Matematyka Dyskretna

Wykład XI

Grzegorz Bobiński (UMK)

3.3 Rekurencje (c.d.)

Twierdzenie 3.7

Niech F będzie wielomianem charakterystycznym rekurencji jednorodnej

$$(*) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = 0, \ n \in \mathbb{N},$$

rzędu r.

Jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ są parami różnymi pierwiastkami wielomianu F krotności $k_1, \ldots, k_l$, odpowiednio, to ciągi $(n^j \cdot \lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $i \in [1, l]$, $j \in [0, k_i - 1]$, tworzą bazę przestrzeni rozwiązań rekurencji $(*)$.

Twierdzenie 3.8

Jeśli $f \in \mathbb{C}[T]$, to istnieje rozwiązanie rekurencji

$$(2) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = f(n), \ n \in \mathbb{N},$$

rzędu r postaci $(n^k \cdot g(n))_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie k jest krotnością 1 jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego rekurencji (2), zaś $g \in \mathbb{C}[T]$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $\deg f$.

Twierdzenie 3.8

Jeśli $f \in \mathbb{C}[T]$, to istnieje rozwiązanie rekurencji

$$(2) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = f(n), \ n \in \mathbb{N},$$

rzędu r postaci $(n^k \cdot g(n))_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie k jest krotnością 1 jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego rekurencji (2), zaś $g \in \mathbb{C}[T]$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $\deg f$.

Dowód

Niech $m := \deg f$ ($m := -1$, gdy $f = 0$).

1° Pokażemy, że istnieje rekurencja jednorodna

$$(3) \qquad X_{n+r+m+1} + u'_{r+m} \cdot X_{n+r+m} + \cdots + u'_0 \cdot X_n = 0, \ n \in \mathbb{N},$$

rzędu $r + m + 1$ taka, że spełnione są następujące warunki:

1. jeśli ciąg a jest rozwiązaniem rekurencji (2), to ciąg a jest rozwiązaniem rekurencji (3),
2. jeśli F i G są wielomianami charakterystycznymi rekurencji (2) i (3), odpowiednio, to $G = (T-1)^{m+1} \cdot F$.

Dowód będzie indukcyjny ze względu m.

Dla $m = -1$ teza jest oczywista.

Dla $m \geq 0$ rozważmy rekruencję

$$(4) \qquad X_{n+r+1} + (u_{r-1} - u_r) \cdot X_{n+r} + \cdots + (u_0 - u_1) \cdot X_{n+1} - u_0 \cdot X_n = h(n), \ n \in \mathbb{N},$$

gdzie $u_r := 1$ i $h := f(T+1) - f(T)$.

Zauważmy, że jeśli a jest rozwiązaniem rekurencji (2), to a jest rozwiązaniem rekurencji (4).

Wielomian charakterystyczny rekurencji (4) jest postaci $(T-1) \cdot F$.

Rząd rekurencji (4) jest równy $r + 1$ i $\deg h = m - 1$.

Teza wynika z założenia indukcyjnego.

Twierdzenie 3.8

Jeśli $f \in \mathbb{C}[T]$, to istnieje rozwiązanie rekurencji

$$X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = f(n), \; n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

rzędu r postaci $(n^k \cdot g(n))_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie k jest krotnością 1 jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego rekurencji (2), zaś $g \in \mathbb{C}[T]$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $\deg f$.

Dowód (c.d.)

Niech $m := \deg f$ ($m := -1$, gdy $f = 0$).

1° Istnieje rekurencja jednorodna

$$X_{n+r+m+1} + u'_{r+m} \cdot X_{n+r+m} + \cdots + u'_0 \cdot X_n = 0, \; n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

rzędu $r + m + 1$ taka, że spełnione są następujące warunki:

1. jeśli ciąg a jest rozwiązaniem rekurencji (2), to ciąg a jest rozwiązaniem rekurencji (3),
2. jeśli F i G są wielomianami charakterystycznymi rekurencji (2) i (3), odpowiednio, to $G = (T - 1)^{m+1} \cdot F$.

2°. Niech $\lambda_0 = 1$, λ_1, ..., λ_l będą pierwiastkami wielomianu G krotności $k_0 = k + m + 1$, k_1, ..., k_l, odpowiednio.

Ustalmy rozwiązanie a rekurencji (2).

Wtedy a jest też rozwiązaniem rekurencji (3) $\overset{(3.7)}{\Longrightarrow}$ istnieją $A_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i \in [0, l]$, $j \in [0, k_l - 1]$, takie, że $a(n) := \sum_{i\in[0,l]} \sum_{j\in[0,k_i-1]} A_{i,j} \cdot n^j \cdot \lambda_i^n$.

