O pewnych związkach teorii modeli z teorią reprezentacji

na podstawie referatu Stanisława Kasjana

5 i 12 grudnia 2000 roku

§ 1. Elementy teorii modeli

Będziemy rozważać język $\mathbb{L}$ składający się z przeliczalnej ilości zmiennych, dwóch symboli działań $+$ i $\cdot$ oraz dwóch stałych 0 i 1. Modelem dla języka $\mathbb{L}$ będzie zbiór K wraz z dwoma działaniami dwuargumentowymi $+$ i $\cdot$ oraz dwoma wyróżnionymi elementami 0 i 1 zbioru K. Dla zdania bądź formuły φ w języku $\mathbb{L}$ będziemy pisać $K \vDash \varphi$, gdy φ jest spełnione w modelu K. Podobne oznaczenie stosować będziemy dla zbiorów zdań.

Niech $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ będą pewnymi klasami modeli dla języka $\mathbb{L}$. Powiemy, że klasa $\mathcal{C}$ jest aksjomatyzowalną podklasą $\mathcal{B}$, o ile istnieje zbiór zdań Σ taki, że model $K \in \mathcal{B}$ należy do $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K \vDash \Sigma$. Zbiór Σ nazywamy zbiorem aksjomatów klasy $\mathcal{C}$. Klasa $\mathcal{C}$ jest skończenie aksjomatyzowalną podklasą $\mathcal{B}$, o ile możemy wybrać skończony (równoważnie, jednoelementowy) zbiór aksjomatów.

Klasa wszystkich ciał jest skończenie aksjomatyzowalna. Klasa ciał algebraicznie domkniętych jest aksjomatyzowalna, ale nie jest skończenie aksjomatyzowalna. Ciała ustalonej dodatniej charakterystyki są skończenie aksjomatyzowalne, podczas gdy ciała charakterystyki 0 są aksjomatyzowalne, ale nie są skończenie aksjomatyzowalne.

Twierdzenie. *Niech $\mathcal{B}$ będzie klasą aksjomatyzowalną i $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.*

(1) *Klasa $\mathcal{C}$ jest skończenie aksjomatyzowalna w $\mathcal{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy klasy $\mathcal{C}$ i $\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ są aksjomatyzowalne.*

(2) *Jeśli klasa $\mathcal{C}$ jest skończenie aksjomatyzowalna i Σ jest zbiorem aksjomatów dla $\mathcal{C}$, to z Σ można wybrać skończony zbiór aksjomatów dla $\mathcal{C}$.*

Dowód. Udowodnimy pierwszy punkt. Implikacja $\Rightarrow$ jest oczywista. Pokażemy teraz implikację przeciwną. Niech $\mathrm{Th}(\mathcal{C})$ będzie teorią klasy $\mathcal{C}$, a więc zbiorem wszystkich zdań spełnionych w $\mathcal{C}$. Aksjomatyzowalność klasy $\mathcal{C}$ implikuje, że $K \models \mathrm{Th}(\mathcal{C})$ wtedy i tylko wtedy, gdy K należy do $\mathcal{C}$. Zauważmy, że teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{C}) \cup \mathrm{Th}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{C})$ nie ma modeli. Z twierdzenia Henkina o spełnialności wynika, że teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{C}) \cup \mathrm{Th}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{C})$ jest sprzeczna. Z twierdzenia o zwartości teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{C}) \cup \mathrm{Th}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{C})$ jest skończenie sprzeczna. Zatem istnieją zdania φ_1 w $\mathrm{Th}(\mathcal{C})$ i $\varphi_2 \in \mathrm{Th}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{C})$, które prowadzą do sprzeczności. Wtedy φ_1 jest aksjomatem dla $\mathcal{C}$ w $\mathcal{B}$. □

Powiemy, że dwa modele K i L są elementarnie równoważne, co zapisujemy $K \equiv L$, o ile $\mathrm{Th}(K) = \mathrm{Th}(L)$. Można pokazać, że jeśli K i L są dwoma ciałami algebraicznie domkniętymi tej samej charakterystyki, to są one elementarnie równoważnie.

Niech φ będzie formułą z n zmiennymi wolnymi. Jeśli K jest ciałem, to przez $V_K(\varphi)$ oznaczać będziemy te układy $a \in K^n$, dla których zdanie $\varphi(a)$ jest spełnione w K.

