LICZENIE PUNKTÓW ROZMAITOŚCI I WIELOMIANY HALLA

NA POSTAWIE REFERATU STANISŁAWA KASJANA

1. Ogólne sformułowanie problemu

Niech $\mathcal{X}$ będzie schematem zdefiniowanym nad $\mathbb{Z}$. Przez $\varphi_{\mathcal{X}}$ oznaczamy funkcję zdefiniowaną wzorem

$$\varphi_{\mathcal{X}}(q) := |\mathcal{X}(\mathbb{F}_q)|.$$

Chcemy badać, czy $\varphi_{\mathcal{X}} \in \mathbb{Z}[t]$ (precyzyjniej, czy istnieje $F \in \mathbb{Z}[t]$ taki, że $\varphi_{\mathcal{X}}(q) := F(q)$ dla każdego q). W powyższej sytuacji będziemy mówić, że $\varphi_{\mathcal{X}}$ jest funkcją wielomianową.

Dla przykładu zauważmy, że $\varphi_{\mathbb{A}^N}(q) = q^N$ oraz $\varphi_{\mathbb{P}^N}(q) = \frac{q^{N+1}-1}{q-1}$. Ponadto,

$$\varphi_{\mathrm{GL}_N}(q) = (q^N - 1)(q^N - q)\cdots(q^N - q^{N-1}).$$

Aby pokazać, że nie zawsze $\varphi_{\mathcal{X}}$ jest funkcją wielomianową, rozważmy krzywą $\mathcal{X}$ daną równaniem $y^2 = x^3 + ax + b$. Przypomnijmy, że jeśli krzywa $\mathcal{X}$ jest nieosobliwa (równoważnie $4a^3 + 27b^2 \neq 0$), to $\mathcal{X}$ nazywamy krzywą eliptyczna. Hasse udowodnił, że jeśli $\mathcal{X}$ jest krzywą eliptyczną, to

$$||\mathcal{X}(\mathbb{F}_q)| - q - 1| \leq 2\sqrt{q}.$$

Niech $0 \leq \theta_q \leq \pi$ będzie takim kątem, że

$$|\mathcal{X}(\mathbb{F}_q)| - q - 1 = 2\sqrt{q}\cos\theta_q.$$

Hipoteza Sato–Tata (potwierdzona dla szerokiej klasy przykładów) mówi, że dla dowolnych $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{p \leq N : \alpha \leq \theta_q \leq \beta\}|}{|\{p \leq N\}|} = \tfrac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^\theta d\theta,$$

co wyklucza możliwość, że $\varphi_{\mathcal{X}} \in \mathbb{Z}[t]$.

2. Zliczanie podmodułów

Niech Λ będzie skończenie generowaną i wolną $\mathbb{Z}$-algebrą. Dla ciała k piszemy $\Lambda^{(k)} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Zakładamy, że istnieje zbiór I_Λ taki, że dla każdego ciała k istnieją $\Lambda^{(k)}$-moduły $M_i(k)$, $i \in I_\Lambda$, którą tworzą układ reprezentantów klas izomorfizmu nierozkładalnych $\Lambda^{(k)}$-modułów. Ponadto żądamy, aby wymiar $\dim_k \mathrm{Hom}_{\Lambda^{(k)}}(M_i(k), M_j(k))$ nie zależał od

Data: 10.12.2019.

k (tę wspólną wartość oznaczamy $\dim \operatorname{Hom}(M_i, M_j)$). Jeśli $\alpha\colon I_\Lambda \to \mathbb{N}$, to definiujemy

$$M_\alpha(k) := \bigoplus_{i\in I_\Lambda} M_i(k)^{\alpha(i)}.$$

Przykładem takiej algebry jest $\Lambda = \mathbb{Z}[t]/t^N$. W tym przypadku, $I_\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $M_i(k) := k[t]/t^i$. Podobnie, gdy

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z}[t]/t^n \end{bmatrix},$$

to $I_\Lambda := \{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1\}$, oraz

$$M_{i,0}(k) := (0 \to k[t]/t^i) \qquad \text{i} \qquad M_{i,1}(k) := (k \xrightarrow{t^{i-1}} k[t]/t^i).$$

Innymi przykładami takich algebry są algebry postaci $\mathbb{Z}Q$, gdzie Q jest kołczanem Dynkina.

