Otwarte problemy związane z wielomianowymi różniczkowaniami lokalnie nilpotentnymi

na podstawie referatu Andrzeja Nowickiego

23 października 2001

(1) **The cancellation problem (problem o skracaniu).** Niech V będzie rozmaitością afiniczną taką, że $V \times k \simeq k^n$. Czy $V \simeq k^{n-1}$?

(2) **The embedding problem (problem o zanurzaniu).** Niech $f : k \to k^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. Czy istnieje automorfizm wielomianowy $\sigma : k^n \to k^n$ taki, że $(\sigma f)(x) = (x, 0, \dots, 0)$?

(3) **14. problem Hilberta.** Rozważmy ciało $k \subset L \subset k(X_1, \dots, X_n)$. Czy pierścień $L \cap k[X_1, \dots, X_n]$ jest skończenie generowany jako k-algebra?

(4) **Hipoteza Serre'a.** Czy każdy skończenie generowany moduł projektywny nad pierścieniem wielomianów nad ciałem jest wolny? Hipoteza ta znalazła swoją pozytywną odpowiedź.

(5) **Slice problem (problem o istnieniu przekroju).** Czy dla różniczkowania d pierścienia wielomianów R takiego, że ideał generowany przez $d(R)$ jest równy R, istnieje element $s \in R$ taki, że $d(s) = 1$?

(6) **Hipoteza jakobianowa.** Czy każde odwzorowanie wielomianowe $f : k^n \to k^n$, którego jakobian jest niezerową stałą, jest wielomianowym automorfizmem?

(7) **The linearization problem (problem o linearyzowalności).** Czy dla automorfizmu wielomianowego $f : k^n \to k^n$ takiego, że $f^m = \mathrm{Id}$ dla pewnego m, istnieje automorfizm wielomianowy $\sigma : k^n \to k^n$ taki, że $\sigma f \sigma^{-1}$ jest liniowe.

(8) **The coordinate problem (problem o zmiennej).** Wielomian $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ nazywamy zmienną, jeśli istnieją wielomiany $g_2, \dots, g_n \in k[X_1, \dots, X_n]$ takie, że $k[f, g_2, \dots, g_n] = k[X_1, \dots, X_n]$. Opisać wielomiany będące zmiennymi.

(9) **Tame generator conjecture (problem o oswojonych automorfizmach).** Czy każdy automorfizm wielomianowy $f : k^n \to k^n$ jest złożeniem automorfizmów elementarnych?

Niech A będzie pierścieniem (przemiennym z 1), mającym strukturę algebry nad pierścieniem przemiennym k. Różniczkowaniem nazywamy k-liniowe odwzorowanie $d : A \to A$ takie, że $d(ab) = ad(b) + d(a)b$ dla $a, b \in A$. Podpierścień $B \subset A$ nazywamy d-stabilnym, jeśli $d^{-1}(B) \subset B$. Przekrój $\mathrm{Nil}(d)$ wszystkich d-stabilnych podpierścieni jest równy $\{a \in A \mid a^n = 0, n \in \mathbb{N}\}$. Na przykład, jeśli w pierścieniu $C^\infty(\mathbb{R})$ określimy różniczkowanie d wzorem $d := \frac{d}{dt}$, to $\mathrm{Nil}(d) = \mathbb{R}[t]$. Różniczkowanie d nazywamy lokalnie nilpotentnym, jeśli $A = \mathrm{Nil}(d)$. Przez A^d oznaczać będziemy $\mathrm{Ker}\, d$.

Niech A będzie przemienną k-algebrą z lokalnie nilpotentnym różniczkowaniem d, przy czym $\mathbb{Q} \subset k$. Jeśli element $s \in A$ jest taki, że $d(s) = 1$, to mówimy, że s jest przekrojem różniczkowania d. Jeśli różniczkowanie d ma przekrój s, to s jest algebraicznie niezależne nad A^d.

Twierdzenie. *Jeśli różniczkowanie d ma przekrój s, to $A = A^d[s]$ oraz $d = \frac{d}{ds}$.*

Dla ustalonego $b \in A$ mamy homomorfizm $\sigma_b : A \to A$ dany wzorem $\sigma_b(x) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(-b)^p d^p(x)$. Wtedy $d(\sigma_b(x)) = (1 - d(b))\sigma_b(x)$. W szczególności, gdy s jest przekrojem, to $\sigma_s(A) \subset A^d$. Ponieważ $\sigma_b(x) = x$ dla $x \in A^d$ więc mamy twierdzenie.

Twierdzenie. *Jeśli $A = k[a_1, \ldots, a_m]$, to $A^d = k[\sigma_s(a_1), \ldots, \sigma_s(a_m)]$. Mamy też $A^d = A/sA$.*

Jeśli $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, to każde różniczkowanie $d : A \to A$ jest postaci $d = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ dla pewnych wielomianów $f_1, \ldots, f_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Różniczkowanie d jest lokalnie nilpotentne wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Nil}(d)$. Dla $n = 2$ van den Essen pokazał, że różniczkowanie $d : k[x, y] \to k[x, y]$ jest lokalnie nilpotentne wtedy i tylko wtedy, gdy $d^{m+2}(x) = 0 = d^{m+2}(y)$ dla $m = \max(\deg_x d(x), \deg_y d(x), \deg_x d(y), \deg_y d(y))$.

