Matematyka dyskretna
Zestaw 9
Rekurencja II

---

1. Znaleźć funkcje generujące ciągów z zadań 1 i 2 w zestawie 8.

2. Znaleźć funkcję generującą, prostszą rekurencję i wzór jawny ciągu (a_n) spełniającego warunek.

(a) $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + 1$, $n \geq 0$;

(b) $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)a_i + 1$, $n \geq 0$;

(c) $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1} a_i + 1$, $n \geq 0$;

3. Niech s_n oznacza ilość ciągów binarnych długości n, które nie zawierają trzech jedynek na sąsiednich miejscach. Znaleźć wzór rekurencyjny dla ciągu (s_n) i wzór zwarty dla szeregu generującego $\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$.

4. Niech s_n oznacza ilość ciągów binarnych długości n, które zawierają parzystą liczbę jedynek i każde dwie jedynki rozdzielone są przynajmniej jednym zerem. Znaleźć wzór rekurencyjny dla ciągu (s_n) i wzór zwarty szeregu generującego $\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$. Policzyć wartość s_{10}.

5. Niech s_n oznacza ilość ciągów binarnych długości n, które zawierają podciąg 01. Znaleźć wzór rekurencyjny dla ciągu (s_n) i wzór zwarty dla szeregu generującego $\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$.

6. Niech s_n oznacza ilość ciągów binarnych długości n, które zawierają podzielną przez 4 liczbę jedynek. Znaleźć wzór rekurencyjny dla ciągu (s_n) i wzór zwarty dla szeregu generującego $\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$.

7. Znaleźć ilość rozwiązań równania

$$x_1 + 2x_2 + 4x_4 = n, \; n \geq 0,$$

w liczbach całkowitych dodatnich.

8. Niech s_n oznacza liczbę ciągów $(x_1, \ldots, x_k)$ takich, że $x_i \in \{1, \ldots, n\}$ i $x_{i+1} \geq 2x_i$. Udowodnić, że $s_n = s_{n-1} + s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Pokazać, że funkcja generująca $S(t)$ tego ciągu spełnia równanie $(1-t)S(t) = (1+t)S(t^2)$.

9. Niech a_n oznacza ilość sposobów na jaki możemy otrzymać sumę n oczek przy wielokrotnym rzucie kostką. Wyznaczyć funkcję generującą ciągu (a_n).

10. Niech u_n oznacza ilość tych najkrótszych dróg o początku w punkcie $(0,0)$ i końcu w punkcie (n,n) biegnących po liniach łączących punkty kratowe, które znajdują się nad prostą $y=x$. Podobnie niech v_n oznacza ilość tych z powyższych dróg, które nie mają punktów wspólnych z prostą $y=x$ różnych od $(0,0)$ i (n,n). Udowodnić, że $v_n = u_{n-1}$ i $u_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.