Matematyka Dyskretna

Wykład VII

Grzegorz Bobiński (UMK)

2.2 Metoda bijektywna

Stwierdzenie 2.5

Jeśli $n, k \in \mathbb{N}_+$, to
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Przypomnienie

(2.3): $|C_{X,k}| = \binom{|X|}{k}$.

Dowód

Definiujemy $f : C_{n,k} \to C_{n-1,k} \cup C_{n-1,k-1}$ wzorem
$$f(X) := \begin{cases} X & \text{jeśli } n \notin X, \\ X \setminus \{n\} & \text{jeśli } n \in X, \end{cases} \qquad (X \in C_{n,k}).$$

Funkcja f jest poprawnie określona i jest bijekcją:
$$f^{-1}(Y) := \begin{cases} Y & \text{jeśli } Y \in C_{n-1,k}, \\ Y \cup \{n\} & \text{jeśli } Y \in C_{n-1,k-1}, \end{cases} \; (Y \in C_{n-1,k} \cup C_{n-1,k-1}). \quad \square$$

Stwierdzenie 2.5

Jeśli $n, k \in \mathbb{N}_+$, to

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Uwaga

Stwierdzenie 2.5 oraz równości $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 0$ są podstawą metody liczenia wartości symboli Newtona zwanej trójkątem Pascala.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & k=0 & & & & & \\
 & & & & & & & & \swarrow & & & k=1 & & & & \\
n=0 & \rightarrow & & & & & & 1 & & \swarrow & & & k=2 & & & \\
n=1 & \rightarrow & & & & & 1 & & 1 & & \swarrow & & & k=3 & & \\
n=2 & \rightarrow & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \swarrow & & & k=4 & \\
n=3 & \rightarrow & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \swarrow & & & k=5 \\
n=4 & \rightarrow & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \swarrow & & \\
n=5 & \rightarrow & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & &
\end{array}$$

Definicja

Dla $k \in \mathbb{N}$ definiujemy $\binom{T}{k} \in \mathbb{C}[T]$ wzorem

$$\binom{T}{k} := \frac{1}{k!} \cdot \prod_{i \in [0, k-1]} (T - i).$$

W szczególności $\binom{T}{0} = 1$.

Uwaga

Jeśli $k \in \mathbb{N}$, to $\deg \binom{T}{k} = k$ oraz pierwiastkami (jednokrotnymi) wielomianu $\binom{T}{k}$ są $0, \ldots, k-1$.

Wniosek 2.6

Jeśli $k \in \mathbb{N}_+$, to

$$\binom{T}{k} = \binom{T-1}{k} + \binom{T-1}{k-1}.$$

W szczególności, jeśli $x \in \mathbb{C}$, to

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}.$$

Dowód

Niech

$$F := \binom{T}{k} \qquad \text{i} \qquad G := \binom{T-1}{k} + \binom{T-1}{k-1}.$$

(2.5) $\implies$ $F(n) = G(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Stąd $F = G$. □

Stwierdzenie 2.7

Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $k \in [0, n]$, to
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Dowód

Definiujemy $f : C_{n,k} \to C_{n,n-k}$ wzorem
$$f(X) := [1, n] \setminus X \qquad (X \in C_{n,k}).$$
Funkcja f jest poprawnie określona i jest bijekcją:
$$f^{-1}(Y) := [1, n] \setminus Y \qquad (Y \in C_{n,n-k}). \quad \square$$

Oznaczenie

Jeśli X jest zbiorem, to $2^X := \{A : A \subseteq X\}$.

Stwierdzenie 2.8

Jeśli X jest zbiorem, to $|2^X| = 2^{|X|}$.

Dowód

Możemy założyć, że $X = [1, n]$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem ciągów długości n elementów zbioru $\{0, 1\}$.
Wiemy, że $|\mathcal{X}| = 2^n$.
Definiujemy $f : 2^X \to \mathcal{X}$ wzorem

$$(f(A))(i) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i \in A, \\ 0 & \text{jeśli } i \notin A, \end{cases} \qquad (i \in [1, n]),$$

tzn. $f(A)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru A.
Funkcja f jest bijekcją:

$$f^{-1}(a) := \{i \in [1, n] : a(i) = 1\} \qquad (a \in \mathcal{X}). \quad \square$$

Stwierdzenie 2.8

Jeśli X jest zbiorem, to $|2^X| = 2^{|X|}$.

