OSOBLIWOŚCI MAŁYCH KOWYMIARÓW W DOMKNIĘCIACH ORBIT

NA PODSTAWIE REFERATU GRZEGORZA ZWARY

Przez cały referat k oznaczać będzie ustalone ciało algebraicznie domknięte.

1. Rozważmy działanie grupy GL_d na zbiorze macierzy $\mathbb{M}_{d\times d}$ dane wzorem

$$g * M = gMg^{-1}.$$

Pełny system reprezentantów ze względu na to działania tworzą macierze w postaci Jordana. Wiadomo, że domknięcie każdej orbity jest sumą mnogościową skończenie wielu orbit. Dokładniej, niech dla macierzy M, $\mathscr{O}_M$ oznacza jej orbitę. Wtedy $N \in \overline{\mathscr{O}_M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\lambda \in k$ oraz dla każdej liczby całkowitej dodatniej i

$$\dim \operatorname{Ker}(M - \lambda \operatorname{Id})^i \leq \dim \operatorname{Ker}(N - \lambda \operatorname{Id})^i.$$

Okazuje się, że $\operatorname{Reg}(\overline{\mathscr{O}_M}) = \mathscr{O}_M$. Ponadto $\overline{\mathscr{O}_M}$ posiada wymierne osobliwości. W szczególności jest to rozmaitość normalna i Cohena–Macaulaya. Wiadomo też, że jeśli $N \in \overline{\mathscr{O}_M}$, to $\operatorname{codim}_{\overline{\mathscr{O}_M}} \mathscr{O}_N$ jest liczbą parzystą.

Przyjrzymy się teraz jakie osobliwości mogą się pojawić w rozmaitościach $\overline{\mathscr{O}_M}$ w punktach N, dla których $\operatorname{codim}_{\overline{\mathscr{O}_M}} \mathscr{O}_N = 2$. W tym celu wprowadzimy pojęcie gładkiej równoważności rozmaitości z wyróżnionym punktem. Mówimy, że rozmaitości z wyróżnionym punktem (X, x_0) oraz (Y, y_0) są gładko równoważne, jeśli istnieje rozmaitość z wyróżnionym punktem (Z, z_0) oraz odwzorowania gładkie $\varphi : Z \to X$ i $\psi : Z \to Y$ takie, że $\varphi(z_0) = x_0$ oraz $\psi(z_0) = y_0$. Klasę abstrakcji rozmaitości (X, x_0) w powyższej relacji oznaczamy $\operatorname{Sing}(X, x_0)$.

Z macierzą M możemy stowarzyszyć liczby $m_{j,\lambda}$ określone wzorem

$$m_{j,\lambda} = \#\{i \mid \dim \operatorname{Ker}(M - \lambda \operatorname{Id})^i - \dim \operatorname{Ker}(M - \lambda \operatorname{Id})^{i-1} \geq j\}.$$

Jeśli $N \in \overline{\mathscr{O}_M}$ oraz $n_{j,\lambda}$ są zdefiniowane przy pomocy analogicznych wzorów, to $\operatorname{codim}_{\overline{\mathscr{O}_M}} \mathscr{O}_N = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją j oraz λ takie, że

$$\begin{aligned} &n_{j,\lambda} = m_{j,\lambda} - 1, && n_{j+1,\lambda} = m_{j+1,\lambda} + 1, \\ &n_{l,\mu} = m_{l,\mu}, \quad \mu \neq \lambda \text{ lub } l \neq j, j+1. \end{aligned}$$

Zauważmy, że w powyższej sytuacji $m_{j,\lambda} - m_{j+1,\lambda} \geq 2$. Niech $n = m_{m,\lambda} - m_{j+1,\lambda} - 1$. Wtedy

$$\operatorname{Sing}(\overline{\mathscr{O}_M}, N) = \operatorname{Sing}(\{(x, y, z) \in k^3 \mid x^{n+1} + yz = 0\}, (0, 0, 0)\}.$$

Data: 11.10.2005 i 18.10.2005.

2. Niech teraz $t \geq 1$ i rozważmy działanie grupy GL_d na zbiorze $\mathbb{M}_{d\times d}^t$ dane wzorem

$$g * (M_1, \dots, M_t) = (gM_1g^{-1}, \dots, gM_tg^{-1}).$$

Podobnie jak poprzednio dla układu $M = (M_1, \dots, M_t)$ macierzy przez $\mathscr{O}_M$ oznaczać będziemy orbitę $\mathrm{GL}_d * M$.