Twierdzenie (o eliminacji kwanytfikatorów, Tarski)**.** *Jeśli φ jest formułą z n zmiennymi wolnymi, to istnieją wielomiany $F_{i,j}$, G_i o współczynnikach całkowitych od n zmiennych takie, że dla każdego ciała algebraicznie domkniętego K $V_K(\varphi)$ jest zbiorem tych $a \in K^n$, dla których dla każdego i mamy $G_i(a) \neq 0$ oraz $F_{i,j}(a) = 0$ dla wszystkich j.* □

W powyższej sytuacji będziemy mówić, że zbiory $V_K(\varphi)$ tworzą konstruktywny $\mathbb{Z}$-schemat.

Lemat. *Ustalmy p będące liczbą pierwszą lub zerem. Przypuśćmy, że zbiory $V_K(\varphi)$ są domknięte dla dowolnego ciała algebraicznie domkniętego K charakterystyki p. Wtedy istnieją wielomiany $H_1, \ldots, H_s$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{F}_p$ takie, że $V_K(\varphi)$ jest zbiorem zer wielomianów $H_1, \ldots, H_s$ dla dowolnego ciała algebraicznie domkniętego charakterystyki p.*

Dowód. Niech L będzie algebraicznym domknięciem ciała $\mathbb{F}_p$. Wiemy, że zbiór $V_L(\varphi)$ jest zdefiniowany przez wielomiany $F_1, \ldots, F_m$ o współczynnikach w ciele L. Istnieje skończone rozszerzenie Galois N ciała $\mathbb{F}_p$ takie, że $F_1, \ldots, F_m$ mają współczynniki w N. Niech G będzie grupą Galois rozszerzenia $N/\mathbb{F}_p$. Zbiór $V_L(\varphi)$ jest niezmienniczy ze względu na działania automorfizmów ciała L na L^n. Stąd wielomiany F_i^σ, $\sigma \in G$, zerują się na $V_L(\varphi)$. Niech $s_1, \ldots, s_t$ będą elementarnymi funkcjami symetrycznymi od t zmiennych, gdzie $t := |G|$. Wtedy wielomiany $s_k(F_i^{\sigma_1}, \ldots, F_i^{\sigma_t})$, gdzie $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ są wszystkimi elementami grupy G, mają współczynniki w $\mathbb{F}_p$ i definiują zbiór $V_L(\varphi)$. Oznaczymy te wielomiany przez $H_1, \ldots, H_r$.

W ciele L zachodzi formuła $\varphi \leftrightarrow H_1 = \cdots = H_r = 0$. Ponieważ każde ciało algebraicznie domknięte charakterystyki p jest elementarnie równoważne z L, więc kończy to dowód. □

§ 2. Algebry nad ciałami

Niech d będzie ustaloną liczbą naturalną, zaś p ustaloną liczbą pierwszą lub zerem.

Przez $\mathcal{A}lg = \mathcal{A}lg(d)$ oznaczać będziemy klasę wszystkich algebr łącznych z 1 wymiaru d nad ciałem algebraicznie domkniętym. $\mathcal{A}lg^p$ oznaczać będzie podklasę algebr nad ciałami charakterystyki p. Posługiwać się będziemy językiem $\mathbb{A}$, w którym mamy dwie kopie języka $\mathbb{L}$ (opisujące odpowiednio strukturę bazowego ciała i strukturę pierścieniową algebry) i dodatkowy symbol $\cdot$ (odpowiedzialny za opis struktury przestrzeni liniowej algebry nad ciałem). Modelem dla języka $\mathbb{A}$ będzie para (K, R) modeli dla języka $\mathbb{L}$ wraz z funkcją $\cdot : K \times R \to R$.

Niech K będzie ciałem. Elementowi przestrzeni afinicznej K^{d^3} przyporządkujemy model $(K, R(\gamma))$, gdzie γ wyznacza stałe strukturalne mnożenia w K^d. Zbiór tych γ, dla których model $(K, R(\gamma))$ jest algebrą, będziemy oznaczać $\mathrm{alg}_K(d)$. Jest to rozmaitość afiniczna, o ile ciało K jest algebraicznie domknięte. Jeśli $\mathcal{C}$ jest podklasą klasy $\mathcal{A}lg$, to przez $\mathcal{C}_K$ oznaczymy zbiór tych $\gamma \in \mathrm{alg}_K(d)$, dla których $(K, R(\gamma))$ należy do $\mathcal{C}$.

Każdemu zdaniu w języku $\mathbb{A}$ możemy przyporządkować formułę ψ_φ od d^3 zmiennych wolnych w języku $\mathbb{L}$ taką, że $K \vDash \psi_\varphi(\gamma))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(K, R(\gamma)) \vDash \varphi$.

§ 3. Skończony typ reprezentacyjny

Oznaczmy przez $\mathcal{RF}$ klasę algebr skończonego typu reprezentacyjnego.

