Adam Jakubowski

TWIERDZENIA GRANICZNE DLA SUM ZALEŻNYCH ZMIENNYCH LOSOWYCH O WARTOŚCIACH W PRZESTRZENI HILBERTA

Praca doktorska
wykonana w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
w Toruniu

Promotor:
Prof.dr hab. Edward Sąsiada

T o r u ń 1982.

Autor serdecznie dziękuje
Panu Profesorowi Edwardowi Sąsiadzie
Panu Profesorowi Robertowi Bartoszyńskiemu
Panu Doktorowi Andrzejowi Kłopotowskiemu
za inspirację i krytyczne uwagi dotyczące
redakcji pracy.

W S T Ę P

§ 1. ZASADA P. LÉVY'EGO.

B.M.Brown /[5]/, uzyskał w 1971 roku następujący rezultat.

TWIERDZENIE.

Niech $\underline{\underline{\mathfrak{X}}} = \{ X_{nk};\ 1 \leqslant k \leqslant k_n;\ n \in \mathbb{N} \}$ będzie tablicą różnic martyngałowych względem ciągu filtracji $\underline{\underline{\mathfrak{F}}} = \{\mathfrak{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\mathfrak{F}_{nk};\ 0 \leqslant k \leqslant k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Niech $EX^2_{nk} < +\infty$; $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $n\in\mathbb{N}$; i niech spełnione będą warunki

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant k_n} E\,(X^2_{nk}|\mathfrak{F}_{n,k-1}) \xrightarrow[P]{} 1 .$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant k_n} E\,(X^2_{nk}\, I\,(\,|X_{nk}|>\varepsilon)|\mathfrak{F}_{n,k-1}) \xrightarrow[P]{} 0; \quad \varepsilon > 0$$

Wówczas ciąg $\{ S_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant k_n} X_{nk} \}_{n\in\mathbb{N}}$ sum wierszowych tablicy $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ jest zbieżny wg rozkładu do standardowego rozkładu normalnego N/0,1/ $\square$

Łatwo zauważyć, że jeśli zmienne tablicy $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ są w wierszach niezależne i $\mathfrak{F}_{nk} = \mathfrak{F}^0_{nk} = \sigma(X_{nj};\ j \leqslant k)$, warunki powyższego twierdzenia są warunkami Tw.Lindeberga-Fellera.

Tw. Browna jest więc uogólnieniem klasycznego rezultatu dla niezależnych zmiennych losowych. Uogólnienie to skonstruowane jest wg reguły, która nazywana będzie Zasadą P.Lévy'ego /Paul Lévy był autorem pierwszych twierdzeń granicznych dla martyngałów - [24] /.

Niech $T(\mu)$ będzie twierdzeniem granicznym /TG/ o zbieżności do μ rozkładów sum zmiennych losowych niezależnych. Pod tym pojęciem rozumiane jest twierdzenie, którego teza mówi, że $\mathcal{L}(S_n) = \mathcal{L}\left(\sum_{1\leq k\leq k_n} X_{nk}\right) \Rightarrow \mu$, a założenia są postaci

1/ $\underline{\underline{\mathfrak{X}}} = \{X_{nk};\ k\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\}$ jest tablicą niezależnych w wierszach zmiennych losowych

2/ $f_i(k_n, E(g_i(X_{n1})), \ldots, E(g_i(X_{nk})), \ldots) \rightarrow h_i(\mu)$; $i\in I$.

gdzie I jest zbiorem przeliczalnym, f_i są funkcjami borelowskimi na $\mathbb{N}_0\times\mathbb{R}^\infty$, g_i - funkcjami borelowskimi na $\mathbb{R}^1$, a $h_i(\mu)$ tworzą układ liczbowych charakterystyk rozkładu μ.

ZASADA P. LÉVY'EGO /ZL/

Z twierdzenia $T(\mu)$ uzyskujemy twierdzenie $T'(\mu)$ prawdziwe dla d o w o l n e j tablicy $\underline{\underline{\mathfrak{X}}} = \{X_{nk}\}$ zmiennych losowych poprzez

/i/ zamianę wartości oczekiwanych w warunkach tw. $T(\mu)$ na warunkowe wartości oczekiwane $g_i(X_{nk})$ względem $\mathcal{F}_{n,k-1}$, gdzie $\underline{\underline{\mathcal{F}}} = \{\underline{\mathcal{F}_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem takich filtracji, że ciąg $\underline{\mathfrak{X}_n} = \{X_{nk};\ k\in\mathbb{N}\}$ jest adaptowany do $\underline{\mathcal{F}_n} = \{\mathcal{F}_{nk};\ k\in\mathbb{N}_0\}$; $n\in\mathbb{N}$.

/ii/ zastąpienie w warunkach tw. $T(\mu)$ zbieżności ciągów liczbowych przez zbieżność wg prawdopodobieństwa otrzymanych w punkcie /i/ zmiennych losowych.

Twierdzenie skonstruowane wg ZL nazywane jest martyngałowym twierdzeniem granicznym /MTG/.

Pierwszym MTG było przytoczone już Tw.Browna. Dalsze przykłady realizacji ZL znalazły się w pracach: A.Dvoretzky [9] /1971 - centralne MTG, przypadek skończonej wariancji/, B.M.Brown, G.K.Eagleson [7] /1971 - przypadek zbieżności do rozkładów nieskończenie podzielnych ze skończoną wariancją/, A.Kłopotowski [22] /1977 - zbieżność zależnych wektorów losowych w $\mathbb{R}^d$ do rozkładu nieskończenie podzielnego/, H.Walk [38] /1977 - uogólnienie Tw.Browna na przypadek zmiennych losowych o wartościach w przestrzeni Hilberta/, A.Jakubowski [19] /1980 -uogólnienie twierdzeń pracy [22] do przypadku przestrzeni Hilberta/.

Jak pokazał J.Rosiński [33] /1981/, w dowolnej, rzeczywistej i ośrodkowej przestrzeni Banacha, ZL już nie funkcjonuje.

Niedawno, I.Helland [15], udowodnił, że z CMTG wynikają centralne twierdzenia graniczne dla martyngałów typu McLeisha /[27], 1974/. Tym samym oba nurty MTG zostały ujednolicone.

Równolegle do MTG rozwijane były ich funkcjonalne odpowiedniki /prace B.M.Browna [6], D.L.McLeisha [27], H.Rootzéna [32], R.Durveta i S.I.Resnicka [8], P.Gänsslera i E.Häuslera [10]/. Uzyskały one ostatnio naturalne rozszerzenie na przypadek semimartyngałów, w pracach R.Lipcer, A.Sziriajew /[26], 1980/ i J.Jacod, A.Kłopotowski, J.Memin /[17], 1982/.