Wniosek 2.9

Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Dowód

Niech $X := 2^{[1,n]}$.
Wtedy $|X| = 2^n$.
Z drugiej strony
$$X = C_{n,0} \cup C_{n,1} \cup \cdots \cup C_{n,n},$$
przy czym $C_{n,k} \cap C_{n,l} = \varnothing$ dla $k \neq l$.
Stąd
$$|X| = |C_{n,0}| + |C_{n,1}| + \cdots + |C_{n,n}| \overset{(2.3)}{=} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}. \quad \square$$

Stwierdzenie 2.10 (wzór Chu–Vandermonde'a)

Jeśli $k, l, n \in \mathbb{N}$, to

$$\sum_{i \in [0,n]} \binom{k}{i} \cdot \binom{l}{n-i} = \binom{k+l}{n}.$$

Dowód

Niech

$$X := \{(A_1, A_2) \in 2^{[1,k]} \times 2^{[k+1,k+l]} : |A_1| + |A_2| = n\} \qquad \text{i} \qquad Y := \{B \in 2^{[1,k+l]} : |B| = n\}.$$

(2.3) $\implies |Y| = \binom{k+l}{n}$.

Z drugiej strony

$$X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n,$$

gdzie $X_i := \{(A_1, A_2) \in X : |A_1| = i\}$.

Ponieważ $X_i \cap X_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, więc

$$|X| = |X_0| + |X_1| + \cdots + |X_n| \overset{(2.3)}{=} \sum_{i \in [0,n]} \binom{k}{i} \cdot \binom{l}{n-i}.$$

Definiujemy $f : X \to Y$ wzorem

$$f(A_1, A_2) := A_1 \cup A_2 \qquad ((A_1, A_2) \in X).$$

Funkcja f jest poprawnie określona i jest bijekcją:

$$f^{-1}(B) := (B \cap [1,k], B \cap [k+1, k+l]) \qquad (B \in Y). \quad \square$$

Stwierdzenie 2.10 (wzór Chu–Vandermonde'a)

Jeśli $k, l, n \in \mathbb{N}$, to

$$\sum_{i \in [0,n]} \binom{k}{i} \cdot \binom{l}{n-i} = \binom{k+l}{n}.$$

Wniosek 2.11

Jeśli $x, y \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$, to

$$\sum_{i \in [0,n]} \binom{x}{i} \cdot \binom{y}{n-i} = \binom{x+y}{n}.$$

Dowód

Definiujemy $F, G \in \mathbb{C}[X, Y]$ wzorami

$$F := \sum_{i \in [0,n]} \binom{X}{i} \cdot \binom{Y}{n-i} \qquad \text{i} \qquad G := \binom{X+Y}{n}.$$

(2.10) $\implies F(k, l) = G(k, l)$ dla wszystkich $k, l \in \mathbb{N} \implies F = G$. $\square$

Przykład

Jeśli $F = X^2 \cdot Y$ i $G = X \cdot Y^2$, to $F \neq G$, ale $F(\lambda, \lambda) = G(\lambda, \lambda)$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $m, n \in \mathbb{N}$.

Drogą z $(0,0)$ do (m,n) nazywamy każdy ciąg $a : [0, m+n] \to \mathbb{N}^2$ taki, że

- $a(0) = (0,0)$,
- $a(m+n) = (m,n)$,
- $a(i) = a(i-1) + (1,0)$ lub $a(i) = a(i-1) + (0,1)$ dla każdego $i = 1, \ldots, m+n$.

Stwierdzenie 2.12

Jeśli $m, n \in \mathbb{N}$, to dróg z $(0,0)$ do (m,n) jest $\binom{m+n}{m}$.

Dowód

Każda droga składa się ze $m+n$ kroków: m kroków w prawo i n kroków w górę, i jest jednoznacznie wyznaczona przez wybór m kroków, które wykonamy w prawo. □

Stwierdzenie 2.12

Jeśli $m, n \in \mathbb{N}$, to dróg z $(0,0)$ do (m,n) jest $\binom{m+n}{m}$.

Wniosek 2.13

Jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}_+$, to

$$\#\{x\colon [1,k] \to \mathbb{N} : x(1) + \cdots + x(k) = n\} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Dowód

Każdy ciąg $x\colon [1,k] \to \mathbb{N}$ taki, że $x(1) + \cdots + x(k) = n$, jednoznacznie koduje drogę $(0,0)$ do $(k-1,n)$ w następujący sposób:

- Wykonujemy $x(1)$ kroków „w górę" (w kierunku $(0,1)$);
- Wykonujemy 1 krok „w prawo" (w kierunku $(1,0)$);
- Wykonujemy $x(2)$ kroków „w górę";
- Wykonujemy 1 krok „w prawo";

  $\vdots$

- Wykonujemy $x(k-1)$ kroków „w górę";
- Wykonujemy 1 krok „w prawo";
- Wykonujemy $x(k)$ kroków „w górę". $\square$