O półniezmiennikach kołczanów z relacjami

na podstawie referatu Witolda Kraśkiewicza

19 grudnia 2000 roku i 16 stycznia 2001 roku

Niech $Q = (Q_0, Q_1)$ będzie lokalnie skończonym kołczanem bez zorientowanych cykli i k ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0. Dla wektora wymiaru $d \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ ($d_x \geq 0$ dla każdego x oraz $\operatorname{supp} d := \{x \in Q_0 \mid d_x \neq 0\}$ jest skończony) przez $\mathscr{R}(Q, d)$ oznaczać będziemy rozmaitość reprezentacji kołczanu Q o wektorze wymiaru d zdefiniowaną wzorem $\mathscr{R}(Q, d) := \prod_{a \in Q_1} \operatorname{Hom}(k^{d_{ta}}, k^{d_{ha}})$, gdzie dla każdej strzałki $a \in Q_1$ przez ta oznaczamy jej początek, zaś przez ha jej koniec. Na rozmaitości $\mathscr{R}(Q, d)$ działa w naturalny sposób grupa $G(d) := \prod_{x \in Q_0} \mathrm{GL}(d_x)$. Działanie to indukuje działanie grupy $G(d)$ na pierścieniu współrzędnych $k[\mathscr{R}(Q, d)]$ rozmaitości $\mathscr{R}(Q, d)$. Mamy też działanie podgrupy $G'(d) := \prod_{x \in Q_0} \mathrm{SL}(d_x) \subset G(d)$. Pierścień $k[R(Q, d)]^{G'(d)}$ funkcji stałych ze względu na działanie grupy $G'(d)$ nazywać będziemy pierścieniem półniezmienników i oznaczać $\mathrm{SI}(Q, d)$.

Twierdzenie (Skowroński–Weyman)**.** *Kołczan Q jest oswojonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{SI}(Q, d)$ jest zupełnym przekrojem dla każdego wektora wymiaru d.*

Rozważmy kołczan ograniczony (Q, I). Możemy zdefiniować rozmaitość $\mathscr{R}(Q, I, d)$ reprezentacji kołczanu Q spełniających relacje z I o wektorze wymiaru d. Zbiór $\mathscr{R}(Q, I, d)$ jest domkniętą podrozmaitością w $\mathscr{R}(Q, d)$.

Dla kołczanu $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$ ograniczonego przez ideał $I = (ba)$ i dla wektora wymiaru $d = (1, 1, 1)$ rozmaitość $\mathscr{R}(Q, I, d)$ jest sumą dwóch składowych opisanych przez równania $a = 0$ i $b = 0$. W ogólnym przypadku składowe rozmaitości $\mathscr{R}(Q, I, d)$ są opisane przez maksymalne pary $r = (r_a, r_b)$ takie, że $r_a + r_b \leq d_2$, $r_a \leq d_1$, $r_b \leq d_2$. Liczby r_a i r_b opisują rangi odwzorowań stowarzyszonych ze strzałkami a i b odpowiednio.

Ustalmy składową nieprzywiedlną X stowarzyszoną z parą (r_a, r_b). Desingularyzację Z tej składowej nieprzywiedlnej otrzymujemy rozpatrując flagi $0 \subset R_1 \subset R_2 \subset k^{d_2}$, gdzie $\dim_k R_1 = r_a$, $\dim_k R_2 = d_2 - r_b$, i odwzorowania $f_a : k^{d_1} \to k^{d_2}$ i $f_b : k^{d_2} \to k^{d_3}$ takie, że $\operatorname{Im} f_a \subset R_1$ i $\operatorname{Ker} f_b \supset R_2$. Rozmaitość Z jest wiązką liniową nad przestrzenią odpowiednich flag. Zauważmy, że rozmaitość flag jest postaci G/P dla $G = \mathrm{GL}(d_2)$ i pewnej podgrupy parabolicznej P. Twierdzenie Botta pozwala nam wyliczyć $k[X]$. Otrzymujemy, że $k[X] = \bigoplus_{\lambda,\mu} S_\lambda(k^{d_1})^* \otimes S_{(\lambda|-\mu^t)}k^{d_2} \otimes S_\mu k^{d_3}$, gdzie λ i μ zależą od pary (r_a, r_b).