Należy podkreślić, że Z.L. nie jest udowodnionym twierdzeniem: każde z wymienionych wyżej MTG, wykazywane było oddzielnie, w sposób oparty na oryginalnym dowodzie odpowiedniego twierdzenia dla sum niezależnych zmiennych losowych z pokonaniem licznych trudności natury technicznej. Ponadto wszystkie te twierdzenia stanowią odpowiedniki mniej, lub bardziej szczególnych przypadków rozwiązania centralnego problemu granicznego. A w sformułowaniu ZL jest mowa o d o w o l n y m TG.

§ 2. TREŚĆ PRACY

Celem pracy jest dowód Uogólnionej Zasady P. Lévy'ego /UZL/ w rzeczywistej, ośrodkowej przestrzeni Hilberta, oraz pokazanie najważniejszych zastosowań UZL: martyngałowych twierdzeń granicznych dla sum zmiennych losowych o wartościach w przestrzeni Hilberta i ich funkcjonalnych odpowiedników.

Rozdział I poświęcony jest Uogólnionej Zasadzie P. Lévy'ego.

§§ 1. i 2. mają charakter przygotowawczy i zawierają ogólne fakty dotyczące słabej zbieżności rozkładów na przestrzeniach metrycznych.

W § 3. definiujemy układ podstawowy $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\sigma}})$ dla twierdzenia granicznego oraz wprowadzamy prognozowalne charakterystyki rozkładu $\mu(\sigma_n)$ sum wierszowych $S(\sigma_n)$ /jako sploty μ_{nk} - regularnych rozkładów warunkowych X_{nk} względem $\mathcal{F}_{n,k-1}$: $\mu(\sigma_n) = \boxed{*}_{1 \leq k \leq \sigma_n} \mu_{nk}$/.

Podstawowe związki między sumami $S(\sigma_n)$ a rozkładami losowymi $\mu(\sigma_n)$ badane są w § 4.: m.in., w Tw.A /4.4/ pokazano, że z ciasności prognozowalnych charakterystyk $\{\mu(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ wynika ciasność sum $\{S(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$.

§ 5. zawiera dowód UZL - Tw. B./5.1/, a w § 6. dyskutowany jest sposób uproszczenia tego dowodu w przypadku skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta.

Uogólniona Zasada P. Lévy'ego stwierdza, że zbieżność wg p-stwa prognozowalnych charakterystyk $\mu(\sigma_m)$ do /nielosowego/ rozkładu μ :

/Z/ $\mu(\sigma_m) \underset{P}{\Rightarrow} \mu$.

pociąga ciasność ciągu sum $\{S(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$/jest to oczywiste w świetle Tw.A/, oraz fakt, że każdy rozkład graniczny ν dla ciągu $\mathcal{L}(S(\sigma_m))$ spełnia równanie w splotach:

/R/ $\nu * \mu = \mu^2$

W szczególności, jeżeli jedynym rozwiązaniem powyższego równania jest μ, sumy $S(\sigma_m)$ są zbieżne wg rozkładu do μ .

Tw. B. nazwane zostało U o g ó l n i o n ą ZL z następujących powodów:

/i/ Jeżeli μ jest rozkładem i $T(\mu)$ jest twierdzeniem granicznym /dla niezależnych zmiennych losowych/, to łatwo pokazać, że warunki tw. $T'(\mu)$ implikują założenie /Z/ Tw.B. Jeżeli ponadto μ jest jedynym rozwiązaniem równania /R/, wówczas ZL /dla μ i twierdzenia $T(\mu)$/jest wnioskiem z Tw.B.

/ii/ Założenie /Z/ może być sprawdzone przy pomocy innych metod, niż opisana w punkcie /i/, a więc Tw.B. może funkcjonować niezależnie od ZL.

UZL, w przedstawionej formie, pozostawia otwarty problem, czy $\mathcal{L}(S(\sigma_m)) \Rightarrow \mu$ w przypadku dowolnego μ . Być może, ograniczając się jedynie do ZL i odpowiednio wzbogacając przyjętą definicję twierdzenia granicznego, można zapewnić automatyczne spełnienie warunku jednoznaczności rozwiązania równania /R/. W każdym razie, problem jednoznaczności granicy nie występuje w znanych autorowi konsekwencjach Tw.B.

Rozdział II zawiera przykłady zastosowań UZL - martyngałowe twierdzenia graniczne.

W § 7, w oparciu o rozwiązanie CPG w przestrzeni Hilberta i procedurę randomizacyjną /Stw. 7.2,/, dowiedzione jest MTG dla składników warunkowo infinitezymalnych - Tw. C /7.3/. Podany jest również przykład nietrywialnego MTG, w którym zmienne losowe nie muszą być warunkowo infinitezymalne /Tw. 7.5/. Twierdzenie to pokazuje, że zakres zastosowań UZL jest istotnie szerszy, niż klasa twierdzeń mieszczących się w Tw.C.

Z Tw.C łatwo jest uzyskać centralne twierdzenie graniczne dla tablic różnic martyngałowych /TRM/ - Tw.8.2, które charakteryzuje się szczególną prostotą nakładanych warunków. Dowód Tw. 8.2. w przypadku nieskończenie wymiarowym przeprowadzony jest w § 8.

Wreszcie w § 9. dyskutowane są możliwości uogólnienia Tw.B. pod kątem zastąpienia zbieżności prognozowalnych charakterystyk do n i e l o s o w e g o rozkładu przez, wydawałoby się, bardziej adekwatną do stosowanego aparatu, zbieżność do rozkładu losowego.

W Przykładzie 9.1. pokazano, że ze zbieżności /L/ $\mu(\sigma_m) \underset{P}{\Rightarrow} \mu(\cdot,\omega)$, gdzie $\mu(\cdot,\omega)$ jest i s t o t n i e losowym rozkładem, nie wynika, w ogólności, zbieżność $\mathcal{L}(S(\sigma_m)) \Rightarrow E\mu$.

Okazuje się jednak, że istnieje pewna klasa układów podstawowych /ciągi normowane/, dla których założenie zbieżności /L/ jest warunkiem wystarczającym do pełnego określenia granicy. Fakt ten stanowi treść Tw. 9.2. Wnioskiem z Tw. 9.2. jest TG dla ciągów ściśle stacjonarnych /Przykład 9.3./.

W Rozdziale III badane są funkcjonalne odpowiedniki MTG, jako konsekwencje UZL.

Pojęcia teorii funkcjonalnej zbieżności procesów oraz przystosowane do potrzeb pracy podstawowe rezultaty /Tw.10.1/ umieszczone są w § 10.

