O hipotezie Zariskiego–Lipmana

na podstawie referatu Andrzeja Tyca

17 lutego 2004

Przez cały referat k będzie ustalonym ciałem. Przez algebrę rozumieć będziemy przemienną k-algebrę. Wszystkie rozważane produkty tensorowe będą produktami nad k.

Dla algebry A mamy funktor $\mathrm{Der}_k(A,-) : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, A$ dany wzorem $\mathrm{Der}_k(A,M) = \{d \in \mathrm{Hom}_k(A,M) \mid d(ab) = bd(a) + ad(b)\}$. Istnieje A-moduł $\Omega_k(A)$ oraz różniczkowanie $\delta : A \to \Omega_k(A)$ takie, że dla dowolnego $d \in \mathrm{Der}_k(A,M)$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $f : \Omega_k(A) \to M$ taki, że $d = f\delta$ (w szczególności $\mathrm{Der}_k(A,M) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega_k(A),M)$). Wiadomo, że $\Omega_k(A,M) \simeq I/I^2$, gdzie $I = \mathrm{Ker}(A \otimes A \ni a \otimes b \mapsto ab \in A)$. Przy takim utożsamieniu $\delta(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a + I^2$. Moduł $\Omega_k(A)$ nazywamy modułem różniczek Kählera.

Jeśli $A = k[X_1,\dots,X_n]$, to $\Omega_k(A)$ jest A-modułem wolnym o bazie $\delta(X_1)$, $\dots$, $\delta(X_n)$. Wiadomo, że gdy H jest przemienną algebrą Hopfa, to $\Omega_k(A) \simeq A \otimes V$ dla pewnej przestrzeni liniowej V.

Jeśli A jest skończenie generowaną k-algebrą, to $\Omega_k(A)$ jest skończenie generowanym A-modułem (istotnie, jeśli $A = k[a_1,\dots,a_n]$, to $\Omega_k(A) = A\delta(a_1) + \dots + A\delta(a_n)$). Ponadto $\Omega_k(A_S) = \Omega_k(A)_S$ dla dowolnego systemu multiplikatywnego $S \subseteq A$.

Twierdzenie. *Niech A będzie skończenie generowaną k-algebrą. Wówczas:*

(1) $\Omega_k(A) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $A = K_1 \times \cdots K_s$, *gdzie* $K_1, \dots, K_s$ *są skończonymi rozszerzeniami rozdzielczymi ciała* K.

(2) *Załóżmy, że* $\mathrm{char}\, K = 0$. *Jeśli* P *jest ideałem pierwszym algebry* A, *to pierścień lokalny* A_P *jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy moduł* $\Omega_k(A_P)$ *jest wolnym* A_P*-modułem. W szczególności, algebra* A *jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy moduł* $\Omega_k(A)$ *jest projektywny.*

(3) *Załóżmy, że* $\mathrm{char}\, k = p > 0$ *oraz pierścień* $A \otimes \overline{k}$ *nie ma nilpotentów. Jeśli* P *jest ideałem pierwszym algebry* A, *to pierścień lokalny* A_P *jest*

regularny wtedy i tylko wtedy, gdy moduł $\Omega_{\mathbb{F}_p}(A_P)$ *jest wolnym* A_P*-modułem. W szczególności, algebra* A *jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy moduł* $\Omega_{\mathbb{F}_p}(A)$ *jest projektywny.*

Niech A będzie skończenie generowaną k-algebrą. Wiadomo, że jeśli $\Omega_k(A)$ jest projektywnym A-modułem, to $\mathrm{Der}_k(A) = \mathrm{Der}_k(A, A)$ jest projektywnym A-modułem, gdyż $\mathrm{Der}_k(A) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_k(A), A)$. Powyższa obserwacja legła u podstaw następującej hipotezy.

Hipoteza (Zariski–Lipman)**.** *Jeśli* $\mathrm{char}\, k = 0$ *i algebra* A *jest skończenie generowana, to algebra* A *jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy* A*-moduł* $\mathrm{Der}_k(A)$ *jest projektywny. Ogólnie, jeśli* P *jest ideałem pierwszym algebry* A*, to pierścień* A_P *jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{Der}_k(A_P)$ *jest wolnym* A_P*-modułem.*

Pokażemy, że powyższa hipoteza nie jest prawdziwa, gdy algebra A nie jest skończenie generowana. Niech k będzie ciałem charakterystyki 0. Skonstruujemy pierścień lokalny R o następujących własnościach:

(1) R jest dziedziną, $\mathrm{Dim}\, R = 1$, $R \supset k$.