Dla $\alpha, \beta, \gamma\colon I_\Lambda \to \mathbb{N}$ i ciała k, niech

$$\mathcal{X}^\beta_{\alpha,\gamma}(k) := \{U \le M_\beta(k) : U \simeq M_\alpha(k) \text{ i } M_\beta(k)/U \simeq M_\gamma(k)\}.$$

Wtedy $\mathcal{X}^\beta_{\alpha,\gamma}$ jest $\mathbb{Z}$-schematem i kładziemy $\varphi^\beta_{\alpha,\gamma} := \varphi_{\mathcal{X}^\beta_{\alpha,\gamma}}$. Wiadomo, że jeśli $\Lambda = \mathbb{Z}[t]/t^N$ lub $\Lambda = \mathbb{Z}Q$ dla kołczanu Dynkina Q, to $\varphi^\beta_{\alpha,\gamma}$ są funkcjami wielomianowymi.

3. Współczynnik wiodący

Jeśli

$$\varphi_{\mathcal{X}} = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0,$$

to z twierdzenia Langa–Weila wynika, że a_n jest liczbą składowych maksymalnego wymiaru schematu $\mathcal{X}$.

4. Wielomiany Halla

Aby pokazać, że $\varphi^\beta_{\alpha,\gamma}$ są funkcjami wielomianowymi, można postępować następująco:

- pokazać, że $\varphi^\beta_{i,\gamma}$ jest funkcją wielomianowa dla dowolnych $i \in I_\Lambda$ oraz β, γ;
- poprzez indukcję na $\dim \operatorname{End}(M_\alpha)$ pokazać, że $\varphi^\beta_{\alpha,\gamma}$ jest funkcją wielomianową.

Aby wykonać krok inducyjny, załóżmy, że $\alpha = \alpha' + \alpha''$ (a więc $M_\alpha(k) = M_{\alpha'}(k) \oplus M_{\alpha''}(k)$ dla każdego k). Wtedy mamy równość

$$\sum_\delta \varphi^\delta_{\alpha',\alpha''} \varphi^\beta_{\delta,\gamma} = \sum_\rho \varphi^\beta_{\alpha',\rho} \varphi^\rho_{\alpha'',\gamma},$$

która jest konsekwencją łączności w algebrze Halla. Stąd

$$\varphi^\beta_{\alpha,\gamma} = \frac{1}{\varphi^\alpha_{\alpha',\alpha''}} \left(\sum_\rho \varphi^\beta_{\alpha',\rho} \varphi^\rho_{\alpha'',\gamma} - \sum_{\delta\neq\alpha} \varphi^\delta_{\alpha',\alpha''} \varphi^\beta_{\delta,\gamma} \right).$$

Z założenia indukcyjnego

$$\sum_{\rho} \varphi^{\beta}_{\alpha',\rho} \varphi^{\rho}_{\alpha'',\gamma} - \sum_{\delta \neq \alpha} \varphi^{\delta}_{\alpha',\alpha''} \varphi^{\beta}_{\delta,\gamma} \in \mathbb{Z}[t] \qquad \text{i} \qquad \varphi^{\alpha}_{\alpha',\alpha''} \in \mathbb{Z}[t].$$

Korzystając z obserwacji, że jeśli $F, G \in \mathbb{Q}[t]$ oraz $\frac{F(m)}{G(m)} \in \mathbb{Z}$ dla nieskończenie wielu $m \in \mathbb{Z}$, to $\frac{F}{G} \in \mathbb{Q}[t]$, dostajemy, iż $\varphi^{\beta}_{\alpha,\gamma} \in \mathbb{Q}[t]$. Ponieważ dodatkowo $\varphi^{\alpha}_{\alpha',\alpha''}$ jest wielomianem unormowanym (gdyż odpowiednia rozmaitość jest nieprzywiedlna), więc $\varphi^{\beta}_{\alpha,\gamma} \in \mathbb{Z}[t]$.

Powyższa strategia została zastosowana z powodzeniem przez Autora oraz Kosakowską w przypadku $\Lambda := \left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z}[t]/t^n \end{smallmatrix}\right]$.