Pierścienie półniezmienników kołczanów

na podstawie referatu Jerzego Weymana (Boston)

14 maja 2002

Wszystkie rozważane kołczany będą skończone i bez zorientowanych cykli, zaś K oznaczać będzie ustalone ciało algebraicznie domknięte.

Jeśli α jest wektorem wymiaru, to mamy rozmaitość $\mathrm{Rep}(Q,\alpha)$ oraz grupę $\mathrm{SL}(\alpha) = \prod_{x\in Q_0} \mathrm{SL}(\alpha(x))$ działające na rozmaitości $\mathrm{Rep}(Q,\alpha)$. Pierścień półniezmienników to $\mathrm{SI}(Q,\alpha) = K[\mathrm{Rep}(Q,\alpha)]^{\mathrm{SL}(\alpha)}$. Możemy zapisać $\mathrm{SI}(Q,\alpha) = \bigoplus_{\sigma\in(\mathbb{Z}^{Q_0})^*} \mathrm{SI}(Q,\alpha)_\sigma$.

Jeśli V i W są dwiema reprezentacjami kołczanu Q o wektorach wymiaru β i γ odpowiednio, to mamy odwzorowanie

$$d_W^V : \bigoplus_{x\in Q_0} \mathrm{Hom}_K(V(x),W(x)) \to \bigoplus_{a\in Q_1} \mathrm{Hom}_K(V(ta),W(ha)),$$

dane wzorem $d_W^V((f(x))) = (f(ha)V(a) - W(a)f(ta))$. Wtedy $\mathrm{Ker}\, d_W^V = \mathrm{Hom}_Q(V,W)$, zaś $\mathrm{Coker}\, d_W^V = \mathrm{Ext}_Q^1(V,W)$. W szczególności otrzymujemy, że $\dim_K \bigoplus_{x\in Q_0} \mathrm{Hom}_K(V(x),W(x)) = \dim_K \bigoplus_{a\in Q_1} \mathrm{Hom}_K(V(ta),W(ha))$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle\beta,\gamma\rangle_Q = 0$. W tej sytuacji przez c^V oznaczać będziemy funkcję $\mathrm{Rep}(Q,\gamma) \to K$, $W \mapsto \det d_W^V$. Funkcja c^V jest półniezmiennikiem wagi $\langle\beta,-\rangle$. Można pokazać, że $\mathrm{SI}(Q,\gamma)_\sigma = 0$, jeśli σ nie jest postaci $\langle\beta,-\rangle$, oraz przestrzeń $\mathrm{SI}(Q,\gamma)_{\langle\beta,-\rangle}$ jest generowana przez półniezmienniki postaci c^V, gdzie $\langle\beta,\mathbf{dim}\, V\rangle = 0$.

Przypuśćmy, że β i α są dwoma wektorami wymiaru. Przez $N(\beta,\alpha)$ oznaczać będziemy ilość podreprezentacji o wektorze wymiaru β w generycznej reprezentacji o wektorze wymiaru α. Można pokazać, że $N(\beta,\beta+\gamma) = \dim SI(Q,\gamma)_{\langle\beta,-\rangle}$, jeśli $\langle\beta,\gamma\rangle_Q = 0$. Dowód powyższego faktu wykorzystuje obserwację, że licząc wyrażenia po obu stronach równości korzystamy z reguły Littlewooda–Richardsona.

Niech R będzie zbiorem relacji w kołczanie Q. Rozmaitość $\mathrm{Rep}(Q/R,\beta)$ ma rozkład na składowe nieprzywiedlne $\bigcup_j \mathrm{Rep}(Q/I,\beta)_j$. Można badać pierścienie $\mathrm{SI}((Q/R,\beta)_j) = K[\mathrm{Rep}_K(Q/R,\beta)_j]^{\mathrm{SL}(\beta)}$. Będziemy też zakładać, że charakterystyka ciała K jest równa 0, gdyż wtedy grupa $\mathrm{SL}(\beta)$ jest liniowo reduktywna. Jeśli $P_1 \to P_0 \to V \to 0$ jest minimalną prezentacją projektywną reprezentacji V kołczanu (Q/R), to definiujemy $c^V(W)$ jako wyznacznik odwzorowania $\mathrm{Hom}_{Q/R}(P_0, W) \to \mathrm{Hom}_{Q/R}(P_1, W)$, o ile wymiary tych przestrzeni są równe. Można pokazać, że jeśli $V \in \mathrm{Rep}(Q, \beta)$ i $c^V | \mathrm{Rep}(Q/R, \beta)_j \neq 0$, to $c^V = c^{V/IV}$.

Składową $\mathrm{Rep}(Q/R, \beta)_j$ nazywamy wierną, jeśli nie są na niej spełnione relacje spoza R. Jeśli składowa $\mathrm{Rep}(Q/R, \beta)_j$ jest wierna, to przestrzeń $\mathrm{SI}((Q/R, \beta)_j)$ jest generowana przez półniezmienniki c^V takie, że wymiar projektywny V jest nie większy niż 1 oraz $\langle \beta, \mathbf{dim}\, V \rangle_{Q/R} = 0$.

Można pokazać, że twierdzenie o saturacji nie jest prawdziwe dla kołczanów z relacjami. Niech Q będzie kołczanem

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "a_1"] \arrow[r, "a_2"] \arrow[r, bend right, "a_3"'] & y \arrow[r, bend left, "b_1"] \arrow[r, "b_2"] \arrow[r, bend right, "b_3"'] & z \end{tikzcd}$$

ograniczonym przez relacje $R = \{b_s a_s, b_s a_t + b_t a_s\}$ oraz $\beta = (1, 3, 3)$. Istnieje jedyna składowa $\mathrm{Rep}(Q/R, \beta)_1$, dla której $\det(W'(a_1), W'(a_2), W'(a_3)) \neq 0$. Można udowodnić, że $\mathrm{SI}(Q/R, \beta)_1)_\sigma = 0$, ale $\mathrm{SI}((Q/R, \beta)_1)_{2\sigma} \neq 0$, gdzie $\sigma = (0, 1, -1)$.