Twierdzenie (Jensen–Lenzing)**.** *Klasa $\mathcal{RF}$ jest skończenie aksjomatyzowalna w $\mathcal{A}lg$.*

Dowód. W języku $\mathbb{A}$ można wyrazić własność istnienia co najmniej t klas izomorfizmów nierozkładalnych n-wymiarowych R-modułów. Zdanie definiujące tę własność będziemy oznaczać przez $\varphi_{n,t}$. Można pokazać, że istnieje funkcja $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, ze jeśli $(K, R) \in \mathcal{A}lg$ oraz $(K, R) \vDash \varphi_{n,\beta(n)}$, to istnieje nieskończenie wiele nierozkładalnych n-wymiarowych R-modułów. Ponadto z drugiej hipotezy Brauera–Thralla wynika, że jeśli (K, R) nie jest skończonego typu reprezentacyjnego, to dla pewnego n istnieje nieskończenie wiele nierozkładalnych nieizomorficznych n-wymiarowych R-modułów . Stąd układ zdań $\neg\varphi_{n,\beta(n)}$ jest zbiorem aksjomatów dla klasy $\mathcal{RF}$. Z drugiej strony teoria Auslandera–Reiten dostarcza aksjomatów dla klasy algebr nieskończonego typu reprezentacyjnego. Stąd klasa algebr skończonego typu reprezentacyjnego jest skończenie aksjomatyzowalna. Można dla niej znaleźć aksjomat postaci $\neg\varphi_{1,\beta(1)} \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_{N,\beta(N)}$. □

Wniosek. *Zbiory $\mathcal{RF}_K$, $K = \overline{K}$, tworzą konstruktywny $\mathbb{Z}$-schemat.* $\square$

Twierdzenie (Gabriel)**.** *Zbiór $\mathcal{RF}_K$ jest otwarty w $\mathrm{alg}_K(d)$ dla każdego ciała algebraicznie domkniętego K.*

Dowód. Wiemy, że $V_K(\neg\varphi_{n,\beta(n)})$ jest zbiorem tych $\gamma \in K^d$, dla których algebra $(K, R(\gamma))$ ma skończenie wiele nierozkładalnych n-wymiarowych modułów. Gabriel pokazał, że zbiory $V_K(\neg\varphi_{n,\beta(n)})$ są otwarte. Wiemy jednak, że $\mathcal{RF}_K = \bigcap_{n=1}^{N} V_K(\neg\varphi_{n,\beta(n)})$, co kończy dowód. $\square$

Pojawia się naturalne pytanie, czy zbiory $\mathcal{RF}_K$ tworzą otwarty $\mathbb{Z}$-schemat, które pozostaje otwartym problemem. Można pokazać, że zbiory $\mathcal{RD}_K$ tworzą otwarty $\mathbb{Z}$-schemat w $\mathrm{alg}_K(d)$, gdzie $\mathcal{RD}$ oznacza klasę algebr skończonego typu reprezentacyjnego, których kołczan Auslandera–Reiten R się ze składowych preprojektywnych.

§ 4. Oswojony typ reprezentacyjny

Niech $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ będzie klasą d-wymiarowych algebr oswojonych. Podobnie $\mathcal{W} = \mathcal{W}(d)$ jest klasą d-wymiarowych algebr dzikich. Będziemy też pisać $\mathcal{T}^p$ ($\mathcal{W}^p$) dla oznaczenia algebr oswojonych (odpowiednio dzikich) nad ciałami charakterystyki p.

Twierdzenie (Drozd)**.** *Mamy $\mathcal{T} \cup \mathcal{W} = \mathcal{A}lg$ i $\mathcal{T} \cap \mathcal{W} = \emptyset$.* $\square$

Niech $\psi_{n,t}$ będzie następującym zdaniem: „istnieje $K\langle X, Y\rangle$-R-bimoduł wolny rangi n nad $K\langle X, Y\rangle$, który można zadać przy pomocy wielomianów stopnia nie większego od t i taki, że dla dowolnych n-wymiarowych $K\langle X, Y\rangle$-modułów U i V, jeśli $U \otimes_{K\langle X,Y\rangle} M \simeq V \otimes_{K\langle X,Y\rangle} M$, to $U \simeq V$”. Można pokazać, że $(K, R) \vDash \psi_{n,t}$ dla pewnych n i t naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy $(K, R) \in \mathcal{W}$. Ponadto, jeśli $W_K(n, t) = \{\gamma \in \mathrm{alg}_K(d) \mid (K, R(\gamma)) \vDash \psi_{n,t}\}$, to $\overline{W_K(n, t)}$ jest zawarte w $\mathcal{W}_K$. W dowodzie tej własności wykorzystuje się argumenty użyte w dowodzie następującego twierdzenia.