Dla przykładu, jeśli $t = 2$ oraz $d = 2$, to dla

$$M = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right)$$

mamy $\overline{\mathscr{O}}_M = \mathscr{O}_M \cup \mathscr{O}_N$, gdzie

$$N = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right)$$

oraz $\mathrm{Reg}(\overline{\mathscr{O}}_M) = \overline{\mathscr{O}}_M$ i $\mathrm{codim}_{\overline{\mathscr{O}}_M} \mathscr{O}_N = 1$.

Z drugiej strony, gdy $t = 2$, $d = 4$ oraz

$$M = \left(\begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\right),$$

to $\overline{\mathscr{O}}_M \supset \bigcup_\lambda \mathscr{O}_{N_\lambda}$, gdzie

$$N_\lambda = \left(\begin{bmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&\lambda \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\right).$$

Ponadto dla

$$N = \left(\begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\right),$$

$\mathrm{codim}_{\overline{\mathscr{O}}_M} \mathscr{O}_N = 2$ oraz $\mathrm{Sing}(\overline{\mathscr{O}}_M, N) = \mathrm{Sing}(\{(x,y,z) \in k^3 \mid x^2 + y^2 z = 0\}, (0,0,0))$. Ta druga rozmaitość nosi nazwę „Whitney umbrella”. Wiadomo, że $(0,0,0)$ nie jest w tej rozmaitości osobliwością izolowaną. W szczególności $\overline{\mathscr{O}}_M$ nie jest regularna w kowymiarze 1.

3. Zauważmy, że ciąg $(M_1, \dots, M_t) \in \mathbb{M}_{d\times d}^t$ można traktować jako lewy d-wymiarowy moduł nad algebrą $A = k\langle x_1, \dots, x_t\rangle$. Ogólnie, dla dowolnej skończenie generowanej algebry A' określamy $\mathrm{mod}_{A'}(d)$ jako zbiór wszystkich homomorfizmów algebr $A' \to \mathbb{M}_{d\times d}$.

Przestrzeń styczną do przestrzeni $\mathrm{mod}_A(d) = \mathbb{M}_{d\times d}^t$ w punkcie N można utożsamić ze zbiorem $Z_A^1(N,N)$ k-liniowych odwzorowań $f : A \to \mathbb{M}_{d\times d}$ takich, że dla dowolnych $a, a' \in N$, $f(aa') = N(a)f(a') + f(a)N(a')$. $f \in Z_A^1(N,N)$ wyznacza ciąg $W \in \mathbb{M}_{2d\times 2d}^t$, $W = \left[\begin{smallmatrix} N & f \\ 0 & N \end{smallmatrix}\right]$ oraz ciąg dokładny

$$0 \to N \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \mathrm{Id}_d \\ 0 \end{smallmatrix}\right]} W \xrightarrow{[0\ \mathrm{Id}_d]} N \to 0.$$

Rozszczepialne ciągi dokładne odpowiadają podprzestrzeni

$$B_A^1(N,N) = \{hN - Nh \mid h \in \mathbb{M}_{d\times d}\}.$$

Odwzorowanie $\mathrm{GL}_d \to \mathscr{O}_N$, $g \mapsto g * N$, indukuje surjekcję $\mathbb{M}_{d\times d} = T_{\mathrm{Id}_d} \mathrm{GL}_d \to T_N \mathscr{O}_N$ daną wzorem $h \mapsto hN - Nh$. Powyższe rozumowanie prowadzi do wniosku sformułowanego po raz pierwszy przez Voigta.

Wniosek 3.1. *Mamy kanoniczny izomorfizm*

$$T_N \operatorname{mod}_A(d)/T_N\mathscr{O}_N \simeq \operatorname{Ext}^1_A(N,N). \quad \square$$

Lemat 3.2. *Załóżmy, że $N \in \overline{\mathscr{O}}_M$ oraz, że L jest skończenie wymiarowym lewym A-modułem. Wówczas*

$$\dim_k \operatorname{Hom}_A(L,M) \leq \dim_k \operatorname{Hom}_A(L,N).$$

Dowód. Mamy wolną prezentację

$$A^p \xrightarrow{(a_{i,j})} A^q \to L \to 0$$

modułu L. Stosując funktor $\operatorname{Hom}_A(-,N)$ dostajemy ciąg dokładny

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(L,N) \to \operatorname{Hom}_A(A^q,N) \xrightarrow{\eta(N)} \operatorname{Hom}_A(A^p,N).$$

