Matematyka Dyskretna

Wykład XII

Grzegorz Bobiński (UMK)

6 Elementy teorii grafów

6.1 Podstawowe definicje

Oznaczenie

Jeśli V jest zbiorem, to

$$\mathcal{P}_2(V) := C_{V,2} = \{e \subseteq V : |e| = 2\}.$$

Definicja

Grafem nazywamy parę $G = (V_G, E_G)$, gdzie

- V_G jest skończonym zbiorem (który nazywamy zbiorem wierzchołków, a jego elementy wierzchołkami) oraz
- $E_G \subseteq \mathcal{P}_2(V_G)$ (elementy zbioru E_G nazywamy krawędziami, a zbiór E_G zbiorem krawędzi).

Jeśli $e \in E_G$ i $e = \{x, y\}$, to mówimy, że krawędź e łączy wierzchołki x i y, a wierzchołek x jest incydentny z krawędzią e, oraz nazywamy wierzchołek y sąsiadem wierzchołka x.

Graf o pustym zbiorze wierzchołków (a więc także o pustym zbiorze krawędzi) nazywamy grafem pustym.

Uwaga

Powyższa definicja jest definicją skończonego grafu nieskierowanego bez pętli i krawędzi wielokrotnych.

Uwaga

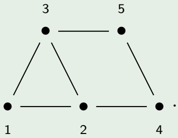
Grafy zwykle przedstawiamy w postaci graficznej: wierzchołki reprezentowane są przez punkty, natomiast krawędzie przez łuki, przy czym łuk odpowiadający krawędzi $\{x, y\}$ łączy punkty odpowiadające wierzchołkom x i y.

Przykład

Jeśli

$$V_G = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \text{i} \qquad E_G = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\},$$

to graf G możemy przedstawić za pomocą następującego rysunku:



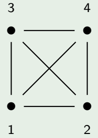
Definicja

Niepusty graf G nazywamy planarnym, jeśli można go przedstawić na płaszczyźnie w ten sposób, aby łuki odpowiadające krawędziom nie przecinały się (z wyjątkiem wierzchołków będących wspólnymi końcami danych krawędzi).

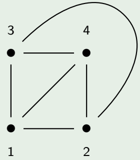
Przykład

Graf z poprzedniego przykłady jest planarny.

Również graf



jest planarny, gdyż można go narysować następująco:

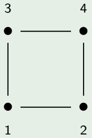


Definicja

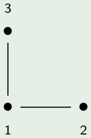
Graf H nazywamy podgrafem grafu G (i piszemy $H \leq G$), jeśli $V_H \subseteq V_G$ oraz $E_H \subseteq E_G$.
Jeśli dodatkowo $E_H := \mathcal{P}_2(V_H) \cap E_G$, to graf H nazywamy podgrafem indukowanym przez zbiór V_H i piszemy $H = \langle V_H \rangle_G$.

Przykład

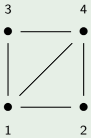
Grafy



i



są podgrafami grafu



,

ale tylko drugi z tych grafów jest podgrafem indukowanym.

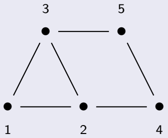
Definicja

Jeśli x jest wierzchołkiem grafu G, to **stopniem** $\deg_G x$ wierzchołka x w grafie G nazywamy liczbę krawędzi indcydentnych z wierzchołkiem x (równoważnie, liczbę sąsiadów wierzchołka x), tzn.

$$\deg_G x := \#\{e \in E_G : x \in e\} = \#\{y \in V_G : \{x, y\} \in E_G\}.$$

Przykład

Jeśli G jest grafem



,

to

$$\deg_G 1 = 2,\ \deg_G 2 = 3,\ \deg_G 3 = 3,\ \deg_G 4 = 2,\ \deg_G 5 = 2.$$

Stwierdzenie 6.1

Jeśli G jest grafem, to $\sum_{x \in V_G} \deg_G x = 2 \cdot |E_G|$.

Dowód

Obie strony równości są liczbą par $(x, y) \in V_G^2$ takich, że $\{x, y\}$ jest krawędzią w grafie G. $\square$

Definicja

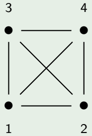
Graf G nazywamy spójnym, jeśli nie istnieją podzbiory $U, W \subseteq V_G$ takie, że:

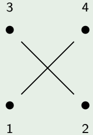
- $U \neq \varnothing \neq W$ oraz U i W tworzą podział zbioru V_G (tzn. $V_G = U \cup W$, $U \cap W = \varnothing$),
- $E_G \subseteq \mathcal{P}_2(U) \cup \mathcal{P}_2(W)$ (tzn. każda krawędź w grafie G łączy albo dwa wierzchołki ze zbioru U albo dwa wierzchołki ze zbioru W).

