Matematyka Dyskretna

Wykład IX

Grzegorz Bobiński (UMK)

3 Funkcje tworzące

3.1 Szeregi formalne

Definicja

Szeregiem formalnym nazywamy każdy ciąg $\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, który zapisujemy

$$\mathcal{A} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}(n) \cdot T^n = \mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(1) \cdot T + \cdots + \mathcal{A}(n) \cdot T^n + \cdots .$$

Jeśli istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że $\mathcal{A}(n) = 0$ dla wszystkich $n > m$, to piszemy również

$$\mathcal{A} = \sum_{n\in[0,m]} \mathcal{A}(n) \cdot T^n = \mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(1) \cdot T + \cdots + \mathcal{A}(m) \cdot T^m$$

(a szereg nazywamy wielomianem).
Zbiór szeregów formalnych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}[[T]]$.
W $\mathbb{C}[[T]]$ wprowadzamy działania dodawania i mnożenia wzorami

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot T^n\Big) + \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \cdot T^n\Big) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) \cdot T^n,$$

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot T^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \cdot T^n\Big) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k\in[0,n]} a_k \cdot b_{n-k}\Big) \cdot T^n.$$

Zbiór $\mathbb{C}[[T]]$ wraz z powyższymi działaniami jest pierścieniem.
Elementami neutralnymi są szeregi

$$0 = 0 + 0 \cdot T + \cdots + 0 \cdot T^n + \cdots \qquad \text{i} \qquad 1 = 1 + 0 \cdot T + \cdots + 0 \cdot T^n + \cdots .$$

Oznaczenie

Jeśli $\mathcal{A} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ i $n \in \mathbb{N}$, to $[T^n]\mathcal{A} := a_n$.

Lemat 3.1

Szereg $\mathcal{A}$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $[T^0]\mathcal{A} \neq 0$.

Dowód

$\Rightarrow$:

Załóżmy, że szereg $\mathcal{A}$ jest odwracalny.

Wtedy istnieje szereg $\mathcal{B}$ taki, że $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 1$.

W szczególności,

$$1 = [T^0](\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = [T^0]\mathcal{A} \cdot [T^0]\mathcal{B},$$

skąd $[T^0]\mathcal{A} \neq 0$.

$\Leftarrow$:

Załóżmy, że $[T^0]\mathcal{A} \neq 0$.

Definiujemy $\mathcal{B} \in \mathbb{C}[[T]]$ wzorem

$$[T^n]\mathcal{B} := \begin{cases} \frac{1}{[T^0]\mathcal{A}} & \text{jeśli } n = 0, \\ -\frac{1}{[T^0]\mathcal{A}} \cdot \left(\sum_{k \in [1,n]} [T^k]\mathcal{A} \cdot [T^{n-k}]\mathcal{B}\right) & \text{jeśli } n > 0, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 1$. □

Lemat 3.1

Szereg $\mathcal{A}$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $[T^0]\mathcal{A} \neq 0$.

Oznaczenie

Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}[[T]]$ i $\mathcal{B}$ jest odwracalny, to definiujemy $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}[[T]]$ wzorem

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} := \mathcal{B}^{-1} \cdot \mathcal{A}.$$

Przykład

Jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$, to

$$\frac{1}{1 - \lambda \cdot T} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n \cdot T^n.$$

Definicja

Funkcją tworzącą ciągu a nazywamy szereg $\sum_{n \in \mathbb{N}} a(n) \cdot T^n$.

Oznaczenie

Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy $\mathcal{A}_x \in \mathbb{C}[[T]]$ wzorem

$$\mathcal{A}_x := \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{x}{n} \cdot T^n.$$

Lemat 3.2

(1) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to $\mathcal{A}_{x+y} = \mathcal{A}_x \cdot \mathcal{A}_y$.

(2) $\mathcal{A}_0 = 1$.

Przypomnienie

(2.11): $\sum_{i \in [0,n]} \binom{x}{i} \cdot \binom{y}{n-i} = \binom{x+y}{n}$.

