# Płaskie nakrycia modułów

na podstawie referatu Daniela Simsona

24 kwietnia 2001

Niech $R$ będzie pierścieniem z 1. Przez moduły będziemy rozumieć prawe $R$-moduły unitarne. $R$-moduł $M$ będziemy nazywać płaskim, jeśli dla dowolnego monomorfizmu $u : X \to Y$ lewych $R$-modułów indukowane odwzorowanie $M \otimes u : M \otimes X \to M \otimes Y$ jest monomorfizmem. Wszystkie moduły projektywne są płaskie. Przykładem modułu płaskiego, który nie jest projektywny jest $\mathbb{Z}$-moduł $\mathbb{Q}$.

Załóżmy, że $R$ będzie dziedziną. Jeśli dla każdego $d \neq 0$ i $c \in R$ istnieją $a$ i $b$ w $R$ takie, że $ad = bc$, to $R$ nazywamy obszarem Ore. W tej sytuacji istnieje pierścień lewych ułamków $R_0$ pierścienia $R$ i jest on płaskim $R$-modułem.

Jeśli $R$ jest pierścieniem przemiennym i $\mathfrak{p}$ jest ideałem pierwszym, to $R_{\mathfrak{p}}$ jest płaskim $R$-modułem.

**Twierdzenie.** *Niech $R$ będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne.*

(a) *Każdy prawy $R$-moduł jest płaski.*

(b) *$R$ jest regularny w sensie von Neumanna, tzn dla każdego $r \in R$ istnieje $s \in R$ takie, że $r = rsr$.*

(c) *Każdy prawy ideał $I \subset R$ jest generowany przez idempotent.*

**Twierdzenie.** *Niech $R$ będzie pierścieniem i $M$ $R$-modułem. Następujące warunki są równoważne.*

(a) *$M$ jest płaski.*

(b) $\mathrm{Tor}_1^R(M, -) = 0$.

(c) *Istnieje system prosty $\{P_\beta, h_{\alpha\beta}\}$ modułów projektywnych skończenie generowanych taki, że $M \simeq \varinjlim \{P_\beta, h_{\alpha\beta}\}$.*

(d) *Lewy $R$-moduł charakterów $M^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ jest injektywny.*

Funktor $(-)^+ : \operatorname{Mod} R \to \operatorname{Mod} R^{\mathrm{op}}$ jest wierny i dokładny. Ponadto $\operatorname{Hom}_R(M, X^+) = (M \otimes X)^+$.

Niech $\mathscr{X} \subset \operatorname{Mod} R$ będzie pełną podkategorią addytywną zamkniętą na sumy i składniki proste. $\mathscr{X}$-aproksymacją modułu $M$ nazywamy (epimorfizm) $\varepsilon : X \to M$ taki, że $X \in \mathscr{X}$ i dla każdego homomorfizmu $f : X' \to M$ takiego, że $X' \in \mathscr{X}$ istnieje $f' : X' \to X$ taki, że $f = uf'$. Powyższą $\mathscr{X}$-aproksymację nazwiemy minimalną ($\mathscr{X}$-nakryciem), jeśli dodatkowo każde odwzorowanie $g : X \to X$ takie, że $\varepsilon = \varepsilon g$, jest izomorfizmem. Dualnie dla podkategorii $\mathscr{X} \subset \operatorname{Mod} R$ zamkniętej na produkty i składniki proste można zdefiniować $\mathscr{X}$-koaproksymacje i $\mathscr{X}$-konakrycia.

Jeśli $\mathscr{X}$ jest kategorią $R$-modułów injektywnych, to $\mathscr{X}$-konakryciem $R$-modułu $M$ jest jego powłoka injektywna. W 1953 Eckman i Schopf pokazali, że każdy moduł posiada powłokę injektywną.

Jeśli $\mathscr{X}$ jest kategorią $R$-modułów projektywnych, to $\mathscr{X}$-nakryciem $R$-modułu $M$ jest jego nakrycie projektywne.

Wiadomo, że $\mathbb{Z}$-moduł $\mathbb{Z}_2$ nie posiada projektywnego nakrycia. Istotnie przypuśćmy, że takie nakrycie $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}_2$ istnieje. Wiadomo, że $P$ jest składnikiem prostym moduły wolnego $F$. Ustalmy taki składnik prosty $\mathbb{Z}$ modułu $F$, że $\varepsilon|_{\mathbb{Z}} \neq 0$. Istnieje takie odwzorowanie $g : P \to P$, które faktoryzuje się przez $\mathbb{Z}$ i $\varepsilon g = \varepsilon$. Stąd $P \simeq \mathbb{Z}$ z minimalności $\varepsilon$. Mamy jednak, że odwzorowanie $m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ polegające na mnożeniu przez 3 nie jest izomorfizmem i $\varepsilon m = \varepsilon$, co prowadzi do sprzeczności.