(2) R nie jest regularny.

(3) $\mathrm{Der}_k(R) = 0$.

(4) Moduł $\Omega_k(R)$ nie jest wolny ani skończenie generowany.

(5) $\overline{R}$ (= całkowite domknięcie pierścienia R w ciele ułamków R_0) jest pierścieniem lokalnym regularny, $\mathrm{Der}_k(\overline{R}) = 0$ i $\Omega_k(\overline{R})$ nie jest wolny ani skończenie generowany.

Przykład ten pochodzi z pracy P.Brumetti, Y.Lequain, D.Levcovitz, A.Simis, A note on the Nakai conjecture, PAMS 130 (1), 15–21.

Do konstrukcji pierścienia R potrzebujemy dwa twierdzenia znane z literatury.

Twierdzenie. *Niech* F *będzie ciałem charakterystyki* 0*, niech* Δ *będzie dowolnym podzbiorem w* $\mathrm{Der}(F)$ *i* $C = \bigcap_{d \in \Delta} F^d$*, gdzie* $F^d = \mathrm{Ker}\, d$*. Jeśli istnieją elementy* $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n \in F \setminus \{0\}$ *takie, że*

(1) $d(z_j) = d(y_j) z_j$ *dla* $d \in \Delta$*,* $j = 1, \ldots, n$*,*

(2) *jeśli* $z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \in C$ *dla pewnego* $\alpha \in \mathbb{Z}^n$*, to* $\alpha = 0$ *(lub, jeśli* $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n \in C$ *dla pewnego* $\alpha \in \mathbb{Z}^n$*, to* $\alpha = 0$*),*

to $\operatorname{tr.deg}_C C(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) \geq n + \operatorname{rank}(d(y_j))_{\substack{i=1,\ldots,n \\ d\in\Delta}}$.

Powyższe twierdzenie pochodzi z pracy J.Ax, On Schamuel's Conjecture, Annals of Maths, 93 (1971), 252–268.

Wniosek. $\operatorname{tr.deg}_k k(X, e^X, e^{e^X-1}) = 3$.

Dowód. Wystarczy przyjąć $F = k((X))$, $n = 2$, $\Delta = \{\partial/\partial X\}$ oraz $y_1 = X$, $y_2 = e^X$, $z_1 = e^X$, $Z_2 = e^{e^X-1}$. □

Drugie twierdzenie pochodzi z pracy A.Seidenberg, Derivations and integral closure, Pacific Journal of Mathematics 16 (1966), 167–173]

Twierdzenie. *Niech $d : A \to A$ będzie różniczkowaniem noetherowskiej k-dziedziny A. Wówczas $d(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$, gdzie $d : A_0 \to A_0$ jest (jednym) rozszerzeniem d do A_0.*

Dowód. Zauważmy, że $\overline{A} = \{y \in A_0 \mid$ istnieje $a \in A \setminus \{0\}$ takie, że $A[y] \subset \frac{1}{a}A\} = \{y \in A_0 \mid$ istnieje $a \in A \setminus \{0\}$ takie, że $ay^i \in A$ dla $i \geq 0\}$.

Ustalmy $y \in \overline{A}$ oraz $a \in A\setminus\{0\}$ taki, że $ay^i \in A$ dla $i \geq 0$. Niech $D : A_0 \to A_0[[t]]$ dane będzie wzorem $D(x) = \sum \frac{d^i(x)}{i!}t^i$. Wtedy $D(a)D(y)^n = D(ay^n) \in A[[t]]$, gdyż $D(A) \subseteq A[[t]]$. Stąd dla dowolnego $n \geq 0$ mamy $aD(a)(D(y) - y)^n) = aD(a)(\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} D(y)^i y^{n-i}) \in A[[t]]$, gdyż $D(a)D(y)^i \in A[[t]]$ oraz $ay^i \in A$, $i \geq 0$. Zauważmy, że współczynnik przy t^n w rozważanym szeregu jest równy $\frac{1}{n!}a^2 d(y)^n$, skąd $a^2 d(y)^n \in A$ dla $n \geq 0$, więc $d(y) \in \overline{A}$. □