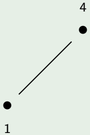
Maksymalne podgrafy spójne grafu G nazywamy składowymi (spójności) grafu G.

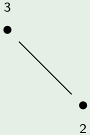
Innymi słowy, podgraf H grafu G jest składową grafu G, jeśli graf H jest spójny G oraz jeśli H' jest podgrafem spójnym grafu takim, że $H \leq H'$ (tzn. $V_H \subseteq V_{H'}$ oraz $E_H \subseteq E_{H'}$), to $H' = H$ (tzn. $V_{H'} = V_H$ oraz $E_{H'} = E_H$).

Przykład

Graf pusty jest grafem spójnym. Podobnie, graf 

jest spójny. Przykładem grafu niespójnego jest graf 

, którego składowymi są grafy 

i 

.

Uwaga

Jeśli x jest wierzchołkiem grafu G, to graf $\langle \{x\} \rangle_G$ jest spójny.
Stąd wynika, że każdy wierzchołek grafu G należy do pewnej składowej grafu G.
Ponadto, jeśli H' i H'' są składowymi grafu G, to albo $H' = H''$ albo $V_{H'} \cap V_{H''} = \varnothing$.

Dowód

Pierwsze dwie części są oczywiste.

Załóżmy, że $x \in V_{H'} \cap V_{H''}$.

Jeśli pokażemy, że graf $H := (V_{H'} \cup V_{H''}, E_{H'} \cup E_{H''})$ jest spójny, to z maksymalności grafów H' i H'' otrzymamy, że $H' = H = H''$.

Przypuśćmy zatem, że istnieje podział zbioru $V_{H'} \cup V_{H''}$ na zbiory U i W takie, że $E_{H'} \cup E_{H''} \subseteq \mathcal{P}_2(U) \cup \mathcal{P}_2(W)$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $x \in U$.

Wtedy ze spójności grafów H' i H'' wynika, że $V_{H'} \subseteq U$ i $V_{H''} \subseteq U$, więc $W = \varnothing$. □

Oznaczenie

Jeśli G jest grafem i x wierzchołkiem grafu G, to przez $G - x$ oznaczamy graf

$$(V_G \setminus \{x\}, E_G \setminus \{e : x \in e\})$$

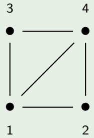
(tzn. graf $G - x$ jest otrzymany z grafu G przez usunięcie wierzchołka x oraz wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem x).

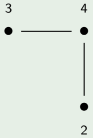
Podobnie, jeśli e jest krawędzią grafu G, to przez $G - e$ oznaczamy graf

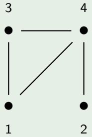
$$(V_G, E_G \setminus \{e\})$$

(tzn. graf $G - e$ jest otrzymany z grafu G przez usunięcie krawędzi e).

Przykład

Jeśli G jest grafem 

, $x := 1$ i $e := \{1, 2\}$, to $G - x$ i $G - e$ są grafami 

i 

, odpowiednio.

Uwaga

Zauważmy, że jeśli x jest wierzchołkiem grafu G i $H := G - x$, to

$$|V_H| = |V_G| - 1 \qquad \text{i} \qquad |E_H| = |E_G| - \deg_G x.$$

Podobnie, jeśli e jest krawędzią grafu G i $H := G - e$, to

$$|V_H| = |V_G| \qquad \text{i} \qquad |E_H| = |E_G| - 1.$$

Lemat 6.2

Jeśli x jest wierzchołkiem graf spójnego G i $\deg_G x = 1$, to graf $G - x$ jest spójny.

Dowód

Niech $H := G - x$.

Gdyby istniał podział zbioru $V_H := V_G \setminus \{x\}$ na niepuste zbioru U i W takie, że $E_H \subseteq \mathcal{P}_2(U) \cup \mathcal{P}_2(W)$, to bez straty ogólności moglibyśmy założyć, że jeśli $\{x, y\} \in E_G$, to $y \in U$.