W § 11. wprowadzono pojęcia układu podstawowego $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\underline{\Sigma}})$ dla funkcjonalnego twierdzenia granicznego, ciągu procesów $\{X_n = X_n(\underline{\mathfrak{X}_n}, \underline{\mathfrak{F}_n}, \Sigma_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ generowanego przez układ podstawowy i ciągu prognozowalnych charakterystyk rozkładu $\{\tilde{\mu}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ procesów $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Funkcjonalna Zasada P. Lévy'ego - Tw. D /12.1/ - okazuje się wnioskiem z UZL i Tw. 10.1. Zastosowanie /w formie najbardziej ogólnej/ FZL do uzyskania odpowiedniego funkcjonalnego MTG, utrudnione jest przez brak odpowiedniego twierdzenia dla procesów o przyrostach niezależnych. Lukę tę zapełnia Tw. E /13.2/, dowiedzione w § 13. Natychmiastową konsekwencją Tw.E i FZL jest Tw. F /13.6/ - funkcjonalne martyngałowe twierdzenie graniczne. Z kolei, przy pomocy Tw. F., wykazana jest część dostateczna zasady niezmierniczości dla TRM w przestrzeni Hilberta - Tw. G./14.1/. Konieczność warunków Tw.G. sprawdzona jest częściowo w oparciu o jednowymiarową wersję tego twierdzenia /[10]/.

W uzupełnieniu przytoczone zostały po pierwsze: podstawowe pojęcia aparatu miar losowych /§ 15/ - używane w pracy bez uprzedniego wyjaśnienia - i po drugie: kryteria ciasności miar losowych /Tw. 16.1 i wnioski/, stanowiące podstawę techniki stosowanej w pracy. Mimo, że rezultaty § 16 nie są bezpośrednio związane z tematyką pracy, autor zdecydował się na ich zamieszczenie ze względu na brak źródeł zawierających odpowiednik Tw. 16.1.

Wszystkie rezultaty dotyczące słabej zbieżności miar na przestrzeniach metrycznych, z których skorzystano w pracy bez podania odnośników do literatury, zaczerpnięto z książek P.Billingsley "Convergence of Probability Measures" i K.R. Parthasarathy "Probability Measures on Metric Spaces". Podobnie, jako źródło wykorzystanych faktów z teorii martyngałów służyć może książka J.Neveu "Discrete-Parameter Martingales".

Rozdział I
UOGÓLNIONA ZASADA P. LÉVY'EGO

§ 1. Słaba zbieżność miar na przestrzeniach metrycznych.

Niech $(\mathcal{H}, d)$ będzie ośrodkową i zupełną przestrzenią metryczną z metryką d. Oznaczmy przez $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ σ- algebrę podzbiorów borelowskich $\mathcal{H}$.

Pod pojęciem "miara na $\mathcal{H}$" rozumieć będziemy σ- addytywną i nieujemną funkcję na $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$.

Niech $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ będzie zbiorem miar skończonych /tzn. $M \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$, jeśli $M(\mathcal{H}) < +\infty$/.

DEFINICJA 1.1. Ciąg $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ jest słabo zbieżny do $M_\infty \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$, jeżeli ma miejsce

/1.1/ $\int f(x) M_n(dx) \to \int f(x) M_\infty(dx)$; $f \in CB(\mathcal{H})$,

gdzie $CB(\mathcal{H})$ jest przestrzenią funkcji ciągłych i ograniczonych na $\mathcal{H}$. Zapisujemy: $M_n \Rightarrow M_\infty$ $\square$

Słabą zbieżność w $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ można zmetryzować w sposób ośrodkowy i zupełny przy pomocy tzw. metryki Lévy'ego-Prochorowa /zob. [29] , [30]/. W szczególności, w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ następujące własności podzbioru $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ są równoważne.

/i/ $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ jest relatywnie zwarty /tzn. każdy nieskończony podzbiór zbioru $\mathcal{K}$ posiada punkt skupienia w $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ /

/ii/ $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ jest warunkowo zwarty /tzn. jego domknięcie $\overline{\mathcal{K}}$ jest zwarte w $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ /.

Kluczową rolę w badaniu słabej zbieżności miar odgrywa

TWIERDZENIE 1.2. /Prochorow,[30]/

Zbiór $\{M_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki

/1.2/ $\sup\limits_{i\in I} M_i(\mathcal{H}) < +\infty$

/1.3/ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zwarty podzbiór $K_\varepsilon \subset \mathcal{H}$ o własności $\sup\limits_{i\in I} M_i(K_\varepsilon^c) < \varepsilon$ $\square$

Zbiór $\{M_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ spełniający /1.3/ nazywamy jednostajnie ciasnym /lub krócej: c i a s n y m /.

Zauważmy, że zbiór $\mathcal{M}_1(\mathcal{H}) = \{ M \in \mathcal{M}(\mathcal{H});\ M(\mathcal{H}) = 1\}$ jest domknięty w topologii słabej zbieżności /a więc z topologią indukowaną z $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ może być również zmetryzowany jako przestrzeń ośrodkowa i zupełna/. Elementy $\mathcal{M}_1(\mathcal{H})$ nazywać będziemy rozkładami na $\mathcal{H}$ i w sytuacji, gdy nie jest istotne, że pochodzą one od pewnego elementu losowego w $\mathcal{H}$, oznaczać będziemy małymi literami alfabetu greckiego λ, μ, ν.

Niech $\{X_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}} = \{X_n : (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n) \longrightarrow (\mathcal{H}, \mathcal{B}_{\mathcal{H}})\}$

będzie ciągiem mierzalnych elementów losowych w $\mathcal{H}$.
Słabą zbieżność rozkładów ciągu $\{X_n\}$:

/1.4/ $\mathcal{L}(X_n) = P_n \circ X_n^{-1} \Rightarrow P_\infty \circ X_\infty^{-1} = \mathcal{L}(X_\infty)$

na ogół wygodniej jest zapisywać jako zbieżność $\{X_n\}$ wg rozkładu /w $\mathcal{H}$/ do X_∞ :

/1.5/ $X_n \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathcal{H})]{} X_\infty$.

Podobnie, zgodnie z tradycją zapoczątkowaną przez L.Le Cama mówimy, że ciąg $\{X_n\}$ jest c i a s n y, jeżeli rozkłady $\{\mathcal{L}(X_n)\}$ spełniają /1.3/. Z Tw. 1.2, wynika, że w rozpatrywanym przez nas przypadku / $\mathcal{H}$ - przestrzeń polska/ pojęcia ciasności ciągu $\{X_n\}_{n\in N}$ i relatywnej zwartości ciągu $\{\mathcal{L}(X_n)\}_{m\in N}$ są równoważne.