Zauważmy, że $\operatorname{Hom}_A(A^q,N) \simeq N^q$, $\operatorname{Hom}_A(A^p,N) \simeq N^p$ oraz $\eta : \operatorname{mod}_A(d) \to \mathbb{M}_{pd\times qd}$ dana jest wzorem $\eta(N) = (a_{j,i}(N))$. Teza wynika zatem z faktu, że $\operatorname{Hom}_A(L,N) \simeq \operatorname{Ker}(a_{j,i}(N))$ oraz, że $\dim \operatorname{Ker} \eta(-) : \operatorname{mod}_A(d) \to \mathbb{Z}$ jest półciągła. $\square$

Lemat 3.3. *Załóżmy, że $N \in \overline{\mathscr{O}}_M$ oraz, że*

$$0 \to N \to W \to N \to 0$$

odpowiada elementowi z przestrzeni stycznej $T_{\overline{\mathscr{O}}_M}N$. Wówczas dla dowolnego skończenie wymiarowego A-modułu L takiego, że

$$\dim_k \operatorname{Hom}_A(L,M) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(L,N)$$

zachodzi

$$\dim_k \operatorname{Hom}_A(L,W) = 2\dim_k \operatorname{Hom}_A(L,N).$$

Jako wniosek z powyższego lematu otrzymujemy następujące kryterium regularności.

Twierdzenie 3.4. *Jeśli istnieje ciąg dokładny*

$$0 \to Z \to Z \oplus M \to N \to 0$$

taki, że

$$\dim_k \operatorname{Hom}_A(Z \oplus M, M) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(Z \oplus M, N),$$

to $\overline{\mathscr{O}}_M$ jest regularna w punkcie N.

Twierdzenie 3.5. *Jeśli $N \in \overline{\mathscr{O}}_M$ oraz $\operatorname{codim}_{\overline{\mathscr{O}}_M} \mathscr{O}_N = 1$, to $\overline{\mathscr{O}}_M$ jest regularna w kowymiarze 1.*

Dowód. Wiemy, że istnieje ciąg dokładny $0 \to Z \to Z \oplus M \to N \to 0$, przy czym możemy założyć, że odwzorowanie $Z \to Z$ jest radykalne. Można też założyć, że Z jest nierozkładalny oraz $\dim_k \operatorname{Hom}_A(M,N) =$

$\dim_k \operatorname{Hom}_A(M,M)$. Jeśli $\dim_k \operatorname{Hom}_A(Z,M) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(Z,Z)$, to teza wynika z poprzedniego twierdzenia. Gdy tak nie jest, to istnieje homomorfizm $Z \to N$ taki, że indukowany ciąg dokładny jest nierozszczepialny. Można przy tym wybrać ten homomorfizm tak, aby indukowany ciąg miał postać

$$0 \to Z \xrightarrow{\binom{f}{g}} Z \oplus Y \xrightarrow{(f\ -h)} Z \to 0$$

oraz $\operatorname{codim}_{\overline{\mathscr{O}}_Y} \mathscr{O}_Z = 1$. Okazuje się, że $\operatorname{End}_A(Y)$ ma strukturę $k[[\varepsilon^2,\varepsilon^3]]$-modułu, gdzie ε^2 działa jako gh, zaś ε^3 jako gfh, oraz że badanie tego bimodułu prowadzi nas do sprzeczności. $\square$

Wniosek 3.6. *Jeśli $\overline{\mathscr{O}}_M$ zawiera skończenie wiele orbit, to jest regularna w kowymiarze* 1.

4. Dla kołczanu Q oraz wektora wymiaru $\mathbf{d}$ definiujemy przestrzeń afiniczną $\operatorname{rep}(Q,\mathbf{d})$, na której działa grupa $\operatorname{GL}(\mathbf{d}) = \prod_x \operatorname{GL}(d_x)$.

Twierdzenie 4.1. *Jeśli M jest reprezentacją kołczanu Dynkina Q, to $\overline{\mathscr{O}}_M$ jest regularna w kowymiarze* 2.

Jeśli Q jest kołczanem Dynkina typu $\mathbb{A}_2$, $\mathbf{d} = (2,2)$ oraz $M = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, to $\overline{\mathscr{O}}_M = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid \det A = 0\}$ jest osobliwa w 0 oraz $\dim \overline{\mathscr{O}}_M = 3$.