Pierwiastkami wielomianu F są λ_0, λ_1, ..., λ_l, a ich krotności to $k = k_0 - m - 1$, k_1, ..., k_l, odpowiednio $\overset{(3.7)}{\Longrightarrow}$ jeśli $a'(n) := \sum_{j\in[0,k_0-m-2]} A_{0,j} \cdot n^j + \sum_{i\in[1,l]} \sum_{j\in[0,k_l-1]} A_{i,j} \cdot n^j \cdot \lambda_i^n$, to a' jest rozwiązaniem rekurencji jednorodnej stowarzyszonej z rekurencją (2).

(3.6)(3) $\Longrightarrow$ $a - a'$ jest rozwiązaniem rekurencji (2).

Mamy $(a - a')(n) = \sum_{j\in[k,k+m]} A_{0,j} \cdot n^j = n^k \cdot \sum_{j\in[0,m]} A_{0,k+j} \cdot n^j$. □

Przykład

Definiujemy ciąg s wzorem $s(n) := \sum_{k\in[1,n]} k^3$.

Ciąg s jest rozwiązaniem rekurencji

$$X_{n+1} - X_n = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Wielomianem charakterystycznym tej rekurencji jest $T - 1$, którego jedynym pierwiastkiem (jednokrotnym) jest 1.

(3.8) $\implies$ istnieją $\mu_0', \mu_1', \mu_2', \mu_3' \in \mathbb{C}$ takie, że

$$s'(n+1) - s'(n) = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1, \tag{2}$$

gdzie $s'(n) := n \cdot (\mu_3' \cdot n^3 + \mu_2' \cdot n^2 + \mu_1' \cdot n + \mu_0')$.

Podstawiając do (2) i porównując współczynniki przy poszczególnych potęgach liczby n, otrzymujemy układ równań

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 4 \cdot \mu_3' & = & 1 \\ & & & & 3 \cdot \mu_2' & + & 6 \cdot \mu_3' & = & 3 \\ & & 2 \cdot \mu_1' & + & 3 \cdot \mu_2' & + & 4 \cdot \mu_3' & = & 3 \\ \mu_0' & + & \mu_1' & + & \mu_2' & + & \mu_3' & = & 1 \end{array}\right. ,$$

którego rozwiązaniem są liczby $\mu_0' = 0$, $\mu_1' = \frac{1}{4}$, $\mu_2' = \frac{1}{2}$, $\mu_3' = \frac{1}{4}$.

(3.7) $\implies$ istnieje $\mu \in \mathbb{C}$ taka, że $s(n) = \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2 + \mu$.

Podstawiając $n = 0$, otrzymujemy $\mu = 0$.

Ostatecznie

$$s(n) = \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}.$$

Twierdzenie 3.9

Niech $\mathcal{A}$ będzie funkcją tworzącą ciągu a.
Jeśli

$$\mathcal{A} = \frac{F}{\sum_{i \in [0,r]} u_i \cdot T^{r-i}}$$

dla $u_0, \ldots, u_r \in \mathbb{C}$ takich, że $u_0 \neq 0$ i $u_r = 1$, oraz $F \in \mathbb{C}[T]$ takiego, że $\deg F < r$, to ciąg a jest rozwiązaniem rekurencji

$$X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dowód

Zauważmy, że powyższa równość oznacza, że

$$\Big(\sum_{i \in [0,r]} u_i \cdot T^{r-i} \Big) \cdot \mathcal{A} = F,$$

zatem

$$0 = [T^{n+r}]F = [T^{n+r}]\Big(\Big(\sum_{i \in [0,r]} u_i \cdot T^{r-i} \Big) \cdot \mathcal{A} \Big) = \sum_{i \in [0,r]} u_i \cdot a(n+i)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, co kończy dowód. □

Przykład

Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $a(n)$ oznacza liczbę ciągów binarnych długości n, w których występuje parzysta liczba jedynek oraz każde dwie jedynki rozdzielone są co najmniej jednym zerem.

Niech $n \in \mathbb{N}_+$.

Zauważmy, że ciągów długości n spełniających powyższy warunek zaczynających się od 0 jest $a(n-1)$.

Z drugiej strony, jeśli mamy ciąg x długości n spełniający powyższe warunki taki, że $x(1) = 1$, to definiujemy k_x wzorem $k_x := \min\{i \in [2, n] : x(i) = 1\}$.

Zauważmy, że $k_x \in [3, n]$.

Dla ustalonego $k \in [3, n-1]$ ciągów x, dla których $k_x = k$, jest $a(n-k-1)$.

Ponadto, jeśli $n \geq 3$, to mamy dokładnie jeden ciąg x, dla którego $k_x = n$ ($x = (1, 0, \ldots, 0, 1)$).

Otrzymujemy zatem, że

$$a(n) = \begin{cases} a(n-1) & \text{jeśli } n = 1, 2, \\ a(n-1) + \sum_{k \in [3, n-1]} a(n-k-1) + 1 & \text{jeśli } n \geq 3. \end{cases}$$

Zauważmy też, że $a(0) = 1$.