Dowód

(1): Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to

$$[T^n]\mathcal{A}_{x+y} = \binom{x+y}{n} \overset{(2.11)}{=} \sum_{i \in [0,n]} \binom{x}{i} \cdot \binom{y}{n-i} = \sum_{i \in [0,n]} [T^i]\mathcal{A}_x \cdot [T^{n-i}]\mathcal{A}_y = [T^n](\mathcal{A}_x \cdot \mathcal{A}_y).$$

(2): $\mathcal{A}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{0}{n} \cdot T^n = 1 + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2 + \cdots = 1$. $\square$

Stwierdzenie 3.3

Jeśli $k \in \mathbb{N}_+$, to
$$\frac{1}{(1+T)^k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \binom{k+n-1}{k-1} \cdot T^n.$$

Przypomnienie

(2.4): $(r+s)^k = \sum_{n\in[0,k]} \binom{k}{n} \cdot r^n \cdot s^{k-n}$.

Dowód

Mamy $\mathcal{A}_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{k}{n} \cdot T^n = \sum_{n\in[0,k]} \binom{k}{n} \cdot T^n = (1+T)^k$.

Ponadto $\mathcal{A}_{-k} \cdot \mathcal{A}_k \overset{(3.2)(1)}{=} \mathcal{A}_0 \overset{(3.2)(2)}{=} 1$.

Stąd

$$\frac{1}{(1+T)^k} = \frac{1}{\mathcal{A}_k} = \mathcal{A}_{-k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{-k}{n} \cdot T^n$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\prod_{i\in[0,n-1]}(-k-i)}{n!} \cdot T^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \frac{\prod_{i\in[0,n-1]}(k+i)}{n!} \cdot T^n$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \binom{k+n-1}{n} \cdot T^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \binom{k+n-1}{k-1} \cdot T^n. \ \square$$

Stwierdzenie 3.3

Jeśli $k \in \mathbb{N}_+$, to $\frac{1}{(1+T)^k} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot \binom{k+n-1}{k-1} \cdot T^n$.

Wniosek 3.4

Jeśli $k, m \in \mathbb{N}_+$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, to

$$\frac{1}{(1 - \lambda \cdot T^m)^k} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{k+n-1}{k-1} \cdot \lambda^n \cdot T^{n \cdot m}.$$

Dowód

Wystarczy w (3.3) podstawić $-\lambda \cdot T^m$ w miejsce T. $\square$

Fakt 3.5

Jeśli $k \in \mathbb{N}_+$ i $\mathcal{A}^k = 1 + T$ dla $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[T]]$, to istnieje $\varepsilon \in \mathbb{C}$ taki, że $\varepsilon^k = 1$ i

$$\mathcal{A} = \varepsilon \cdot \mathcal{A}_{\frac{1}{k}} = \varepsilon \cdot \Big(1 + \sum_{n \in \mathbb{N}_+} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\prod_{i \in [1, n-1]} (i \cdot k - 1)}{k^n \cdot n!} \cdot T^n\Big).$$

Dowód

Wiemy, że $(\mathcal{A}_{\frac{1}{k}})^k \overset{(3.2)(1)}{=} \mathcal{A}_1 = 1 + T$. $\square$

Wniosek 3.4

Jeśli $k, m \in \mathbb{N}_+$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, to $\frac{1}{(1-\lambda\cdot T)^k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{k+n-1}{k-1} \cdot \lambda^n \cdot T^n$.

Uwaga

Jeśli $F, G \in \mathbb{C}[T]$ i $G \neq 0$, to istnieją $Q, R \in \mathbb{C}[T]$ takie, że $\deg R < \deg G$ oraz

$$\frac{F}{G} = Q + \frac{R}{G}.$$

Uwaga

Niech $F, G \in \mathbb{C}[T]$ i $\deg F < \deg G$ oraz $G(0) = 1$.

Jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są wszystkimi parami różnymi pierwiastkami zespolonymi wielomianu G krotności $m_1, \ldots, m_n$ odpowiednio, to istnieją $A_{i,j} \in \mathbb{C}$, $j \in [1, m_n]$, $i \in [1, n]$, takie, że

$$\frac{F}{G} = \sum_{i\in[1,n]} \sum_{j\in[1,m_i]} \frac{A_{i,j}}{(1-\lambda_i^{-1}\cdot T)^j}.$$

Przykład

Na ile sposobów można wypłacić kwotę n złotych przy pomocy monet jedno-, dwu- i pięciozłotowych?

