Wyniki konferencji ICRA 9 w Pekinie

na podstawie referatu Justyny Kosakowskiej

10 października 2000

Referat oparty jest na wystąpieniu Michaela Barota zatytułowanym „Calculating Dynkin type of a non-negative unit form".

Niech $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ będzie całkowitą formą kwadratową postaci $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} q_{i,j} x_i x_j$. Forma q jest nieujemna, gdy $q(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}^n$. Dwie formy q_1 i q_2 są $\mathbb{Z}$-równoważne, gdy istnieje $\mathbb{Z}$-liniowe i $\mathbb{Z}$-odwracalne odwzorowanie $T : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ takie, że $q_1 = q_2 T$. Celem jest klasyfikacja całkowitych form kwadratowych z dokładnością do równoważności.

Motywacja tych badań jest następująca. Niech $A = KQ/I$ będzie algebrą dróg ograniczonego kołczanu. Jeśli algebra A jest trójkątna, to stowarzyszamy z nią formę Titsa $q_A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$. Wiadomo, że jeśli algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego, to forma q_A jest słabo dodatnia, tzn. $q_A(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{N}^n$, $x \neq 0$. Ponadto jeśli w kołczanie Auslandera–Reiten Γ_A algebry A istnieje składowa preprojektywna, to powyższa implikacja jest równoważnością. Podobnie, gdy A jest algebrą oswojonego typu reprezentacyjnego, to forma q_A jest słabo nieujemna.

Z formą $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ możemy stowarzyszyć bigraf Δ_q, którego wierzchołkami są liczby naturalne od 1 do n. W bigrafie Δ_q mamy $|q_{i,j}|$ krawędzi pierwszego rodzaju z i do j jeśli $q_{i,j} < 0$, zaś $q_{i,j}$ krawędzi drugiego rodzaju, gdy $q_{i,j} > 0$. W analogiczny sposób z każdym bigrafem Δ możemy związać formę kwadratową q_Δ. Formę q nazwiemy spójną, jeśli jej bigraf spójny.

Twierdzenie. *Jednorodna i spójna forma kwadratowa $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje diagram Dynkina Δ taki, że forma q jest $\mathbb{Z}$-równoważna z q_Δ.*

Koranga nieujemnej formy kwadratowej q będziemy nazywać rangę grupy $q^{-1}(0)$.

Twierdzenie (Barot, de la Peña)**.** *Niech $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ będzie spójną i nieujemną formą kwadratową. Wtedy istnieje $\mathbb{Z}$-liniowe i $\mathbb{Z}$-odwracalne odwzorowanie*

$T : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ *takie, że* $qT(x_1, \ldots, x_n) = q_\Delta(x_1, \ldots, x_{n-c})$, *gdzie* c *jest korangą formy* q *i* Δ *jest diagramem Dynkina jednoznaczne wyznaczonym przez* q, *zwanym typem Dynkina formy* q.

Wniosek. *Dwie spójne i nieujemne formy całkowite formy kwadratowe są* $\mathbb{Z}$*-równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same korangi i ten sam typ Dynkina.*