację z 28-osobowej klasy. Ponieważ liczba reprezentantów może się zmieniać od 1 do 28, więc rozpatrując odpowiednie przypadki, otrzymujemy sumę

$$\binom{28}{1} + \binom{28}{2} + \cdots + \binom{28}{i} + \cdots + \binom{28}{28}.$$

Z drugiej strony, tę samą wielkość można policzyć w sposób opisany wcześniej i otrzymać $2^{28}-1$. Zauważmy przy okazji, że uzasadniliśmy właśnie w sposób kombinatoryczny równość

$$\binom{28}{1}+\binom{28}{2}+\cdots+\binom{28}{i}+\cdots+\binom{28}{28}=2^{28}-1,$$

która jest też konsekwencją wzoru dwumiennego Newtona.

Powyższa sytuacja jest ilustracją reguły, że czasami łatwiej jest policzyć „złe" obiekty i odjąć je od liczby „wszystkich" obiektów, aby otrzymać liczbę „dobrych" obiektów. Innym przykładem zastosowania tej obserwacji jest następujące zadanie.

> *Z* 28*-osobowej klasy, w której jest* 15 *dziewcząt i* 13 *chłopców, należy wybrać* 10*-osobową reprezentację, w której będzie co najmniej jedna dziewczyna i co najmniej jedne chłopak.*

Licząc wprost, musimy rozpatrzeć przypadki zależne od liczby dziewcząt w reprezentacji. Takich przypadków jest dziewięć: jedna dziewczyna, dwie dziewczyny, ..., dziewięć dziewczyn. Temu rozumowaniu odpowiada suma

$$\binom{15}{1}\cdot\binom{13}{9}+\binom{15}{2}\cdot\binom{13}{8}+\cdots+\binom{15}{9}\cdot\binom{13}{1}.$$

Można jednak również zauważyć, że możemy łącznie wybrać $\binom{28}{10}$ reprezentacji 10-osobowych, z których jednak $\binom{15}{10}$ nie ma swoim składzie chłopaka, a $\binom{13}{10}$ dziewczyny, a więc dostajemy odpowiedź

$$\binom{28}{10}-\binom{15}{10}-\binom{15}{10}.$$

Równość

$$\binom{15}{1}\cdot\binom{13}{9}+\binom{15}{2}\cdot\binom{13}{8}+\cdots+\binom{15}{9}\cdot\binom{13}{1}=\binom{28}{10}-\binom{15}{10}-\binom{13}{10},$$

która w powyższy sposób uzasadniliśmy, jest szczególnym przykładem zastosowania wzoru Chu–Vandermonde'a, który znajduje się w notatkach z wykładu.

Podsumowanie

Z powyższych rozważań warto zapamiętać następujące reguły:

- jeśli w rozważaniach pojawiają się przypadki, to należy *dodać* otrzymane w nich wyniki;
- jeśli w rozważaniach pojawiają się kroki (etapy), to (przy spełnieniu odpowiednich warunków) należy *wymnożyć* otrzymane w nich wyniki.