Wtedy zbiory $U \cup \{x\}$ i W tworzyłyby podział zbioru V_G taki, że $E_G \subseteq \mathcal{P}_2(U \cup \{x\}) \cup \mathcal{P}_2(W)$, co byłoby sprzeczne z założeniem spójności grafu G. $\square$

Stwierdzenie 6.3

Jeśli graf G jest spójny, to $|E_G| \geq |V_G| - 1$.

Dowód

Dowód będzie indukcyjny ze względu $|V_G|$.

Oczywiście teza jest prawdziwa, gdy graf G jest pusty.

0°. Załóżmy najpierw, że istnieje wierzchołek x grafu G taki, że $\deg_G x = 0$.

Ze spójności grafu G wynika, że wtedy $V_G = \{x\}$ (w przeciwnym wypadku mamy podział na zbiory $\{x\}$ i $V_G \setminus \{x\}$).

Stąd $|E_G| \geq 0 = 1 - 1 = |V_G| - 1$.

1°. Załóżmy teraz, że istnieje wierzchołek x grafu G taki, że $\deg_G x = 1$.

Jeśli $H = G - x$, to graf H jest spójny na mocy Lematu 6.2.

Ponieważ $|V_H| = |V_G| - 1 < |V_G|$, więc, korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy, że $|E_H| \geq |V_H| - 1$.

Ponieważ $|E_H| = |E_G| - 1$, więc ostatecznie $|E_G| = |E_H| + 1 \geq |V_H| = |V_G| - 1$.

2°. Na zakończenie załóżmy, że $\deg_G x \geq 2$ dla każdego wierzchołka x grafu G.

Wtedy Stwierdzenie 6.1 implikuje, że $2 \cdot |E_G| \geq 2 \cdot |V_G|$, co kończy dowód. □

Stwierdzenie 6.3

Jeśli graf G jest spójny, to $|E_G| \geq |V_G| - 1$.

Definicja

Graf spójny G nazywamy drzewem, jeśli $|E_G| = |V_G| - 1$.

Definicja

Drogą w grafie G nazywamy każdy ciąg $(x_0, \dots, x_n)$ wierzchołków grafu G taki, że $\{x_{i-1}, x_i\} \in E_G$ dla każdego $i \in [1, n]$.

W powyższej sytuacji mówimy, że droga łączy wierzchołki x_0 i x_n.

Jeśli dodatkowo $x_0 = x_n$, $n > 2$, oraz $x_i \neq x_j$ dla wszystkich $i, j \in [1, n]$ takich, że $i \neq j$, to drogę nazywamy cyklem.

Stwierdzenie 6.4

Graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wierzchołków x i y grafu G istnieje droga łącząca wierzchołki x i y.

W szczególności, wierzchołki x i y grafu G należą do tej samej składowej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje droga łącząca te wierzchołki.

Stwierdzenie 6.4

Graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wierzchołków x i y grafu G istnieje droga łącząca wierzchołki x i y.

W szczególności, wierzchołki x i y grafu G należą do tej samej składowej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje droga łącząca te wierzchołki.

Dowód

I. $\Rightarrow$.

Przypuśćmy, że graf G jest spójny i ustalmy wierzchołek x grafu G.

Oznaczmy przez U zbiór wszystkich wierzchołków grafu G, do których istnieje droga z wierzchołka x.

Musimy pokazać, że $U = V_G$.

Zauważmy, że zbiory U i $W := V_G \setminus U$ tworzą podział zbioru V_G.

Ponadto, $E_G \subseteq \mathcal{P}_2(U) \cup \mathcal{P}_2(W)$.

Istotnie, jeśli $\{y, z\} \in E_G$ i $y \in U$, to ponieważ istnieje droga z x do y, to istnieje również droga z x do z, więc $z \in U$.

Ze spójności grafu G wynika zatem, że albo $U = \varnothing$ albo $W = \varnothing$.

Ponieważ $x \in U$, więc $W = \varnothing$, skąd $U = V_G \setminus W = V_G$.

$\Leftarrow$:

Załóżmy, że graf G nie jest spójny.

Wtedy istnieje podział zbioru V_G na niepuste podzbiory U i W takie, że $E_G \subseteq \mathcal{P}_2(U) \cup \mathcal{P}_2(W)$.

Stąd natychmiast wynika, że jeśli $x \in U$ i $y \in W$, to nie istnieje droga łącząca x z y.

Istotnie, gdyby ciąg $(x = x_0, \ldots, x_n = y)$ był taką drogą, to istniałoby $i \in [1, n]$ takie, że $x_{i-1} \in U$ oraz $x_i \in W$.