Zbieżność wg p-stwa / z p-stwem 1/ ciągu $\{X_n\}_{n\in N}$ mierzalnych elementów losowych w $\mathcal{H}$ do mierzalnego elementu losowego X_∞ oznaczać będziemy w zwykły sposób:

/1.6/ $X_n \xrightarrow[P]{} X_\infty$ / $X_n \to X_\infty$ P - p.w./

§ 2. Zbieżność wg rozkładu zmiennych losowych o wartościach w przestrzeni Hilberta.

Niech H będzie ośrodkową i rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Mierzalne elementy losowe w $(H, \mathcal{B}_H)$ nazywać będziemy zmiennymi losowymi w H.

Ponieważ H jest ośrodkową, σ- algebra zbiorów borelowskich $\mathcal{B}_H$ jest generowana przez ciągłe funkcjonały liniowe na H:

/2.1/ $\mathcal{B}_H = \sigma\left(\langle \cdot , y\rangle \ ; y\in H\right)$

Element losowy $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow H$ jest więc zmienną losową w H, jeżeli dla każdego $y\in H$ funkcja $\langle X, y\rangle : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}^1$ jest rzeczywistą zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Istnieje prosta charakteryzacja słabej zbieżności rozkładów na H /a tym samym i zbieżności wg rozkładu zmiennych losowych w H /.

Przypomnijmy, że funkcją charakterystyczną $\hat{\mu}$ rozkładu $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$ nazywamy odwzorowanie

/2.2/ $H \ni y \longmapsto \hat{\mu}(y) := \int \exp(i \langle y, x \rangle)\, \mu(dx)$.

TWIERDZENIE 2.1. /[29]/.

Niech $\{\mu_n\}_{n \in \overline{N}} \subset \mathcal{M}_1(H)$ będzie ciągiem rozkładów na H. Ciąg $\{\mu_n\}_{n \in N}$ jest słabo zbieżny do μ_∞ / $\mu_n \Rightarrow \mu_\infty$/ wtedy i tylko wtedy, gdy spłnione są następujące dwa warunki:

/2.3/ ciąg $\{\mu_n\}_{n \in N}$ jest relatywnie zwarty

/2.4/ $\hat{\mu}_n(y) \to \hat{\mu}_\infty(y)$; $y \in G$,

gdzie G jest pewnym gęstym podzbiorem H $\square$

W przypadku skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta, warunek /2.3/ wynika z /2.4/, jeśli tylko G zawiera pewne otoczenie zera.

Jeżeli dim H = $+\infty$, niezbędne jest oddzielne kryterium relatywnej zwartości rozkładów na H. Kryterium takie podał Parthasarathy /[29]/. Oparte jest ono na pojęciu warunkowo zwartego zbioru S - operatorów.

Nieujemnie określony, symetryczny operator $T : H \to H$ nazywamy S-operatorem, jeżeli w pewnej bazie ortonormalnej $\{e_i\}_{i \in N} \subset H$ posiada on skończony ślad:

/2.5/ $tr(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Te_i, e_i \rangle < +\infty$.

Łatwo dowodzi się, że ślad S-operatora nie zależy od wyboru bazy. Zbiór S-operatorów na H oznaczać będziemy przez $\mathcal{S}$.

Niech $\{T_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \subset \mathcal{S}$. Powiemy, że T_n zmierza do T_∞ / w $\mathcal{S}$ /, jeżeli

/2.6/ $\operatorname{tr}(T_n) \to \operatorname{tr}(T_\infty)$.

/2.7/ $\langle T_n y, y\rangle \to \langle T_\infty y, y\rangle$; $y \in H$.

Tak określoną zbieżność S-operatorów, można zmetryzować w sposób ośrodkowy i zupełny, przy pomocy sekwencjalnie ciągłego odwzorowania $\mathcal{S}$ na zbiór nieujemnie określonych, symetrycznych operatorów Hilberta-Schmidta:

$$I^{1/2} : \mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}^{1/2}$$

$$I^{1/2}(T) = T^{1/2}$$

Łatwo jest teraz podać kryterium warunkowej zwartości zbiorów w $\mathcal{S}$, opierając się na następującym ogólnym kryterium zwartości w przestrzeni Hilberta:

TWIERDZENIE 2.2.

Podzbiór K ośrodkowej przestrzeni Hilberta jest warunkowo zwarty wtedy, i tylko wtedy, gdy jest ograniczony i skoncentrowany na skończenie wymiarowych podprzestrzeniach, tzn.

/2.8/ $\sup\limits_{x\in K} \|x\| < +\infty$.

oraz w pewnej bazie ortonormalnej $\{e_i\} \subset H$

/2.9/ $\sup\limits_{x\in K} r_N^2(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

gdzie

/2.10/ $r_N^2(x) = \sum\limits_{i=N}^{\infty} \langle x, e_i\rangle^2$; $x \in H$.

Jeżeli $K \subset H$ jest warunkowo zwarty, wówczas /2.9/ ma miejsce w dowolnej bazie ortonormalnej. $\square$

WNIOSEK 2.3.

Podzbiór $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ jest warunkowo zwarty w topologii wyznaczanej przez zbieżność /2.6/ - /2.7/ /krótko: warunkowo zwarty/ wtedy i tylko wtedy, gdy

/2.11/ $\sup_{T \in \mathcal{S}_0} \operatorname{tr}(T) < +\infty$.

/2.12/ $\sup_{T \in \mathcal{S}_0} \sum_{i=N}^{\infty} \langle Te_i, e_i \rangle \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

gdzie $\{e_i\}$ jest pewną bazą ortonormalną w H.

Warunkowa zwartość $\mathcal{S}_0$ pociąga /2.12/ w dowolnej bazie $\{e_i\} \subset H$. $\square$

Możemy już w tej chwili sformułować podstawowe kryterium relatywnej zwartości w $\mathcal{M}_1(H)$:

TWIERDZENIE 2.4. /[29], zob. również [11]/

Podzbiór $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}_1(H)$ jest relatywnie zwarty wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje warunkowo zwarty zbiór S-operatorów $\{T^{\alpha,\varepsilon} ; \alpha \in A\} \subset \mathcal{S}$ o własności

/2.13/ $1 - \operatorname{Re}(\hat{\mu}_\alpha(y)) \leq \langle T^{\alpha,\varepsilon} y, y \rangle + \varepsilon \; ; \; y \in H, \alpha \in A.$ $\square$

§ 3. Układ podstawowy dla twierdzenia granicznego. Prognozowalne charakterystyki rozkładów sum wierszowych.

Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega_n, \underline{\mathcal{F}_n}, P_n)$ będzie przestrzenią z filtracją, tzn. przestrzenią probabilistyczną $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$, na której określony jest wstępujący ciąg $\underline{\mathcal{F}_n} = \{\mathcal{F}_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ σ - podalgebr $\mathcal{F}_n$:

/3.1/ $\mathcal{F}_{n,k} \subset \mathcal{F}_{n,k+1} \subset \mathcal{F}_n \quad ; \ k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}.$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, niech $\underline{\mathfrak{X}_n} = \{X_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w H adaptowanym do filtracji $\underline{\mathcal{F}_n} = \{\mathcal{F}_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, tzn. dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zmienna X_{nk} jest $\mathcal{F}_{nk}$ - mierzalna:

/3.2/ $\sigma(X_{nk}) \subset \mathcal{F}_{nk} \quad ; \ k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$

Parę $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}}) = (\{\underline{\mathfrak{X}_n}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\underline{\mathcal{F}_n}\}_{n \in \mathbb{N}})$ nazywamy tablicą $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ /zmiennych losowych/ adaptowaną do $\underline{\underline{\mathcal{F}}}$.

W celu uproszczenia oznaczeń, bez zmniejszenia ogólności można założyć, iż wszystkie obiekty tablicy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}})$ są określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Istotnie, będziemy wypowiadać twierdzenia graniczne o rozkładach pewnych zmiennych losowych $\{Y_n\}$ określonych na $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ używając warunków nakładanych na rozkłady innych zmiennych losowych $\{Z_n\}$, również określonych na $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$. Widoczne jest więc, że można przyjąć $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots, P_1 \times P_2 \times \ldots)$ i rozpatrywać zamiast $\{Y_n\}$ zmienne $\{\tilde{Y}_n\}$ będące złożeniami Y_n i projekcji na n-tą współrzędną, a filtracje $\underline{\mathcal{F}_n}$ na $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ utożsamiać z ich obrazami przy naturalnym włożeniu σ-algebry na współrzędnej w σ-algebrę produktową.

Ustalmy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}})$. Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$

/3.3/ $\sigma_n : (\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}_n}, P) \longrightarrow \mathbb{N}_0$

będzie skończonym momentem zatrzymania względem filtracji

$\underline{\mathcal{F}}_n$, tzn.

/3.4/ $\{\sigma_n = k\} \in \mathcal{F}_{nk}$; $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$.

DEFINICJA 3.1. Układem podstawowym dla twierdzenia granicznego /krótko: układem podstawowym/ będziemy nazywać trójkę $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}}, \underline{\sigma})$, gdzie $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ jest tablicą adaptowaną do $\underline{\underline{\mathcal{F}}}$, a $\underline{\sigma} = \{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem momentów zatrzymania /3.3/. $\Box$

W oparciu o układ podstawowy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}}, \underline{\sigma})$ konstruujemy dwa podstawowe obiekty badań: ciąg sum wierszowych $\{S(\sigma_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ i ciąg $\{\mu(\sigma_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ prognozowalnych charakterystyk rozkładu ciągu $\{S(\sigma_n)\}$.

Symbolem $S(\sigma_n)$ oznaczać będziemy sumę /losową/ n-tego wiersza tablicy $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ do momentu σ_n :

/3.5/ $$S(\sigma_n)(\omega) = \sum_{1 \leq k \leq \sigma_n(\omega)} X_{nk}(\omega)$$

W /3.5/ przyjmujemy konwencję

/3.6/ $$\sum_{1 \leq k \leq 0} \equiv 0$$

obowiązującą do końca pracy.

Aby zdefiniować elementy ciągu $\{\mu(\sigma_n)\}$, wybierzmy dla każdej pary $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ regularną wersję μ_{nk} rozkładu warunkowego zmiennej losowej X_{nk} względem $\mathcal{F}_{n,k-1}$ /zob.[5], Rozdz.VI./. Przypomnijmy, że odwzorowanie

/3.7/ $$\mu_{nk} : \mathcal{B}_H \times \Omega \longrightarrow [0,1]$$

jest rozkładem losowym na H /por. Uzup./:

/3.8/ $$\mu_{nk}(\cdot, \omega) \in \mathcal{M}_1(H) \quad ; \quad \omega \in \Omega$$

o własności

/3.9/ $$\int f(x)\, \mu_{nk}(dx, \omega) = E\left(f(X_{nk}) \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right)(\omega) \quad P\text{-} p.w.$$

dla każdej funkcji f mierzalnej na H i takiej, że $E|f(X_{nk})| < +\infty$.

Prognozowalną charakterystykę rozkładu sumy $S(\sigma_m)$ określimy wzorem

/3.10/ $\mu(\sigma_m)(\cdot,\omega) := \mu_{m1}(\cdot,\omega) * \mu_{m2}(\cdot,\omega) * \ldots * \mu_{m\sigma_m(\omega)}(\cdot,\omega)$

który w skrócie możemy zapisać w postaci

/3.11/ $\mu(\sigma_m) = \underset{1\leq k\leq \sigma_m}{\boxed{*}} \mu_{mk}$

W /3.10/ i /3.11/ użyliśmy konwencji

/3.12/ $\underset{1\leq k\leq 0}{\boxed{*}} \equiv \delta_0$

Miara losowa $\mu(\sigma_m)$ jest wyznaczona modulo P. Istotnie, jeżeli wybierzemy inną tablicę $\{\mu'_{mk}\}$ regularnych rozkładów warunkowych, wówczas P $(\mu'(\sigma_m) \neq \mu(\sigma_m)) \leq P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\mu'_{mk} \neq \mu_{mk}\}) = 0$.

Zauważmy na koniec, że w definicji układu podstawowego $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}}, \underline{\sigma})$ elementy ciągu $\underline{\sigma}$ mogą być p.w. skończone, tzn. spełniające warunek

/3.13/ $P(\sigma_m < +\infty) = 1;\quad m \in \mathbb{N}$.

Modyfikacja definicji /3.5/ i /3.10/ przez określenie np. $S(\sigma_m) = 0$, $\mu(\sigma_m) = \delta_0$ na zbiorze $\{\sigma_m = +\infty\}$ nie zmienia bowiem rozkładów wielkości $S(\sigma_m)$ i $\mu(\sigma_m)$.

§ 4. Ciasność $\{S(\sigma_m)\}$ a ciasność $\{\mu(\sigma_m)\}$.

Rozpatrzmy dwa najprostsze przykłady układów podstawowych.

PRZYKŁAD 4.1. Niech $\underline{\underline{X}} = \{X_{nk}\}$ będzie dowolną tablicą zmiennych losowych na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\underline{\sigma} = \{\sigma_m : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow \mathbb{N}_0\}$ dowolnym ciągiem zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{N}_0$. Połóżmy $\mathcal{F}_{nk} \equiv \mathcal{F}$

dla $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$. Wówczas $\mu(\sigma_m) = \delta_{S(\sigma_m)}$. □.

