Zbiór zer półniezmienników dla kołczanów

na podstawie referatu Grzegorza Zwary

14 stycznia 2003

Niech G będzie grupą algebraiczną nad ciałem liczb zespolonych, np. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Przypomnijmy, że reprezentacja grupy G w przestrzeni liniowej V, to homomorfizm grup algebraicznych $G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}} V$. Wiadomo, że $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^*$. Reprezentacje postaci $G \to \mathbb{C}^*$ nazywamy charakterami grupy G. Przez $X(G)$ będziemy oznaczać grupę charakterów grupy G. Funkcję $f \in \mathbb{C}[V]$ będziemy nazywać półniezmiennikiem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje charakter $\chi \in X(G)$ taki, że $f(gv) = \chi(g)f(v)$. Charakter χ nazywamy wagą półniezmiennika f. Przez $\mathrm{SI}(V)_\chi$ będziemy oznaczać podprzestrzeń liniową w $\mathbb{C}[V]$ złożoną z półniezmienników o charakterze χ. Zbiór $\mathrm{SI}(V) = \bigoplus_{\chi \in X(G)} \mathrm{SI}(V)_\chi$ jest pierścieniem, który nazywamy pierścieniem półniezmienników.

Niech $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ oraz $\mathrm{GL}(\mathbf{d}) = \mathrm{GL}(d_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(d_n)$. Wtedy $X(\mathrm{GL}(\mathbf{d})) = \{\chi : \mathrm{GL}(\mathbf{d}) \to \mathbb{C}^* \mid \chi(g_1, \ldots, g_n) = (\det g_1)^{\alpha_1} \cdots (\det g_n)^{\alpha_n}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}^n$. Ponadto dla dowolnego $\mathrm{GL}(\mathbf{d})$-modułu V mamy $\mathrm{SI}(V) = \mathbb{C}[V]^{\mathrm{SL}(\mathbf{d})}$, gdzie $\mathrm{SL}(\mathbf{d}) = \mathrm{SL}(d_1) \times \cdots \times \mathrm{SL}(d_n)$.

Załóżmy, że G-moduł V jest prejednorodny, tzn. w V istnieje otwarta G-orbita Gv_0. W tej sytuacji $G \setminus (Gv_0) = Z_1 \cup \cdots \cup Z_r \cup Z_{r+1} \cup \cdots \cup Z_s$, gdzie Z_i, $i = 1, \ldots, s$, są nieprzywiedlnymi składowymi, przy czym $\mathrm{codim}_V Z_i = 1$, $i = 1, \ldots, r$, oraz $\mathrm{codim}_V Z_i > 1$, $i = r+1, \ldots, s$. Istnieją jedyne z dokładnością do skalara wielomiany nierozkładalne $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[V]$ takie, że $Z_i = Z(f_i)$. Sato i Kimura udowodnili, że w powyższej sytuacji $\mathrm{SI}(V) = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_r]$ oraz wielomiany $f_1, \ldots, f_r$ są algebraicznie niezależne.

Przez Z_V będziemy oznaczać zbiór wspólnych zer wszystkich półniezmienników, które nie są funkcjami stałymi. Innymi słowy $Z_V = Z(f_1, \ldots, f_r)$. Wiemy, że $\mathrm{codim}_V Z_V \leq r$. Interesującym problemem jest pytanie, kiedy $\mathrm{codim}_V Z_V = r$. Motywacją dla studiowania tego problemu jest badanie G-modułowej struktury pierścienia $\mathbb{C}[V]$, gdy G jest grupą reduktywną. Wiadomo bowiem, że w takiej sytuacji $\mathbb{C}[V] = \bigoplus_\lambda (M_\lambda \otimes V_\lambda)$, gdzie M_λ jest nieprzywiedlnym G-modułem, zaś V_λ jest $\mathrm{SI}(V)$-modułem. Gdy $\mathrm{codim}_V Z_V = r$, to moduły V_λ są wolne.

Niech $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ oraz $V = \mathbb{M}_{d_1 \times d_2}(\mathbb{C})$. Definiujemy działanie grupy $\mathrm{GL}(\mathbf{d})$ na przestrzeni V wzorem $(g_1, g_2)m = g_1 m g_2^{-1}$. Innymi słowy $V = \mathbb{C}^{d_1} \otimes (C^{d_2})^*$. Okazuje się, że moduł V jest prejednorodny, gdyż macierze maksymalnego rzędu tworzą orbitę otwartą. Gdy $d_1 \neq d_2$, to $\mathrm{SI}(V) = \mathbb{C}$, zaś gdy $d_1 = d_2$, to $\mathrm{SI}(V) = \mathbb{C}[\det]$. Wtedy $Z_V = Z(\det)$ oraz $\mathrm{codim}_V Z_V = 1$. Można dostrzec, że $V = \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$, gdzie $Q = \cdot \longrightarrow \cdot$.

Niech Q będzie skończonym kołczanem. Przez $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ rozumiemy przestrzeń $\bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathbb{M}_{d_{t\alpha} \times d_{s\alpha}}(\mathbb{C})$. Grupa $\mathrm{GL}(\mathbf{d})$ działa na $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ zgodnie ze wzorem

$$(g_i)_{i \in Q_0}(m_\alpha)_{\alpha \in Q_1} = (g_{t\alpha} m_\alpha g_{s\alpha}^{-1})_{\alpha \in Q_1}.$$

Jeśli $T \in \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$, to $\dim \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d}) - \dim \mathrm{GL}(\mathbf{d})T = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_Q(T, T)$. W szczególności moduł $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ jest prejednorodny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje reprezentacja $T \in \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ taka, że $\mathrm{Ext}^1_Q(T, T) = 0$. Wiadomo, że gdy moduł $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ jest prejednorodny, to kołczan Q nie zawiera zorientowanych cykli. Z drugiej strony, gdy Q jest kołczanem Dynkina, to moduł $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ jest prejednorodny dla dowolnego wektora wymiaru $\mathbf{d}$.