5. Krzywa normalna stopnia $d \geq 1$ to krzywa liniowa równoważna z obrazem $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$, $\nu(s,t) = (s^d : s^{d-1}t : \cdots : t^d)$. Zauważmy, że $\operatorname{Im}\nu = (x_0 : \ldots : x_d) \mid x_i x_j - x_p x_q = 0,\ i+j = p+q\}$. Przez $\mathscr{C}_d$ oznaczać będziemy stożek afiniczny nad taką krzywą. Oczywiście $\mathscr{C}_1 \simeq k^2$, zaś $\operatorname{Sing}(\mathscr{C}_2,(0,0,0)) = \mathbb{A}_1$.

Twierdzenie 5.1. *Przypuśćmy, że $N \in \overline{\mathscr{O}}_M$, $\operatorname{codim}_{\overline{\mathscr{O}}_M} \mathscr{O}_N = 2$ oraz $N = U \oplus V$, gdzie*

$$\dim_k \operatorname{Hom}_A(U,M) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(U,N),$$
$$\dim_k \operatorname{Hom}_A(M,V) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(N,V).$$

Wówczas, $\operatorname{Sing}(\overline{\mathscr{O}}_M, N) = \operatorname{Sing}(\mathscr{C}_d, 0)$ *dla pewnego* $d \geq 1$.

Dowód. Niech $\mathscr{E} \subset \operatorname{Ext}^1_A(V,U)$ będzie zbiorem elementów odpowiadających ciągom dokładnym postaci

$$0 \to U \to M \to V \to 0.$$

Bongartz pokazał, że przy założeniach opisanych w twierdzeniu $\mathscr{E} \neq \varnothing$, $\operatorname{Sing}(\overline{\mathscr{O}}_M, N) = \operatorname{Sing}(\overline{\mathscr{E}}, 0)$ oraz $\dim \overline{\mathscr{E}} = \operatorname{codim}_{\overline{\mathscr{O}}_M} \mathscr{O}_N = 2$.

Z Twierdzenia 3.4 wynika, że można ograniczyć się do przypadku, gdy

$$\dim_k \operatorname{Hom}(M,U) = \dim_k \operatorname{Hom}(N,U) - 1,$$
$$\dim_k \operatorname{Hom}(V,M) = \dim_K \operatorname{Hom}(V,N) - 1.$$

Zbiór $\mathscr{S} = \{f : U \to M \mid \operatorname{Coker}(f) \approx V\} \subset \operatorname{Hom}_A(U, M)$ jest otwarty gęsty oraz istnieje funkcja regularna $\mathscr{S} \to \mathbb{P}\mathscr{E}$,

$$f \mapsto 0 \to U \xrightarrow{f} M \to V \to 0,$$

zatem wiemy, że $\mathbb{P}\mathscr{E}$ jest krzywą nieprzywiedlną i wymierną.

Ustalmy ciąg

$$0 \to U \xrightarrow{f} M \to V \to 0.$$

Niech $U_0 = U$, $U_1 = M$, oraz $g_1 : U \to M$ będzie takie, że indukowany ciąg dokładny jest nierozszczepialny. Dla $i \geq 1$ takiego, że ciąg

$$0 \to U_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} U_i \to V \to 0$$

jest nierozszczepialny, definiujemy U_{i+1} oraz $g_{i+1} : U_i \to U_{i+1}$ przy pomocy diagramu przemiennego z dokładnymi wierszami

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_i"] & U_i \arrow[r] \arrow[d, "g_{i+1}"] & V \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_i \arrow[r] & U_{i+1} \arrow[r] & V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Niech d będzie największym i dla którego ciąg

$$0 \to U_i \to U_{i+1} \to V \to 0$$

jest nierozszczepialny. Pokazuje się, że $\mathbb{P}\mathscr{E}$ jest wymierną krzywą normalną stopnia d.

Twierdzenie 5.2. *Jeśli M i N są reprezentacjami rozszerzonu kołczanem Dynkina takimi, że* $\operatorname{codim}_{\overline{\mathscr{O}}_M} \mathscr{O}_N = 2$, *to*

$$\operatorname{Sing}(\overline{\mathscr{O}}_M, N) \in \{\mathbb{A}_n, \operatorname{Sing}(\mathscr{C}_n, 0) \mid n \geq 1\}.$$

□