Płaskie moduły periodyczne

na postawie referatu Daniela Simsona

7 maja 2002

Dla pierścienia R przez $\operatorname{Mod} R$ oznaczać będziemy kategorię prawych R-modułów, zaś przez $\operatorname{mod} R$ kategorię prawych skończenie generowanych R-modułów.

Przypomnijmy, że jednym z przedmiotów badań w teorii reprezentacji grup są kohomologie grupy o G współczynnikach w danym KG-module M, zdefiniowane jako $H^n(G, M) = \operatorname{Ext}^n_{KG}(K, M)$, gdzie M jest KG-modułem. Interesujący jest też pierścień kohomologii $H^*(G, K) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(G, K)$, który ma dodatkowo strukturę KG-modułu, a także przestrzeń $\operatorname{Ext}^*_{KG}(M, N) = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Ext}^n_{KG}(M, N)$ będąca $H^*(G, K)$-modułem.

Kategoria $\operatorname{Mod} KG$ jest na ogół skomplikowana. Wiadomo, że jeśli charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to algebra KG jest półprosta i każdy KG-moduł jest sumą prostą prostych modułów. Gdy charakterystyka p ciała K dzieli $|G|$, ale p-podgrupa Sylowa grupy G jest cykliczna, to algebra KG jest skończonego typu reprezentacyjnego i każdy KG-moduł jest sumą prostą skończenie wymiarowych nierozkładalnych modułów.

Gdy żaden z powyższych warunków nie jest spełniony, to algebra KG jest nieskończonego typu reprezentacyjnego. W tym przypadku kategoria $\operatorname{Mod} KG$ jest skomplikowana, w tym sensie, że istnieją moduły patologiczne. Na przykład istnieje moduł M taki, że $M \simeq M \oplus M \oplus M$, ale $M \not\simeq M \oplus M$. Ponadto istnieją moduły M i N takie, że $M \not\simeq N$, ale $M \oplus M \simeq N \oplus N$, a także moduły M i N takie, że $M \not\simeq N$, ale M jest izomorficzne ze składnikiem prostym modułu N oraz N jest izomorficzne ze składnikiem prostym modułu M. Można też pokazać, że dla każdej liczby kardynalnej λ istnieje moduł nierozkładalny mocy większej niż λ.

Istnieje wiele otwartych problemów dotyczących kohomologii. Jednym z nich jest pytanie dla jakich modułów zachodzi nierówność $\dim_K H^*(G, M) \leq 2(3)$. Interesujące jest też zagadnienie, czy istnieje $n \geq 1$ takie, że jeśli $H^j(G, \mathbb{Z}) = 0$, $j \leq n$, to $G = \{e\}$. Ważne są konstrukcje „dobrych” rezolwent projektywnych dla KG-modułów M oraz problem, kiedy KG-moduł o pewnych własnościach jest projektywny.

Każdemu KG-modułowi M można przyporządkować rozmaitość $V_G^r(M)$. Wiadomo, że $\dim V_G^r(M) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy moduł M jest projektywny, oraz $\dim V_G^r \leq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy minimalna rezolwenta projektywna modułu M jest periodyczna, tzn. od pewnego miejsca się powtarza.

Niech R będzie pierścieniem. Moduł M jest płaski wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = 0$, tzn. dla dowolnego ciągu dokładnego $0 \to N \to L$ ciąg $0 \to M \otimes_R N \to M \otimes_R L$ jest dokładny. Równoważnie można powiedzieć, że $M = \varinjlim_\beta \{F_\beta, h_{\beta,\gamma}\}$, gdzie moduły F_β są wolne i skończenie generowane. Dla dowodu rozważmy ciąg $0 \to K \to F \to M \to 0$, gdzie F jest wolnym modułem. Można pokazać, że dla dowolnego skończenie generowanego podmodułu $L \subset K$ istnieje skończenie generowany składnik prosty F_L modułu F oraz homomorfizm $\varphi_L : F_L \to K$ taki, że $\varphi(x) = x$ dla $x \in L$. Tworzymy system $(F_L, h_{L,N})$ gdzie L przebiega wszystkie skończenie generowane podmoduły modułu K. Jeśli $\mathrm{Im}\, \varphi_L \subseteq N$, to definiujemy $h_{L,N}(x) = x - \varphi_L(x)$. Wiadomo, że każdy moduł projektywny jest płaski.