Rozwiązanie

Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $a(n)$ będzie szukaną wielkością.

Niech $\mathcal{A}$ będzie funkcją tworzącą ciągu a.

Zauważmy, że

$$(\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} T^n) \cdot (\sum_{n\in\mathbb{N}} T^{2\cdot n}) \cdot (\sum_{n\in\mathbb{N}} T^{5\cdot n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{\substack{(i_1,i_2,i_3)\in\mathbb{N}^3 \\ i_1+2\cdot i_2+5\cdot i_3=n}} 1) \cdot T^n$$

$$= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \#\{(i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{N}^3 : i_1 + 2\cdot i_2 + 5\cdot i_3 = n\} \cdot T^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n) \cdot T^n = \mathcal{A}.$$

Stąd

$$\mathcal{A} = \Big(\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} T^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} T^{2\cdot n}\Big) \cdot \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} T^{5\cdot n}\Big) = \frac{1}{(1-T)\cdot(1-T^2)\cdot(1-T^5)}$$

$$= \frac{1}{(1-T)^3\cdot(1+T)\cdot\prod_{i\in[1,4]}(1-\varepsilon^i\cdot T)}$$

$$= \tfrac{13}{40} \cdot \tfrac{1}{1-T} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{(1-T)^2} + \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{1}{(1-T)^3} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{1+T} + \tfrac{1}{25} \cdot \textstyle\sum_{i\in[1,4]} \frac{1-\varepsilon^i-\varepsilon^{2\cdot i}+\varepsilon^{3\cdot i}}{1-\varepsilon^i\cdot T},$$

więc, korzystając z (3.4), otrzymujemy

$$a(n) = \frac{13}{40} + \frac{1}{4}\cdot(n+1) + \frac{1}{10}\cdot\binom{n+2}{2} + (-1)^n\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{25}\cdot\sum_{i\in[1,4]}(1-\varepsilon^i-\varepsilon^{2\cdot i}+\varepsilon^{3\cdot i})\cdot\varepsilon^{n\cdot i},$$

gdzie ε jest pierwiastkiem pierwotnym 5-tego stopnia z 1.

Przykład

Na ile sposobów można wypłacić kwotę n złotych przy pomocy monet jedno-, dwu- i pięciozłotowych?

Jeśli $a(n)$ będzie szukaną wielkością, to

$$a(n) = \frac{13}{40} + \frac{1}{4} \cdot (n+1) + \frac{1}{10} \cdot \binom{n+2}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{25} \cdot \sum_{i \in [1,4]} (1 - \varepsilon^i - \varepsilon^{2 \cdot i} + \varepsilon^{3 \cdot i}) \cdot \varepsilon^{n \cdot i},$$

Ostatecznie

$$a(n) = \frac{1}{20} \cdot n^2 + \frac{2}{5} \cdot n + \begin{cases} 1 & \text{jeśli } n \equiv_{10} 0, 2, \\ \frac{11}{20} & \text{jeśli } n \equiv_{10} 1, \\ \frac{7}{20} & \text{jeśli } n \equiv_{10} 3, 9, \\ \frac{3}{5} & \text{jeśli } n \equiv_{10} 4, 8, \\ \frac{3}{4} & \text{jeśli } n \equiv_{10} 5, 7, \\ \frac{4}{5} & \text{jeśli } n \equiv_{10} 6. \end{cases}$$

Ten sam wynik otrzymujemy, stosując przedstawienie

$$\mathcal{A} = \frac{1}{(1-T) \cdot (1-T^2) \cdot (1-T^5)} = \frac{(\sum_{i \in [0,9]} T^i) \cdot (\sum_{i \in [0,4]} T^{2 \cdot i}) \cdot (1+T^5)}{(1-T^{10})^3}$$
$$= \left(\sum_{i \in [0,9]} T^i\right) \cdot \left(\sum_{i \in [0,4]} T^{2 \cdot i}\right) \cdot (1 + T^5) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{n+2}{2} \cdot T^{10 \cdot n}\right).$$