Twierdzenie (Geiss)**.** *Degeneracja algebry dzikiej jest dzika.* $\square$

Konsekwencją pierwszej z powyższych własności jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Klasa $\mathcal{T}$ jest aksjomatyzowalna.*

Dowód. Systemem aksjomatów dla $\mathcal{T}$ jest system zdań $\neg\psi_{n,t}$, $n, t \in \mathbb{N}$. $\square$

Problemem, który pojawią się tutaj w naturalnym sposób, jest pytanie, czy klasa $\mathcal{T}$ jest skończenie aksjomatyzowalna. Zauważmy, że gdyby klasa $\mathcal{T}$ była skończenie aksjomatyzowalna, to zbiór $\mathcal{T}_K$ byłby otwarty w $\mathrm{alg}_K(d)$ dla każdego K. Istotnie, przypuśćmy, że $\neg\psi_{n,t}$, $n,t \leq N$, jest systemem aksjomatów dla $\mathcal{T}$. Wtedy $\mathcal{W}_K = \bigcup_{n,t\leq N} W_K(n,t) \subset \bigcup_{n,t\leq N} \overline{W_K(n,t)} \subset \mathcal{W}_K$, a więc zbiór $\mathcal{W}_K$ jest domknięty.

Niech I będzie zbiorem i $\mathcal{F} \subset 2^I$. Jeśli rodzina $\mathcal{F}$ spełnia następujące warunki:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(2) jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to$A \cap B \in \mathcal{F}$,

(3) jeśli $A \in \mathcal{F}$ i $A \subset B$, to $B \in \mathcal{F}$,

(4) jeśli $A \notin \mathcal{F}$, to $I \setminus A \in \mathcal{F}$,

to $\mathcal{F}$ nazywa się ultrafiltrem.

Załóżmy, że M_i jest zbiorem dla każdego $i \in I$. Definiujemy relację $\sim_{\mathcal{F}}$ w $\prod_{i\in I} M_i$ warunkiem $(m_i) \sim_{\mathcal{F}} (m_i')$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $U \in \mathcal{F}$ taki, że $m_i = m_i'$ dla $i \in U$ (inaczej, $m_i = m_i'$ dla $\mathcal{F}$-prawie wszystkich i). Jeśli $\mathcal{F}$ jest ultrafiltrem, to zbiór $\prod_i M_i/\mathcal{F} := (\prod_i M_i)_{\sim_{\mathcal{F}}}$ nazywamy ultraproduktem, zaś jego elementy oznaczać będziemy przez $(m_i)^{\mathcal{F}}$.

Twierdzenie (Łoś). *Formuła φ jest spełniona w $\prod_i M_i/\mathcal{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona w $\mathcal{F}$-prawie wszystkich M_i.* $\square$

Przykładem zastosowania twierdzenia Łosia jest następujące fakt. Niech I będzie zbiorem liczb pierwszych i $\mathcal{F}$ ultrafiltrem w I zawierającym wszystkie zbiory koskończone (taki ultrafiltr istnieje). Wtedy $\prod_p \mathbb{F}_p/\mathcal{F}$ jest ciałem charakterystyki 0.

Twierdzenie. *Niech $\mathcal{C}$ będzie klasą modeli. Klasa $\mathcal{C}$ jest aksjomatyzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest zamknięta na elementarną równoważność i ultraprodukty.* $\square$

Twierdzenie. *Następujące zdania są równoważne.*

(a) *Klasa $\mathcal{T}^p$ jest skończenie aksjomatyzowalna w $\mathcal{A}lg^p$.*

(b) *Klasa $\mathcal{W}^p$ jest aksjomatyzowalna.*

(c) *Zbiór $\mathcal{W}_K^p$ jest domknięty w $\mathrm{alg}_K(d)$ dla każdego ciała K charakterystyki p.*

Dowód. Równoważność warunków (a) i (b) jest łatwa. Implikację (a) $\Rightarrow$ (c) pokazaliśmy. Udowodnimy teraz, że warunek (c) implikuje (b).

Wiemy, że klasa $\mathcal{W}^p$ jest zamknięta na elementarną równoważność, gdyż klasa $\mathcal{T}^p$ jest zamknięta na elementarną równoważność. Trzeba pokazać, że klasa $\mathcal{W}^p$ jest zamknięta na ultraprodukty. Łatwo jest pokazać, że jeśli $(K, R) \in \mathcal{W}^p$, to ultrapotęga $(K, R)^I/\mathcal{F}$ też należy do $\mathcal{W}^p$.

