Matematyka dyskretna
Zestaw 1
Największy wspólny dzielnik

---

1. Policzyć $\gcd(a, b)$ oraz znaleźć liczby całkowite k i l takie, że

$$\gcd(a, b) = k \cdot a + l \cdot b.$$

(1) $a = 21$, $b = 55$.
(2) $a = 15$, $b = 303$.
(3) $a = 303$, $b = 159$.
(4) $a = 77$, $b = 371$.
(5) $a = 183$, $b = 305$.

2. Udowodnić, że jeśli a, b i c są liczbami całkowitymi takimi, że $b \mid a-c$, to $\gcd(a, b) = \gcd(b, c)$.

3. Udowodnić, że $\gcd(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot \gcd(a, b)$ dla dowolnej liczby naturalnej m oraz dowolnych liczb całkowitych a i b.

4. Udowodnić, że $\gcd(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\gcd(a,b)} - 1$ dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej $n \in \mathbb{N}$ oraz dowolnych liczb naturalnych a i b.

5. Dla liczby naturalnej n definiujemy liczbę F_n wzorem $F_n := 2^{2^n} + 1$.
(1) Udowodnić, że $F_n = \prod_{i \in [0,n-1]} F_i + 2$ dla każdej liczby naturalnej n.
(2) Udowodnić, że $\gcd(F_n, F_m) = 1$ dla dowolnych liczb naturalnych n i m takich, że $n \neq m$.

6. Dla liczb naturalnych a i b definiujmy liczbę $s(a, b)$ wzorem

$$s(a, b) := \begin{cases} 0 & a = 0, \\ s(b \bmod a, a) + 1 & a \neq 0. \end{cases}$$

Innymi słowy, liczba $s(a, b)$ jest ilością kroków w algorytmie Euklidesa dla pary (a, b).

Udowodnić, że jeśli a i b są liczbami naturalnymi takimi, że $a + b > 0$ i $a \leq b$, to

$$s(a, b) \leq 2 \cdot \log_2(a + b).$$