Przykład (c.d.)

Mamy $a(0) = 1$ i

$$a(n) = \begin{cases} a(n-1) & \text{jeśli } n = 1, 2, \\ a(n-1) + \sum_{k \in [3, n-1]} a(n-k-1) + 1 & \text{jeśli } n \geq 3. \end{cases}$$

Z powyższej równości wynika, że

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \textstyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a(n) \cdot T^n \\ &= 1 + \textstyle\sum_{n \geq 1} a(n-1) \cdot T^{n-1} \cdot T \\ &\quad + \textstyle\sum_{n \geq 3} \sum_{k \in [3, n-1]} a(n-k-1) \cdot T^{n-k-1} \cdot T^{k+1} + \sum_{n \geq 3} T^n \\ &= 1 + T \cdot \mathcal{A} + \textstyle\sum_{k \geq 3} \sum_{n \geq k+1} a(n-k-1) \cdot T^{n-k-1} \cdot T^{k+1} + \frac{T^3}{1-T} \\ &= 1 + T \cdot \mathcal{A} + \textstyle\sum_{k \geq 3} \sum_{n \in \mathbb{N}} a(n) \cdot T^n \cdot T^{k+1} + \frac{T^3}{1-T} \\ &= 1 + T \cdot \mathcal{A} + \textstyle\sum_{k \geq 3} \mathcal{A} \cdot T^{k+1} + \frac{T^3}{1-T} = 1 + T \cdot \mathcal{A} + \frac{T^4}{1-T} \cdot \mathcal{A} + \frac{T^3}{1-T}, \end{aligned}$$

skąd

$$\mathcal{A} = \frac{1 - T + T^3}{1 - 2 \cdot T + T^2 - T^4},$$

a więc ciąg a jest rozwiązaniem rekurencji

$$X_{n+4} - 2 \cdot X_{n+3} + X_{n+2} - X_n = 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $a(0) = a(1) = a(2) = 1$ oraz $a(3) = 2$.

Liczby Catalana

Drzewem binarnym o n wierzchołkach nazywamy drzewo puste $\varnothing$, gdy $n = 0$, oraz parę (L, R) drzew binarnych o j i $(n-1)-j$ wierzchołkach dla pewnej liczby $j \in [0, n-1]$, gdy $n > 0$.

Niech $c(n)$ oznacza liczbę drzew binarnych o n wierzchołkach.

Zauważmy, że $c(0) = 1$ oraz

$$c(n) = \sum_{j \in [0, n-1]} c(j) \cdot c(n-1-j)$$

dla $n > 0$.

Niech $\mathcal{C}$ będzie funkcją tworzącą ciągu c.

Wtedy

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \textstyle\sum_{n \in \mathbb{N}} c(n) \cdot T^n \\ &= 1 + \textstyle\sum_{n \geq 1} \sum_{j \in [0, n-1]} c(j) \cdot T^j \cdot c(n-1-j) \cdot T^{n-1-j} \cdot T \\ &= 1 + T \cdot \textstyle\sum_{j \in \mathbb{N}} c(j) \cdot T^j \cdot \sum_{n \geq j+1} c(n-(j+1)) \cdot T^{n-(j+1)} \\ &= 1 + T \cdot \textstyle\sum_{j \in \mathbb{N}} c(j) \cdot T^j \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} c(n) \cdot T^n = 1 + T \cdot \mathcal{C}^2,\end{aligned}$$

skąd

$$T \cdot \mathcal{C} = \tfrac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot T}}{2} \qquad \text{lub} \qquad T \cdot \mathcal{C} = \tfrac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot T}}{2}.$$

Przypomnienie

(3.5): $\sqrt[k]{1+T} = \mathcal{A}_{1/k} = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}_+} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\prod_{i\in[1,n-1]}(i\cdot k-1)}{k^n\cdot n!} \cdot T^n$.

Liczby Catalana (c.d.)

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4\cdot T} &= 1 - \textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{\prod_{i\in[1,n-1]}(2\cdot i-1)}{2^n\cdot n!} \cdot 4^n \cdot T^n\\ &= 1 - \textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n} \cdot \frac{\prod_{i\in[1,n-1]}(2\cdot i-1)\cdot(n-1)!\cdot 2^{n-1}}{(n-1)!\cdot(n-1)!} \cdot T^n\\ &= 1 - \textstyle\sum_{n\in\geq 1} \frac{2}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \cdot T^n.\end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{1-\sqrt{1-4\cdot T}}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \cdot T^n \quad \text{i} \quad \frac{1+\sqrt{1-4\cdot T}}{2} = 1 - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \cdot T^n,$$

zatem

$$\mathcal{C} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \cdot T^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot T^n,$$

a więc $c(n) = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$.