Niech K będzie ciałem i L ultrapotęga ciała $\mathcal{F}$. Niech $\Delta : K \to L$ będzie diagonalnym włożeniem. Odwzorowanie Δ indukuje odwzorowanie $K^n \to L^n$, które też będziemy oznaczać przez Δ. Dla układu punktów $x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}) \in K^n$, $i \in I$, mamy punkt $(x_i)^{\mathcal{F}} = ((x_{i,1})^{\mathcal{F}}, \ldots, (x_{i,n})^{\mathcal{F}}) \in L^n$.

Niech γ będzie układem stałych strukturalnych dla (K, R). Wtedy stałymi strukturalnymi ultrapotęgi $(K, R)^I$ są $\Delta(\gamma)$. Podobnie, gdy mamy modele (K, R_i), $i \in I$, ze stałymi strukturalnymi γ_i, to stałymi strukturalnymi ultraproduktu $(L, \prod_i R_i/\mathcal{F})$ są $(\gamma_i)^{\mathcal{F}}$.

Trzeba pokazać, ze gdy wszystkie modele $(K, R^i) \in \mathcal{W}^p$ są dzikie, to $(L, \prod_i R_i/\mathcal{F}) \in \mathcal{W}^p$. Równoważnie musimy pokazać, że gdy $\gamma_i \in \mathcal{W}_K$, $i \in I$, to $(\gamma_i)^{\mathcal{F}} \in \mathcal{W}_L$. Wiemy, że $\Delta(\gamma_i) \in \mathcal{W}_L$ dla każdego $i \in I$. Wystarczy zatem pokazać, że jeśli V jest podzbiorem domkniętym w L^n oraz dla $x^i \in K^n$ mamy, że $\Delta(x_i) \in V$, to $(x_i)^{\mathcal{F}} \in V$.

Przypuśćmy, że wielomian $H \in L[X_1, \ldots, X_n]$ znika na V. Wiemy, że $H = (H_i)^{\mathcal{F}}$ dla pewnych wielomianów H_i o współczynnikach w ciele K. Możemy przy tym założyć, że istnieje wspólne ograniczenie r na stopnie wielomianów H_i, $i \in I$. Dla ustalonego $j \in I$ mamy $0 = H(\Delta(x_j)) = (H_i(x_j))^{\mathcal{F}}$, skąd $H^i(x_j) = 0$ dla $i \in U_j \in \mathcal{F}$. Zauważmy, że x_j możemy traktować jako funkcjonał liniowy na przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej r o współczynnikach w K. Ponieważ ta przestrzeń jest skończenie wymiarowa, więc istnieje podzbiór skończony $I_0 \subset I$ taki, że $\langle x_j \mid j \in I \rangle = \langle x_j \mid j \in I_0 \rangle$. Wtedy $H_i(x_j) = 0$ dla wszystkich $j \in I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $H_i(x_j) = 0$ dla $j \in J_0$. Otrzymujemy stąd, ze dla każdego $j \in I$ mamy, że $H_i(x_j) = 0$ dla $i \in \bigcap_{j \in I_0} U_j$. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest ultrafiltrem , więc $\bigcap_{j \in I_0} U_j$ należy do $\mathcal{F}$. Stad $H^i(x_i) = 0$ dla $\mathcal{F}$-prawie wszystkich i, skąd $0 = (H_i(x_i))^{\mathcal{F})} = H((x_i)^{\mathcal{F}})$. $\square$

Niech $\mathcal{Q}$ będzie klasą algebr kwaziodwróconych. Klasa $\mathcal{Q}$ jest aksjomatyzowalna.

Twierdzenie (Skowroński)**.** *Algebra kwaziodwrócona jest oswojona wtedy i tylko wtedy, gdy jej forma Titsa jest słabo nieujemna.*

Wniosek. *Klasa oswojonych algebr kwaziodwróconych jest skończenie aksjomatyzowalna w klasie algebr kwaziodwróconych.*

Dowód opiera się na obserwacji, że warunek słabej nieujemności formy Titsa można zapisać przy pomocy skończonej ilości formuł. Konsekwencją powyższego wniosku jest fakt, że zbiór $(\mathcal{Q} \cap \mathcal{T})_K$ jest otwarty w $\mathcal{Q}_K$, oraz, że gdy $\gamma \in \overline{(\mathcal{W}\mathcal{Q})_K}$, to $\gamma \in \mathcal{W}_K$.