PRZYKŁAD 4.2. Jeżeli dla każdej pary $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ zmienna X_{nk} jest niezależna od $\mathcal{F}_{n,k-1}$ oraz zmienne $\sigma_n \equiv k_m \in \mathbb{N}_0$ są nielosowe, wtedy miara $\mu(\sigma_m) = \mu(k_m)$ jest rozkładem sumy $S(k_n)$. □

W obu przedstawionych sytuacjach zbieżność wg rozkładu sum $S(\sigma_m)$ jest równoważna zbieżności wg rozkładu miar losowych $\mu(\sigma_m)$. Następny przykład pokaże, że fakt ten nie ma miejsca w przypadku ogólnym.

PRZYKŁAD 4.3. Załóżmy, że $H = \mathbb{R}^1$. Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0,n)$. Połóżmy

/4.1/ $X_{n1} = X_n,\ X_{n2} = -X_n,\ X_{nk} = 0;\ k > 2,\quad n \in \mathbb{N}$.

/4.2/ $\mathcal{F}_{no} = \{\phi, \Omega\},\ \mathcal{F}_{mk} = \sigma(X_m)\ ;\ k \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$.

/4.3/ $\sigma_n \equiv 2\ ;\quad n \in \mathbb{N}$.

Dla tak zdefiniowanego układu podstawowego $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}}, \underline{\sigma})$ mamy

/4.4/ $S(\sigma_n) \equiv 0$

/4.5/ $\mu(\sigma_n) = N(0,n) * \delta_{-X_m}$

Dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^1,\ y \neq 0$ zachodzi więc

/4.6/ $E\ \widehat{\mu(\sigma_m)}(y) = e^{-y^2 m} \to 0$.

Z /4.6/ wynika w szczególności, iż żaden podciąg ciągu $\{E\mu(\sigma_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ nie jest słabo zbieżny; tym samym, na podstawie Wn. 16.4., żaden podciąg ciągu $\{\mu(\sigma_m)\}$ nie jest ciasny. □

Ciasność $\{S(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ nie pociąga więc ciasności $\{\mu(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$. Pokażemy, że ma miejsce implikacja odwrotna.

Wprowadzimy najpierw niezbędne oznaczenia.

Niech $\mu\in\mathcal{M}_1(H)$. S y m e t r y z a c j ą μ nazywamy rozkład $|\mu|^2$ określony wzorem

/4.7/ $|\mu|^2 := \mu * \overline{\mu}$

gdzie $\overline{\mu}$ jest rozkładem symetrycznym względem μ /jeśli $A\subset H$, to $-A=\{-x;\ x\in A\}$/:

/4.8/ $\overline{\mu}(A) := \mu(-A)$.

Symetryzacja $|\mu|^2$ jest elementem zbioru $\mathcal{M}_1^+(H)$ - zbioru rozkładów o nieujemnych funkcjach charakterystycznych:

/4.9/ $\mathcal{M}_1^+(H) := \{\mu\in\mathcal{M}_1(H);\ \hat{\mu}(y)\geqslant 0,\quad y\in H\}$

Łatwo zauważyć, że zbiór $\mathcal{M}_1^+(H)$ jest domknięty w $\mathcal{M}_1(H)$ i, w konsekwencji, metryzowalny jako przestrzeń ośrodkowa i zupełna.

TWIERDZENIE A /4.4/

Niech $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\sigma})$ będzie układem podstawowym.

Załóżmy, że ciąg $\{|\mu(\sigma_m)|^2\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest ciasny. Wówczas ciąg $\{S(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest ciasny wtedy, i tylko wtedy, gdy ciasny jest ciąg $\{\mu(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$.

W szczególności, z ciasności ciągu prognozowalnych charakterystyk $\{\mu(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ wynika ciasność ciągu sum wierszowych $\{S(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$.

DOWÓD. Zauważmy, że druga część twierdzenia wynika natychmiast z części pierwszej i następującego lematu:

LEMAT 4.5.

Jeżeli ciąg $\{\mu(\sigma_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest ciasny, to ciasny jest również ciąg $\{|\mu(\sigma_m)|^2\}_{m\in\mathbb{N}}$.

DOWÓD. Ciąg $\{|\mu(\sigma_m)|^2\}$ jest obrazem ciągu $\{\mu(\sigma_m)\}$ przy ciągłym odwzorowaniu $\mu \mapsto (\mu,\bar{\mu}) \mapsto \mu * \bar{\mu} = |\mu|^2$. $\square$

Aby udowodnić część pierwszą twierdzenia, połóżmy:

/4.10/ $\lambda(\sigma_m) := \mu(\sigma_m) * \delta_{-S(\sigma_m)}$

Pokażemy, że ciasność ciągu $\{\lambda(\sigma_m)\}$ implikuje równoczesną ciasność ciągów $\{\mu(\sigma_m)\}$ i $\{\delta_{-S(\sigma_n)}\}$ /równoważnie: $\{\mu(\sigma_m)\}$ i $\{S(\sigma_m)\}$/.

LEMAT 4.6.

Niech $\{\mu_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ i $\{\nu_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ będą ciągami rozkładów losowych na H. Ciasność każdych dwóch spośród ciągów $\{\mu_m\}$, $\{\nu_m\}$, $\{\mu_m * \nu_m\}$ pociąga ciasność trzeciego.

DOWÓD. Rozważmy element losowy (μ_m,ν_m) w $(\mathcal{M}_1(H))^2$ i funkcjonał F : $\mathcal{M}_1(H)\times\mathcal{M}_1(H) \longrightarrow \mathcal{M}_1(H)$

/4.11/ $F(\mu,\nu) = \mu * \nu$

F jest ciągły na $(\mathcal{M}_1(H))^2$; jeżeli więc $\{\mu_m\}$ i $\{\nu_m\}$ są ciasne, $\{F(\mu_m,\nu_n)\}$ jest również ciasny.

Załóżmy teraz ciasność np. $\{\mu_m\}$ i $\{\mu_m * \nu_m\}$. Określamy funkcjonał G : $\mathcal{M}_1(H)\times\mathcal{M}_1(H) \longrightarrow \mathcal{M}_1(H)\times\mathcal{M}_1(H)$,

/4.12/ $G(\mu,\nu) = (\mu, \mu * \nu)$

Z założenia, $\{G(\mu_m,\nu_n)\}$ jest ciasny /w $(\mathcal{M}_1(H))^2$ /.