Wtedy $\{x_{i-1}, x_i\} \in E_G \setminus (\mathcal{P}_2(U) \cup \mathcal{P}_2(W))$, sprzeczność.

Stwierdzenie 6.4

Graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wierzchołków x i y grafu G istnieje droga łącząca wierzchołki x i y.

W szczególności, wierzchołki x i y grafu G należą do tej samej składowej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje droga łącząca te wierzchołki.

Dowód (c.d.)

II. $\Rightarrow$:

Załóżmy, że wierzchołki x i y należą do tej samej składowej H grafu G.

Ponieważ graf H jest spójny, więc z części pierwszej wynika natychmiast, że istnieje droga w grafie H, a więc również w grafie G, łącząca wierzchołki x i y.

$\Leftarrow$:

Przypuśćmy, że istnieje droga $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ łącząca wierzchołki x i y.

Niech $H := (\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \{\{x_0, x_1\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}\})$.

Wtedy H jest spójnym podgrafem grafu G zawierającym wierzchołki x i y (spójność można łatwo pokazać, korzystając z części pierwszej).

Zatem istnieje składowa grafu G zawierająca graf H, a więc również wierzchołki x i y. $\square$

Lemat 6.5

Jeśli $(x_0, \dots, x_n)$ jest cyklem w spójnym grafie G, to graf $G - \{x_0, x_1\}$ jest spójny.

Dowód

Na mocy Stwierdzenia 6.4 wystarczy pokazać, że dla dowolnych dwóch wierzchołków x i y grafu G istnieje droga w grafie $G - \{x_0, x_1\}$ łącząca wierzchołki x i y.

Ustalmy zatem wierzchołki x i y.

Wtedy istnieje droga w grafie G łącząca wierzchołki x i y.

Zastępując w tej drodze wszystkie podciągi (x_0, x_1) i (x_1, x_0) ciągami $(x_n, \dots, x_1)$ oraz $(x_1, \dots, x_n)$, odpowiednio, otrzymujemy drogę w grafie $G - \{x_0, x_1\}$ łączącą wierzchołki x i y. $\square$

Stwierdzenie 6.6

Niepusty graf spójny G jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G nie ma cyklu.

Dowód

$\Leftarrow$:

Załóżmy, że graf G nie jest drzewem, tzn. $|E_G| \geq |V_G|$.

Przez indukcję na $|V_G|$ udowodnimy, że w grafie G jest cykl.

Ponieważ graf G nie jest drzewem, więc $|V_G| > 1$.

Wtedy ze spójności grafu G wynika, że $\deg_G x > 0$ dla każdego wierzchołka x grafu G.

1°. Załóżmy, że istnieje wierzchołek x grafu G taki, że $\deg_G x = 1$.

Jeśli $H = G - x$, to graf H jest spójny na mocy Lematu 6.2.

Ponadto graf H jest też niepusty.

Mamy $|V_H| = |V_G| - 1$ oraz $|E_H| = |E_G| - \deg_G x = |E_G| - 1$.

W szczególności $|E_H| \geq |V_H|$, więc graf H nie jest drzewem

Korzystając z założenia indukcyjnego, wiemy, że w grafie H (a więc także w grafie G) istnieje cykl.

2°. Załóżmy, że $\deg_G x \geq 2$ dla każdego wierzchołka x grafu G.

Ponieważ graf G jest niepusty, więc możemy zdefiniować indukcyjnie ciąg $(x_0, x_1, \ldots)$ wierzchołków grafu G taki, że, dla każdego $i \in \mathbb{N}_+$, $\{x_{i-1}, x_i\}$ jest krawędzią w grafie G oraz $x_{i-1} \neq x_{i+1}$.

Ponieważ zbiór V_G jest skończony, więc istnieją $m, n \in \mathbb{N}$ takie, że $m < n$ oraz ciąg $(x_m, \ldots, x_n)$ jest cyklem.

$\Rightarrow$:

Załóżmy, że w grafie G jest cykl $(x_0, \ldots, x_n)$.

Z Lematu 6.5 wiemy, że graf $H := G - \{x_0, x_1\}$ jest spójny (i oczywiście niepusty), zatem $|E_H| \geq |V_H| - 1$ na mocy Stwierdzenia 6.3.

Ponieważ $|E_H| = |E_G| - 1$ oraz $|V_H| = |V_G|$, więc $|E_G| \geq |V_G|$, zatem graf G nie jest drzewem. $\square$