Od tego momentu będziemy zakładać, że moduł $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ jest prejednorodny, a więc istnieje reprezentacja $T \in \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d})$ taka, że $\mathrm{Ext}^1_Q(T, T) = 0$. Wiemy, że $T = \bigoplus_{i=1}^r T_i^{\alpha_i}$, gdzie reprezentacje T_i są nierozkładalne, parami nieizomorficzne, oraz $\alpha_i > 0$. Definiujemy $T^\perp = \{Y \in \mathrm{rep}\, Q \mid \mathrm{Hom}_Q(T, Y) = 0,\ \mathrm{Ext}^1_Q(T, Y) = 0\}$. W naszej sytuacji kategoria $T^\perp$ jest równoważna kategorii $\mathrm{rep}(Q')$ dla pewnego kołczanu Q' takiego, że $|Q'_0| = n - r$, gdzie $n = |Q_0|$. Niech $S_1, \ldots, S_{n-r}$ będą prostymi obiektami w $T^\perp$. Schoefield pokazał, że nieprzywiedlne składowe kowymiaru 1 w $\mathrm{rep}(Q, \mathbf{d}) \setminus \mathrm{GL}(\mathbf{d})T$ są postaci $\{X \in \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d}) \mid \mathrm{Hom}_Q(X, S_i) \neq 0\}$, $i = 1, \ldots, n - r$. Stąd $Z_{\mathrm{rep}(Q,\mathbf{d})} = \{X \in \mathrm{rep}(Q, \mathbf{d}) \mid \mathrm{Hom}_Q(X, S_i) \neq 0,\ i = 1, \ldots, n - r\}$.

Niech Q będzie kołczanem

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr] & \cdot \arrow[d] & \cdot \arrow[dl] \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

oraz $\mathbf{d} = {}^{1}\,{}^{1}_{2}\,{}^{1}$. Jeśli

$$T = \begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[dr, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]}"] & \mathbb{C} \arrow[dl, "{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}"] \\ & \mathbb{C}^2 & \end{tikzcd},$$

to $\mathrm{Ext}^1_Q(T, T) = 0$. Okazuje, że

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "h_1"'] & V_2 \arrow[d, "h_2"] & V_3 \arrow[dl, "h_3"] \\ & V_4 & \end{tikzcd} \in T^\perp$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $[h_1|h_2|h_3]$ jest izomorfizmem. Zatem obiekty proste w $T^{\perp}$ to

$$S_1 = \begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[dr, "1"'] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[dl] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}, \; S_2 = \begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & \mathbb{C} \arrow[d, "1"'] & 0 \arrow[dl] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}, \; S_3 = \begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[dl, "1"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} &Z_{\mathrm{rep}(Q,\mathbf{d})} \\ &= \left\{ \begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "m_1"'] & V_2 \arrow[d, "m_2"'] & V_3 \arrow[dl, "m_3"] \\ & V_4 & \end{tikzcd} \;\middle|\; \det[m_2|m_3] = 0,\ \det[m_1|m_3] = 0, \det[m_1|m_2] = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "m_1"'] & V_2 \arrow[d, "m_2"'] & V_3 \arrow[dl, "m_3"] \\ & V_4 & \end{tikzcd} \;\middle|\; \mathrm{rk}[m_1|m_2|m_3] \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc, że $\dim \mathrm{rep}(Q,\mathbf{d}) - \dim Z_{\mathrm{rep}(Q,\mathbf{d})} = 2 < 3$. Jeśli natomiast $\mathbf{d} = {}^{2}\,{}^{2}_{4}\,{}^{2} = 2({}^{1}\,{}^{1}_{2}\,{}^{1})$, to $\dim \mathrm{rep}(Q,\mathbf{d}) - \dim Z_{\mathrm{rep}(Q,\mathbf{d})} = 3$.

Rozważmy $T_1, \ldots, T_r \in \mathrm{rep}\, Q$ takie, że $\mathrm{Ext}^1_Q(T_i, T_j) = 0$, $i, j = 1, \ldots, r$. Wtedy $\mathrm{Ext}^1_Q(T, T) = 0$ dla każdej reprezentacji T postaci $\bigoplus_{i=1}^{r} T_i^{\lambda_i}$, więc moduł $\mathrm{rep}(Q,\mathbf{d})$ jest prejednorodny dla $\mathbf{d} = \mathbf{dim}\, T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, \mathbf{dim}\, T_i$. Riedtmann i Zwara pokazali, że istnieje liczba naturalna $N = N(T_1, \ldots, T_r)$ taka, że $\dim \mathrm{rep}(Q,\mathbf{d}) - \dim Z_{\mathrm{rep}(Q,\mathbf{d})} = n - r$, jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq N$.

Okazuje się ponadto, że można przyjąć

$$N = \begin{cases} 1 & Q \text{ jest typu } \mathbb{A}_n \text{ lub } \tilde{\mathbb{A}}_n, \\ 2 & Q \text{ jest typu Dynkina}, \\ 3 & Q \text{ jest typu Euklidesa}. \end{cases}$$