Wyniki konferencji ICRA 9 w Pekinie

na podstawie referatu Witolda Kraśkiewicza

10 października 2000

Referat oparty jest na wystąpieniu Harma Derksena zatytułowanym „On the σ-stable decompositions of dimension vectors".

1 Pierścień półniezmienników

Niech K będzie ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym i $Q = (Q_0, Q_1)$ kołczanem. Dla wektora wymiaru $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ rozważamy rozmaitość afiniczną $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d}) := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(K^{\mathbf{d}_{s(\alpha)}}, K^{\mathbf{d}_{t(\alpha)}})$ reprezentacji kołczanu Q o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$. Grupy $\mathrm{GL}(\mathbf{d}) := \prod_{x \in Q_0} \mathrm{GL}(\mathbf{d}_x)$ i $\mathrm{SL}(\mathbf{d}) := \prod_{x \in Q_0} \mathrm{SL}(\mathbf{d}_x)$ działają na $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ przez sprzężenia. Definiujemy pierścień półniezmienników $\mathrm{SI}(Q, \mathbf{d}) := K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{\mathrm{SL}(\mathbf{d})}$.

Niech V i W będą dwoma reprezentacjami kołczanu. Załóżmy przy tym, że $\langle \mathbf{dim}\, V, \mathbf{dim}\, W \rangle_Q = 0$, gdzie $\langle -, - \rangle_Q$ jest formą Eulera. W tym przypadku przestrzenie $\bigoplus_{x \in Q_0} \mathrm{Hom}_K(V_x, W_x)$ i $\mathrm{Hom}_K(V_{s(\alpha)}, W_{t(\alpha)})$ są tego samego wymiaru i przez $c(V, W)$ oznaczać będziemy wyznacznik odwzorowania $\bigoplus_{x \in Q_0} \mathrm{Hom}_K(V_x, W_x) \to \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}_K(V_{s(\alpha)}, W_{t(\alpha)})$ danego wzorem $(f_x) \mapsto (f_{t(\alpha)} V_\alpha - W_\alpha f_{s(\alpha)})$. Można pokazać, że przestrzeń $\mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})$ jest rozpięta przez $c(V, -)$, gdzie $\langle \mathbf{dim}\, V, \mathbf{d} \rangle_Q = 0$.

Wiadomo, że $\mathrm{SI}(Q, \mathbf{d}) = \bigoplus_{\sigma : \mathrm{GL}(\mathbf{d}) \to K} \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\sigma$. Niech $\Sigma(Q, \mathbf{d}) = \{\sigma : \mathrm{GL}(\mathbf{d}) \to K \mid \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\sigma \neq 0\}$.

Twierdzenie. *Półgrupa $\Sigma(Q, \mathbf{d})$ jest nasycona, tzn. jeśli $n\sigma \in \Sigma(Q, \mathbf{d})$ dla pewnego $n \geq 1$, to $\sigma \in \Sigma(Q, \mathbf{d})$.*

Istnieje hipoteza, że jeśli $\dim_K \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_\sigma = 1$, to pierścień $\bigoplus_n \mathrm{SI}(Q, \mathbf{d})_{n\sigma}$ jest generowany w stopniu 1.

2 Rozkłady generyczne

Niech V będzie reprezentacją o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$ i minimalnym wymiarze pierścienia endomorfizmów. Derksen z Weymanem przedstawili kombinatoryczny algorytm pozwalający wyliczyć wektory wymiaru nierozkładalnych składników prostych reprezentacji V, które to przedstawienie nazywamy rozkładem generycznym wektora $\mathbf{d}$.

W szczególności pokazali, że rozkład $\mathbf{d} = \sum r_i \mathbf{d}_i$, $r_i \geq 0$, jest rozkładem generycznym wektora $\mathbf{d}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

- $\mathbf{d}_i$ jest pierwiastkiem Schura;
- jeśli $i < j$, to $\mathrm{Hom}_Q(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j) = 0 = \mathrm{Ext}_Q(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j)$ oraz $\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \geq 0$;
- jeśli $\mathbf{d}_i$ jest pierwiastkiem urojonym nieizotropowym, to $r_i = 1$.