Moduł jest M nazywamy 1-periodycznym, jeśli istnieje ciąg dokładny postaci

$$0 \to M \to P \to M \to 0$$

dla pewnego modułu projektywnego P. Pokażemy, że nie istnieją nieprojektywne 1-periodyczne moduły płaskie. Stąd wynika, że jeśli M jest płaskim RG-modułem, który jest projektywny jako R-moduł, to M jest projektywnym RG-modułem. Istotnie przypuśćmy, że M jest płaskim RG-modułem i rozważmy rezolwentę projektywną

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0.$$

Moduły $M_i = \mathrm{Im}\, f_i$ są płaskie. Mamy ciąg R-modułów

$$0 \to R \to RG \to \overline{R} \to 0,$$

gdzie $u(1) = \sum_{g \in G} g$. Wtedy $\overline{R}$ jest projektywnym R-modułem. Mnożąc tensorowo przez M otrzymujemy ciąg RG-modułów

$$0 \to M_0 \to P_{-1} \to M_{-1} \to 0,$$

gdzie $M_0 = M$ i moduł M_{-1} jest płaski. Postępując analogicznie konstruujemy RG-moduły płaskie M_i, $i < 0$, oraz ciągi dokładne

$$0 \to M_{i-1} \to P_i \to M_i \to 0.$$

Korzystając z tej obserwacji dostajemy ciąg

$$0 \to \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M_j \to \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} P_j \to \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M_j \to 0,$$

a więc moduł $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_j$ jest 1-periodyczny, zatem projektywny.

Podobnie można pokazać, że jeśli $\Lambda = \bigoplus_{g\in G}\Lambda_g$ jest algebrą z gradacją taką, że $\Lambda_g\Lambda_h = \Lambda_{gh}$, oraz M jest płaskim Λ-modułem takim, że M jest projektywnym Λ_e-modułem, to M jest projektywnym Λ-modułem.

Przypomnijmy, że ciąg dokładny

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

nazywamy serwantnym, jeśli dla każdego lewego R-modułu N indukowany ciąg

$$0 \to N\otimes_R M' \to N\otimes_R M \to N\otimes_R M'' \to 0$$

jest dokładny. Moduł jest serwantnie projektywny, jeśli jest składnikiem prostym sumy prostej modułów skończenie przedstawialnych. Dowód faktu, że każdy płaski moduł 1-periodyczny jest projektywny wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Niech M będzie serwantnie periodycznym R-modułem, tzn. takim, że istnieje serwantny ciąg dokładny*

$$0 \to M \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0,$$

w którym wszystkie P_j są serwantnie projektywne. Wtedy M jest serwantnie projektywny oraz powyższy ciąg się rozszczepia.

Ważny jest też następujący fakt.

Twierdzenie. *Jeśli $M = \varinjlim_{\beta\in I} P_\beta$, gdzie $|I| = \aleph_n$, oraz moduły P_β są serwantnie projektywne, to serwantny wymiar projektywny modułu M jest nie większy niż $n{+}1$. Jeśli dodatkowo założymy, że moduły P_β są projektywne, to* $\operatorname{pd} M \le n+1$.

Dowód dla $n = 0$ wygląda następująco. Bez straty ogólności możemy założyć, że M jest granicą systemu

$$P_0 \xrightarrow{f_0} P_1 \xrightarrow{f_1} P_2 \to \cdots .$$

Mamy wtedy ciąg dokładny

$$0 \to \bigoplus_{i=0}^{\infty} P_i \xrightarrow{u} \bigoplus_{i=0}^{\infty} P_i \to M \to 0,$$

gdzie $u(x_0, x_1, \ldots) = (x_0, x_1 - f_0(x_0), x_2 - f_1(x_1), \ldots)$.

System $(M_\beta, h_{\beta,\gamma})$ nazywamy $\aleph_n$-systemem, jeśli dla każdego układu indeksów β_i, $i\in I$, $|I| \le \aleph_n$, istnieje indeks β taki, że $\beta_i \le \beta$.

Twierdzenie. *Jeśli ciąg*

$$0 \to L \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

jest serwantnie dokładny oraz moduły $P_0, \ldots, P_n$ *są serwantnie projektywne, to* L *jest* $\aleph_n$*-sumą skierowaną* $\aleph_n$*-generowanych serwantnie projektywnych podmodułów* L_β*. Jeśli dodatkowo moduł* M *jest płaski oraz moduły* P_i *są projektywne, to podmoduły* L_β *są projektywne.*

Z powyższego twierdzenia natychmiast wynika, że jeśli moduł 1-periodyczny M jest płaski oraz $\aleph_0$-generowany, to jest projektywny.