Rozważmy różniczkowanie pierścienia $k[x, y]$ dane wzorami $d(x) := 1$ i $d(y) := x$. Mamy, że $y - \frac{1}{2}x^2 \in k[x, y]^d$, skąd $k[x, y]^d = k[y - \frac{1}{2}x^2]$ i $k[x, y] = k[y - \frac{1}{2}x^2][x] = k[x, y - \frac{1}{2}x^2]$. Podobnie dla pierścienia $k[x, y, z]$ i różniczkowania d takiego, że $d(x) := 1$, $d(y) := x$ i $d(z) := y$ mamy $k[x, y, z]^d = k[f, g]$, gdzie $f := y - \frac{1}{2}x^2$ oraz $g := z - xy + \frac{1}{3}x^3$.

Twierdzenie (Miyanishi, 1985, Daigh, 1997)**.** *Jeśli k jest ciałem charakterystyki 0 i d jest lokalnie nilpotentnym niezerowym różniczkowaniem pierścienia $k[x, y, z]$, to istnieją algebraicznie niezależne wielomiany $f, g \in k[x, y, z]$ takie, że $k[x, y, z]^d = k[f, g]$.*

Niech $\gamma(d)$ będzie minimalną liczbą generatorów pierścienia A^d, gdy $A := k[x_1, \ldots, x_n]$ jest pierścieniem wielomianów nad ciałem k i $d : A \to A$ różniczkowaniem. Wiadomo, że gdy $n = 2$, to $\gamma(d) \leq 1$. Dla $n \leq 3$ mamy $\gamma(d) < \infty$. Nowicki i Strelcyn pokazali, że jeśli $n \geq 3$, to dla każdego m istnieje lokalnie skończone różniczkowanie d takie, że $\gamma(d) = m$. Jeśli różniczkowanie d jest lokalnie nilpotentne i $n = 3$, to $\gamma(d) = 2$. Daigle i Freidenburg pokazali, że gdy $n = 4$, to dla każdego $m \geq 3$ istnieje takie różniczkowanie lokalnie nilpotentne, że $\gamma(d) = m$ lub $\gamma(d) = m + 1$.

Daigle i Freidenburg podali też następujący przykład. Niech $d : A \to A$ będzie różniczkowaniem pierścienia $A := k[a, b, x, y, z]$ danym wzorami $d(a) := 0 =: d(b)$, $d(x) := a^2$, $d(y) := ax + b$ i $d(z) := y$. Wtedy pierścień A^d nie jest jest skończenie generowany. Zauważmy, że d jest liniowym różniczkowaniem pierścienia $R[x, y, z]$, gdzie $R = k[a, b]$. Wiadomo natomiast, że pierścień stałych liniowego różniczkowania pierścienia wielomianów nad ciałem jest skończenie generowany.

Twierdzenie (Berson, 1999)**.** *Jeśli R jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu i $d : A \to A$ jest niezerowym różniczkowaniem dla $A := R[x, y]$, to $R[x, y]^d = R[f]$.*

Jeśli $R := \mathbb{C}[t^2, t^3]$ i d jest różniczkowaniem pierścienia $R[x, y]$ danym wzorem $d(x) := t^3$ i $d(y) := t^2$, to $R[x, y]^d$ nie jest skończenie generowany. Gdy $R := \mathbb{C}[T]/(T^2)$ oraz $d : R[x] \to R[x]$ jest dane wzorem $d(x) := tx$, to $R[x]^d = R[tx, tx^2, tx^3, \ldots]$.

Niech R będzie $\mathbb{Q}$-algebrą oraz $R^{[n]} := R[X] := R[x_1, \ldots, x_n]$. Problem o skracaniu można sformułować następująco: czy $R[X]^d \simeq R^{[n-1]}$, gdzie $d : R[X] \to R[X]$ jest lokalnie nilpotentnym różniczkowaniem z przekrojem s? Zauważmy, że gdy $d := \frac{\partial}{\partial x_1}$, to $R[X]^d \simeq R^{[n-1]}$. Jeśli $\sigma : R[X] \to R[X]$ jest R-automorfizmem, to $\sigma \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma^{-1}$ też ma powyższą własność.

Niech R będzie $\mathbb{Q}$-algebrą i d lokalnie nilpotentnym różniczkowaniem pierścienia $R[X]$ z przekrojem s. Wtedy $R[X]^d \simeq R^{[n-1]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje R-automorfizm $\sigma : R[X] \to R[X]$ taki, że $\sigma^{-1} d \sigma = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Istotnie, jeśli $R[X]^d = R[y_2, \ldots, y_n]$, to $R[X] = R[s, y_2, \ldots, y_n]$ i określamy σ wzorem $\sigma(x_1) = s$, $\sigma(x_i) = y_i$, $i = 2, \ldots, n$. Zatem powyższy problem można sformułować następująco: czy istnieje R-automorfizm $\sigma : R[X] \to R[X]$ taki, że $\sigma d \sigma^{-1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$?