Niech (Q, I) będzie gałęzią z relacjami. Rozmaitość $\mathscr{R}(Q, I, d)$ jest produktem rozmaitości rozważanych w poprzednim przykładzie. Zatem pierścień współrzędnych tej rozmaitości jest iloczynem tensorowym pierścieni opisanych powyżej. Korzystając z reguły Littlewooda–Richardsona można opisać półniezmienniki.

Ustalmy niezorientowaną drogi δ w Q. Niech $\delta_1, \ldots, \delta_k$ będą kolejnymi maksymalnymi odcinkami drogi δ zgodnie zorientowanymi. Oznaczmy początek drogi δ_j przez i_{j-1}, zaś jej koniec przez i_j. Załóżmy przy tym, że $d_{i_0} + d_{i_2} + \cdots = d_{i_1} + d_{i_3} + \cdots$. Wtedy dla każdego $V \in \mathscr{R}(Q, I, d)$ mamy odwzorowanie liniowe pomiędzy $k_{d_{i_0}+d_{i_2}+\cdots}$, a $k^{d_{i_1}+d_{i_3}+\cdots}$ indukowane przez reprezentację V. Ponieważ powyższe przestrzenie są tego samego wymiaru, więc możemy policzyć wyznacznik tego odwzorowania. Traktując ten wyznacznik jako funkcję do V otrzymujemy półniezmiennik. Wybierając odpowiednie drogi (zależne od składowej i spełniające warunek elementarności) otrzymujemy, że stowarzyszone z nimi półniezmienniki są wolnymi generatorami pierścienia półniezmienników dla danej składowej nieprzywiedlnej.

Rozważmy kołczan Q postaci

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ \alpha_1\searrow & & \nearrow\alpha_3 \\ & \bullet & \\ \alpha_2\nearrow & & \searrow\alpha_4 \\ \bullet & & \bullet \end{array}$$

ograniczony przez relacje $\alpha_3\alpha_1$ i $\alpha_4\alpha_2$ oraz wektor wymiaru $d = \begin{smallmatrix} n & & n \\ & 2n & \\ n & & n \end{smallmatrix}$. Dla danej reprezentacji

$$\begin{array}{ccc} k^n & & k^n \\ V(\alpha_1)\searrow & & \nearrow V(\alpha_3) \\ & k^{2n} & \\ V(\alpha_2)\nearrow & & \searrow V(\alpha_4) \\ k^n & & k^n \end{array}$$

rozważamy funkcje $\delta_1 := \det(V(\alpha_4)V(\alpha_1))$, $\delta_2 := \det(V(\alpha_3)V(\alpha_2))$, $\delta_3 := \det(V(\alpha_1)+V(\alpha_2))$ i $\delta_4 := \det(V(\alpha_3)+V(\alpha_4))$. Mamy relację $\delta_1\delta_2 - \delta_3\delta_4 = 0$. Można pokazać, że są to półniezmienniki generujące algebrę półniezmienników. Więcej, mamy $\mathrm{SI}(Q, I, d) \simeq K[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]/(\delta_1\delta_2 - \delta_3\delta_4)$.

Rozważmy kołczan Q postaci

$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & & \bullet & & \\
\alpha_1\searrow & & \nearrow\alpha_3 & & \\
& \bullet & & \bullet & \\
\alpha_2\nearrow & & \searrow\alpha_4\nearrow\alpha_6 & & \\
\bullet & & \bullet & & \\
& \alpha_5\nearrow & & \searrow\alpha_7 & \\
& \bullet & & \bullet &
\end{array}$$

