Matematyka Dyskretna

Wykład VI

Grzegorz Bobiński (UMK)

2 Elementy kombinatoryki

Założenie

Rozważane zbiory są skończone.

2.1 Podstawowe obiekty kombinatoryczne

Definicja

Jeśli $n \in \mathbb{N}$ i X jest zbiorem, to ciągiem długości n elementów zbioru X nazywamy każdą funkcję $a : [1, n] \to X$.
Jeśli a jest ciągiem długości n, to piszemy

$$a = (a(1), \dots, a(n)).$$

Uwaga

Jeśli $n \in \mathbb{N}$ i X jest zbiorem, to istnieje dokładnie $|X|^n$ ciągów długości n elementów zbioru X (gdzie $0^0 := 1$).

Definicja

Jeśli X jest zbiorem, to permutacją zbioru X nazywamy każdy różnowartościowy ciąg długości $|X|$ elementów zbioru X.

Oznaczenie

Zbiór wszystkich permutacji zbioru X oznaczamy P_X.

Definicja

Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to definiujemy $n!$, n silnia, wzorem

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } n = 0, \\ n \cdot (n-1)! & \text{jeśli } n > 0. \end{cases}$$

Stwierdzenie 2.1

Jeśli X jest zbiorem, to $|P_X| = |X|!$.

Definicja

Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to definiujemy $n!$, n silnia, wzorem

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } n = 0, \\ n \cdot (n-1)! & \text{jeśli } n > 0. \end{cases}$$

Stwierdzenie 2.1

Jeśli X jest zbiorem, to $|P_X| = |X|!$.

Dowód

Indukcja na $n := |X|$.

1°. $X = \varnothing$.

Oczywiste.

2°. $X \neq \varnothing$.

Definiujemy $f : P_X \to \bigcup_{x \in X} P_{X \setminus \{x\}}$ wzorem

$$f(a) := (a(1), \ldots, a(n-1)) \qquad (a \in P_X).$$

Wtedy f jest bijekcją.

(ZI) $\implies$ $|P_{X\setminus\{x\}}| = (|X| - 1)!$ dla każdego $x \in X$.

Stąd

$$|P_X| = \sum_{x \in X} |P_{X\setminus\{x\}}| = \sum_{x \in X} (|X| - 1)! = |X| \cdot (|X| - 1)! = |X|!. \quad \square$$

Stwierdzenie 2.2

Jeśli $n > 1$, to
$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}.$$

Dowód

Wiadomo, że
$$\left(\tfrac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\tfrac{k+1}{k}\right)^{k+1}$$
dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$.
Stąd
$$e^{n-1} < \prod_{k\in[1,n-1]}\left(\tfrac{k+1}{k}\right)^{k+1} = \prod_{k\in[1,n-1]} \tfrac{1}{k^{k+1}} \cdot \prod_{k\in[1,n-1]}(k+1)^{k+1}$$
$$= \prod_{k\in[1,n-1]} \tfrac{1}{k^{k+1}} \cdot \prod_{k\in[2,n]} k^k = \tfrac{1}{1^2} \cdot \prod_{k\in[2,n-1]} \tfrac{k^k}{k^{k+1}} \cdot n^n = \tfrac{n^n}{(n-1)!} = \tfrac{n^{n+1}}{n!}.$$
Podobnie
$$e^{n-1} > \prod_{k\in[1,n-1]}\left(\tfrac{k+1}{k}\right)^{k} = \prod_{k\in[1,n-1]} \tfrac{1}{k^{k}} \cdot \prod_{k\in[1,n-1]}(k+1)^{k}$$
$$= \prod_{k\in[1,n-1]} \tfrac{1}{k^{k}} \cdot \prod_{k\in[2,n]} k^{k-1} = \tfrac{1}{1^1} \cdot \prod_{k\in[2,n-1]} \tfrac{k^{k-1}}{k^{k}} \cdot n^{n-1} = \tfrac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \tfrac{n^n}{n!}. \ \square$$

Uwaga

Stirling udowodnił, że
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Definicja

Jeśli $k \in \mathbb{N}$ i X jest zbiorem, to *k-elementową kombinacją zbioru X* nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru X.

Oznaczenie

Zbiór wszystkich k-elementowych kombinacji elementów zbioru X oznaczamy $C_{X,k}$.
Jeśli $n, k \in \mathbb{N}$, to $C_{n,k} := C_{[1,n],k}$.

Definicja

Jeśli $n, k \in \mathbb{N}$, to definiujemy $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, *symbol Newtona n nad k*, wzorem

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{jeśli } k \in [0, n], \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Stwierdzenie 2.3

Jeśli $k \in \mathbb{N}$ i X jest zbiorem, to

$$|C_{X,k}| = \binom{|X|}{k}.$$

Definicja

Jeśli $n, k \in \mathbb{N}$, to definiujemy $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, symbol Newtona n nad k, wzorem

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{jeśli } k \in [0, n], \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Stwierdzenie 2.3

Jeśli $k \in \mathbb{N}$ i X jest zbiorem, to

$$|C_{X,k}| = \binom{|X|}{k}.$$

Dowód

1° $k > |X|$.

$C_{X,k} = \varnothing \implies |C_{X,k}| = 0 = \binom{|X|}{k}$.

2° $k \leq |X|$.

Definiujemy $f : P_X \to C_{X,k}$ wzorem

$$f(a) := \{a(1), \ldots, a(k)\} \qquad (a \in P_X).$$

Wtedy dla każdego $A \in C_{X,k}$:

$$f^{-1}(A) = \{a \in P_X : (a(1), \ldots, a(k)) \in P_A, (a(k+1), \ldots, a(|X|)) \in P_{X \setminus A}\}.$$

(2.1) $\implies |f^{-1}(A)| = k! \cdot (|X| - k)!$. $\square$

Uwaga

Jeśli R jest pierścieniem przemiennym, $x_i, y_i \in R$, $i \in J$, $|J| < \infty$, to

$$\prod_{i \in J}(x_i + y_i) = \sum_{I \subseteq J}\Big(\prod_{i \in I} x_i \cdot \prod_{i \in J \setminus I} y_i\Big).$$

Wniosek 2.4

Jeśli R jest pierścieniem przemiennym, $x, y \in R$, $n \in \mathbb{N}$, to

$$(x + y)^n = \sum_{k \in [0,n]} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}.$$

Dowód

Z powyższej uwagi otrzymujemy, że

$$(x + y)^n = \prod_{k \in [1,n]}(x + y) = \sum_{I \subseteq [1,n]}\big(\prod_{i \in I} x \cdot \prod_{i \in [1,n] \setminus I} y\big)$$

$$= \sum_{I \subseteq [1,n]}\big(x^{|I|} \cdot y^{n-|I|}\big) = \sum_{k \in [0,n]} \sum_{I \in C_{n,k}} x^k \cdot y^{n-k} = \sum_{k \in [0,n]} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}. \ \square$$