**Twierdzenie** (Bass, 1960)**.** *Niech $R$ będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne.*

(a) *Każdy skończenie generowany prawy $R$-moduł posiada projektywne nakrycie.*

(b) *$R/J(R)$ jest półprosty i idempotenty z $R/J(R)$ można podnosić do idempotentów w $R$.*

(c) *$R \simeq e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR$, gdzie $e_iR$ są nierozkładalne, $e_j = e_j^2$ oraz $e_jRe_j$ jest lokalny dla dowolnego $j = 1, \dots, n$.*

(d) *Każdy skończenie generowany lewy $R$-moduł posiada projektywne nakrycie.*

Pierścienie opisane w powyższym twierdzeniu nazywamy półdoskonałymi. Przykładem pierścienia półdoskonałego, który nie jest artinowski, jest pierścień $R$ postaci

$$R = \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_{(p)} & \hat{\mathbb{Z}}_{(p)} \\ (p) & \hat{\mathbb{Z}}_{(p)} \end{bmatrix} \subset \mathbb{M}_2(\hat{\mathbb{Z}}_{(p)}).$$

**Twierdzenie** (Bass, 1960)**.** *Niech $R$ będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne.*

(a) *Każdy prawy $R$-moduł posiada projektywne nakrycie.*

(b) *Każdy prawy płaski $R$-moduł jest projektywny.*

(c) *$R/J(R)$ jest półprosty oraz $J(R)$ jest prawostronnie $T$-nilpotenty, tzn. dla każdego ciągu $r_1$, $r_2$, ..., elementów $J(R)$ mamy $r_m r_{m-1} \cdots r_1 = 0$ dla pewnego $m$.*

(d) *$R$ jest lewostronnie artinowski ze względu na skończenie generowane ideały.*

Pierścienie opisane w powyższym twierdzeniu nazywamy prawostronnie doskonałymi. W szczególności, jeśli $R/J(R)$ jest półprosty oraz $J(R)^m = 0$ dla pewnego $m$, to $R$ jest lewo-prawo doskonały.

Moduł $X$ nazywamy skończenie przedstawialnym, jeśli istnieje epimorfizm $\varepsilon : P \to X$ taki, że $P$ jest skończenie generowanym projektywnym modułem i $\operatorname{Ker} \varepsilon$ jest skończenie generowany.

**Twierdzenie** (Oberst–Schneider, 1971)**.** *Następujące warunki są równoważne.*

(a) *Każdy prawy skończenie przedstawialny $R$-moduł posiada nakrycie projektywne.*

(b) *$R/J(R)$ jest regularny w sensie von Neumanna i idempotenty z $R/J(R)$ można podnieść do idempotentów w $R$.*

(c) *Każdy lewy skończenie przedstawialny $R$-moduł posiada nakrycie projektywne.*

Pierścienie opisane w powyższym twierdzeniu nazywamy fp-półdoskonałymi. Pojawiła się hipoteza Enochsa głosząca, że każdy prawy $R$-moduł posiada nakrycie płaskie. Hipoteza ta została udowodniona przez Enochsa oraz niezależnie przez Eklofa i Trlifaja w 1999 roku.

Niech $\mathscr{M}_R$ będzie kategorią serwantnie injektywnych prawych $R$-modułów. Niech $\lambda = |R| + \aleph_0$. Kładziemy $\mathscr{M}_R^{\perp} = \{Z \in \operatorname{Mod} R \mid \operatorname{Ext}^1_R(Z, I) = 0, I \in \mathscr{M}_R\}$.

**Lemat** (Kiełpiński)**.** *Każdy moduł $M \in \mathscr{M}_R^{\perp}$ ma postać sumy ciągłej $M = \bigcup_{\xi<\gamma} M_\xi$, gdzie $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$, każde $M_\xi$ jest serwantnym podmodułem $M$, $M_\tau = \bigcup_{\xi<\tau}$, jeśli $\tau$ jest liczbą graniczną, oraz $|M_{\xi+1}/M_\xi| \leq \lambda$.*

Wykorzystując teorię odwracania można pokazać, że każdy moduł posiada $\mathscr{M}_R^{\perp}$-minimalną aproksymację. Następnie pokazujemy, że $\mathscr{M}_R^{\perp}$ jest kategorią modułów płaskich, co kończy dowód.