ograniczony przez relację $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_4\alpha_2$, $\alpha_6\alpha_4$ i $\alpha_7\alpha_5$. Dla wektora wymiaru $d = \begin{smallmatrix} n & & n & \\ & 2n & & n \\ n & & 2n & \\ & n & & n \end{smallmatrix}$ niech X będzie składową rozmaitości $R(Q,d)$ opisaną przez równania $\operatorname{rk} V(\alpha_i) \leq n$ dla każdego i. Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned}
\delta_1(V) &:= \det(V_1 \oplus V_2 \to V_3), \\
\delta_2(V) &:= \det(V_2 \to V_4), \\
\delta_3(V) &:= \det(V_5 \to V_7), \\
\delta_4(V) &:= \det(V_6 \to V_7 \oplus V_8), \\
\delta_5(V) &:= \det(V_1 \oplus V_5 \to V_6), \\
\delta_6(V) &:= \det(V_1 \to V_8), \\
\delta_7(V) &:= \det(V_3 \oplus V_5 \to V_4 \oplus V_6), \\
\delta_8(V) &:= \det(V_3 \to V_4 \oplus V_8).
\end{aligned}$$

Mamy równości $\delta_4\delta_5 - \delta_3\delta_6 = 0$, $\delta_1\delta_7 - \delta_2\delta_5 = 0$, $\delta_2\delta_6 - \delta_1\delta_8 = 0$, $\delta_8\delta_5 - \delta_7\delta_6 = 0$, $\delta_4\delta_7 - \delta_3\delta_8 = 0$. Zauważmy, że lewe strony powyższych równości są pfaffianami następującej macierzy

$$\begin{bmatrix}
0 & -\delta_8 & -\delta_7 & -\delta_2 & 0 \\
\delta_8 & 0 & 0 & -\delta_4 & -\delta_6 \\
\delta_7 & 0 & 0 & -\delta_3 & -\delta_5 \\
\delta_2 & \delta_4 & \delta_3 & 0 & -\delta_1 \\
0 & \delta_6 & \delta_5 & \delta_1 & 0
\end{bmatrix}.$$

Wykorzystując powyższe obserwacje można pokazać, że pierścień $\mathrm{SI}(X)$ jest izomorficzny z pierścieniem $K[\delta_1, \cdots, \delta_8]$ podzielony przez ideał generowany przez powyższe relacje. W szczególności pierścień ten nie jest zupełnym przekrojem. W obu powyższych przypadkach korzystamy z szeregów Poincare'a.

Niech Q będzie kołczanem bez zorientowanych cykli i V nierozkładalną reprezentacją kołczan Q. Definiujemy $c^V(W) := \det(\mathrm{Hom}_{KQ}(P_0, W) \to \mathrm{Hom}_{KQ}(P_1, W))$, gdzie $0 \to P_1 \to P_0 \to V \to 0$ jest rezolwentą projektywną modułu V. Derksen–Weyman pokazali, że półniezmienniki c^V zdefiniowane przez Schoefield generują pierścień półniezmienników.

Ustalmy kołczan (Q, I). Wtedy $R(Q, I, d)$ jest podrozmaitością w $R(Q, d)$. Mamy odwzorowanie pierścieni współrzędnych $K[R(Q, d)] \to K[R(Q, I, d)]$, które jest epimorfizmem. To odwzorowanie indukuje epimorfizm na pierścieniach półniezmienników. Obrazy półniezmienników c^V generują pierścień półniezmienników $\mathrm{SI}(Q, d)$.

Ustalmy $W \in R(Q, I, d)$ i $V \in R(Q, d)$. Rozważmy standardową rezolwentę $0 \to P_1 \to P_0 \to V \to 0$ modułu V, gdzie $P_0 := \bigoplus_{x \in Q_0} V_x \otimes P_x$, zaś $P_1 := \bigoplus_{x \to y} V_y \otimes P_x$. Wtedy, że $\det(\mathrm{Hom}_{KQ}(P_0, W) \to \mathrm{Hom}_{KQ}(P_1, W)) = \det(\mathrm{Hom}_{KQ/I}(P_0', W) \to \mathrm{Hom}_{KQ/I}(P_1', W))$, gdzie $P_i' := P_i \otimes kQ/I$. Zauważmy, że $P_1' \to P_0' \to V' \to 0$ jest prezentacją projektywną modułu $V' := V \otimes KQ/I$