Niech $\{m'\}\subset\mathbb{N}$ będzie dowolnym podciągiem. Z ciasności $\{G(\mu_{m'},\nu_{m'})\}$ wynika, iż możemy znaleźć podciąg $\{m''\}\subset\{m'\}$ taki, że $\{G(\mu_{m''},\nu_{m''})\}$ jest zbieżny wg rozkładu w $(\mathcal{M}_1(H))^2$. Skorzystajmy z podanej przez Aldousa /[2], L. 26.3/ wersji. Tw. Skorochoda o reprezentacji /ciągów zbieżnych wg rozkładu/. Na mocy tego twierdzenia, istnieją: 1/ przestrzeń probabilistyczna $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ oraz 2/ ciągi miar losowych $\{(\tilde{\mu}_{m''}, \tilde{\nu}_{m''}): (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}) \to (\mathcal{M}_1(H))^2\}$ spełniające warunki

/4.13/ $\mathcal{L}((\tilde{\mu}_{m''}, \tilde{\nu}_{m''})) = \mathcal{L}((\mu_{m''}, \nu_{m''}))$

/4.14/ $G(\tilde{\mu}_{m''}(\tilde{\omega}), \tilde{\nu}_{m''}(\tilde{\omega})) = (\tilde{\mu}_{m''}(\tilde{\omega}), \tilde{\mu}_{m''}(\tilde{\omega}) * \tilde{\nu}_{m''}(\tilde{\omega}))$ jest słabo zbieżny dla każdego $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$.

Z /4.14/ i Tw. 2.1, Rozdz.III, [29], wynika, że dla każdego $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ ciąg $\{\tilde{\nu}_{m''}(\omega)\}$ jest relatywnie / = warunkowo/ zwarty. W szczególności $\{\tilde{\nu}_{m''}\}$ jest ciasny. Z /4.13/

/4.15/ $\mathcal{L}(\tilde{\nu}_{m''}) = \mathcal{L}(\nu_{m''})$,

a więc podciąg $\{\nu_{m''}\}$ ciągu $\{\nu_{m'}\}$ jest ciasny. Wobec dowolności podciągu $\{m'\}$, oznacza to ciasność $\{\nu_m\}$. $\square$

DOWÓD Tw. 4.4 zakończymy, pokazując implikację

/4.16/ /ciasność $\{|\mu(\sigma_m)|^2\}$/ $\Rightarrow$ /ciasność $\{\lambda(\sigma_m)\}$/.

Zgodnie z Wn. 16.4, wystarczy uzyskać relatywną zwartość $\{E\lambda(\sigma_m)\}$ przy pomocy podstawowego Tw. 2.4, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ należy znaleźć warunkowo zwarty ciąg S-operatorów $\{T^{m,\varepsilon}\}_{n \in \mathbb{N}}$, spełniający

/4.17/ $1 - \mathrm{Re}\,(E\widehat{\lambda(\sigma_m)})(y) \leq \langle T^{m,\varepsilon} y, y \rangle + \varepsilon \quad ; y \in H$.

Ustalmy na chwilę $n \in \mathbb{N}$ i $y \in H$ i połóżmy

/4.18/ $Y_k = \exp(-i\langle y, S(k)\rangle) \cdot \widehat{\mu(k)}(y) \quad (= \widehat{\lambda(k)}(y)) \; ; k \in \mathbb{N}_0$

/4.19/ $Z_k = |\widehat{\mu}_{mk}(y)|^2 \quad ; \; k \in \mathbb{N}$

/4.20/ $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{nk.} \quad ; \; k \in \mathbb{N}_0$.

Łatwo sprawdzić, że określone przez /4.18/ - /4.20/ wielkości spełniają założenia poniższego lematu.

LEMAT 4.7.

Niech ciąg zespolonych zmiennych losowych $\underline{Y} = \{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ będzie adaptowany do $\underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_k ; k\in\mathbb{N}_0\}$, a $\underline{Z} = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie prognozowalny względem $\underline{\mathcal{F}}$.

Załóżmy, że

/4.21/ $Y_o = 1$ p.w., $|Y_k| \leq 1$ p.w. ; $k \in \mathbb{N}$.

/4.22/ $0 \leq Z_k \leq 1$ p.w. ; $k \in \mathbb{N}$.

/4.23/ $E(Y_k | \mathcal{F}_{k-1}) = Y_{k-1} Z_k$ p.w. ; $k \in \mathbb{N}$.

Wówczas dla dowolnego p.w. skończonego $\underline{\mathcal{F}}$- momentu zatrzymania σ, ma miejsce nierówność

/4.24/ $1 - \mathrm{Re}\, EY_\sigma \leq E\left(\sum_{1\leq j\leq \sigma}(1 - Z_j)\right)$.

DOWÓD. Niech $U_n := 1 - Z_n - \mathrm{Re}\, Y_{n-1} + \mathrm{Re}\, Y_n$, $S_o := 0$ i $S_n := \sum_{1\leq k\leq n} U_k$. $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest podmartyngałem względem $\underline{\mathcal{F}}$.

Istotnie:

$$E(U_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 1 - Z_n - \mathrm{Re}\, Y_{n-1} + \mathrm{Re}E(Y_n | \mathcal{F}_{n-1})$$
$$= 1 - Z_n - \mathrm{Re}\, Y_{n-1} + (\mathrm{Re}\, Y_{n-1}) Z_n$$
$$= (1 - Z_n)(1 - \mathrm{Re}\, Y_{n-1}) \geq 0.$$

Stąd dla $N\in\mathbb{N}$ i σ - momentu zatrzymania

/4.25/ $E(S_{\sigma\wedge N}) \geq E S_o = 0.$

Ale

$$/4.26/\quad S_{\sigma\wedge N} = \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant \sigma\wedge N}(1 - Z_k)\Big) - \sum_{1\leqslant k\leqslant \sigma\wedge N}(\mathrm{Re}\, Y_{k-1} - \mathrm{Re}\, Y_k)$$

$$= \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant \sigma\wedge N}(1 - Z_k)\Big) - (1 - \mathrm{Re}\, Y_{\sigma\wedge N})$$

Przy ustalonym $N\in\mathbb{N}$ mamy więc z /4.25/ i /4.26/

$$/4.27/\quad 1 - \mathrm{Re}\, EY_{\sigma\wedge N} \leqslant E\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant \sigma\wedge N}(1 - Z_k)\Big)$$

Gdy $N \to +\infty$, lewa strona /4.27/ zmierza do $1 - \mathrm{Re}\, EY_\sigma$ /bo σ jest p.w. skończony/, a prawa rośnie do $E\sum_{1\leqslant k\leqslant\sigma}/1 - Z_k/$. $\square$

Na mocy Lematu 4.7. oraz określeń /4.18/ - /4.20/ prawdziwa jest nierówność

$$/4.28/\quad 1 - \mathrm{Re}\, E\,\widehat{\lambda(\sigma_m)}(y) \leqslant E\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant\sigma_m}(1 - |\hat{\mu}_{mk}(y)|^2)\Big);\ y\in H,\ n\in\mathbb{N}.$$

Wyrażenie po prawej stronie /4.28/ może oczywiście przyjmować wartość nieskończoną.

Przypuśćmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_m^\varepsilon \leqslant \sigma_m$ oraz warunkowo zwarty ciąg S-operatorów $\{T^{m,\varepsilon}\}$ o własnościach

$$/4.29/\quad P(\tau_n^\varepsilon < \sigma_m) < \varepsilon$$

$$/4.30/\quad E\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant\tau_n^\varepsilon}(1 - |\mu_{nk}(y)|^2)\Big) \leqslant \langle T^{m,\varepsilon}y, y\rangle + \varepsilon;\ y\in H.$$

Wówczas możemy wykazać /4.17/:

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{Re}\, E\,\widehat{\lambda(\sigma_n)}(y) &\leqslant 1 - \mathrm{Re}\, E\,\widehat{\lambda(\tau_n^\varepsilon)}(y) + \\ &+ \mathrm{Re}\, E\,\widehat{\lambda(\tau_n^\varepsilon)}(y) - \mathrm{Re}\, E\,\widehat{\lambda(\sigma_n)}(y) \\ &\leqslant E\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant\tau_n^\varepsilon}(1 - |\hat{\mu}_{nk}(y)|^2)\Big) + \\ &+ 2P(\tau_n^\varepsilon < \sigma_m) \\ &\leqslant \langle T^{n,\varepsilon}y, y\rangle + \varepsilon + 2\varepsilon;\ y\in H. \end{aligned}$$

W ostatnim etapie dowodu Tw. 4.4, zakładając ciasność $\{|\mu(\sigma_m)|^2\}$ znajdziemy momenty zatrzymania $\tau_m^\varepsilon \le \sigma_m$, spełniające warunki /4.29/ i /4.30/.

LEMAT 4.8.

Określamy /w oparciu o tablicę $\underline{\mu}$/ ciąg $\{\mathcal{U}(\sigma_m)\}$ losowych S-operatorów oraz ciąg miar losowych $\{M(\sigma_m)\}$ wzorami:

/4.31/ $$\langle \mathcal{U}(\sigma_m)y,y\rangle := \sum_{1\le k\le \sigma_m} \int_{\{\|x\|\le 1\}} \langle y,x\rangle^2 |\mu_{mk}|^2(dx) \quad ; \ y\in H.$$

/4.32/ $$M(\sigma_m)(A) := \sum_{1\le k\le \sigma_m} |\mu_{mk}|^2(\{\|x\|>1\}\cap A) \quad ; \ A\in \mathcal{B}_H .$$

Jeżeli ciąg $\{|\mu(\sigma_m)|^2\}$ jest ciasny, to ciasne są również ciągi $\{\mathcal{U}(\sigma_m)\}$ i $\{M(\sigma_m)\}$.

DOWÓD. Na przestrzeni $\mathcal{H} = \mathbb{N}_0 \times (\mathcal{M}_1^+(H))^\infty$ /znaczenie symbolu $\mathcal{M}_1^+(H)$ - zob. /4.9//definiujemy dwa funkcjonały $F : \mathcal{H} \to \mathcal{M}_1^+(H)$ i $G : \mathcal{H} \to \mathcal{S}\times\mathcal{M}(H)$, gdzie

/4.33/ $$F((m,(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}})) := \mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_m$$

/4.34/ $$G((m,(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}})) := (\mathcal{U}_m, M_m)$$

i U_n oraz M_n zadane są wzorami

/4.35/ $$\langle \mathcal{U}_n y,y\rangle = \sum_{1\le k\le m} \int_{\{\|x\|\le 1\}} \langle y,x\rangle^2 \mu_k(dx) \quad ; \ y\in H .$$

/4.36/ $$M_n(A) = \sum_{1\le k\le m} \mu_k(\{\|x\|>1\}\cap A) \quad ; \ A\in\mathcal{B}_H .$$

Na podstawie Tw. 6.1., Rozdz.VI, [29], jeżeli $x_n \in \mathcal{H}$ i $F(x_n) \to z$, to $G(x_n)$ jest relatywnie zwarty.

A więc, jeżeli $\{F(X_n)\}$ jest ciasny / $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg elementów losowych w $\mathcal{H}$ /, to ciasny jest również ciąg $\{G(X_n)\}$. Istotnie, dowolny podciąg $\{X_{n'}\}$ ciągu $\{X_n\}$ zawiera podciąg $\{X_{n''}\}$ taki, że $\{F(X_{n''})\}$ jest słabo zbieżny. Przechodząc do reprezentacji Skorochoda, możemy założyć, że $\mathcal{L}(\tilde{X}_{n''}) = \mathcal{L}(X_{n''})$ i $F(\tilde{X}_{n''}(\tilde{\omega})) \to \mu(\tilde{\omega})$. Stąd $G(\tilde{X}_{n''}(\tilde{\omega}))$ jest relatywnie zwarty dla każdego $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$ i, w konsekwencji, ciasny w $\mathcal{S}\times\mathcal{M}(H)$. Ponieważ $\mathcal{L}(G(\tilde{X}_{n''})) = \mathcal{L}(G(X_{n''}))$, dowód L. 4.8. został zakończony. $\square$

LEMAT 4.9.

Niech $\{\nu_{nk}\ ;\ k\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\}$ będzie tablicą skończonych miar losowych, a σ_n - zmienną losową przyjmującą wartości w $\mathbb{N}_0$. Utwórzmy ciąg miar /losowych/:

$$/4.37/\quad M(\sigma_n) = \sum_{1\leq k\leq \sigma_n} \nu_{nk}$$

Niech dla $C > 0$

$$/4.38/\quad \tau_n^C = \sigma_n \wedge \sup\Big\{\ell\ ;\ \sum_{1\leq k\leq \ell} \nu_{nk}(H) \leq C\Big\}$$

Jeżeli ciąg $\{M(\sigma_n)\}$ jest ciasny, to dla każdego $C > 0$ ciąg $\{E\, M(\tau_n^C)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest relatywnie zwarty / w $\mathcal{M}(H)$ /.

DOWÓD. Stosujemy Wn. 16.3. dla miar $M_n = M(\sigma_n)$, $N_n = M(\tau_n^C)$. $\square$

LEMAT 4.10.

Niech $\{T_{nk}\ ;\ k\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\}$ będzie tablicą losowych S-operatorów, a σ_n - zmienną losową przyjmującą wartości w $\mathbb{N}_0$. Niech

$$/4.39/\quad T(\sigma_n) = \sum_{1\leq k\leq \sigma_n} T_{nk}\ ;\quad n\in\mathbb{N}.$$

Dla $C > 0$ określamy

/4.40/ $\tau_n^C = \sigma_n \wedge \sup\{\ell ; \sum_{1\leq k\leq \ell} tr(T_{nk}) \leq C\}$; $n\in\mathbb{N}$.

Jeżeli ciąg $\{T(\sigma_n)\}$ jest ciasny, to dla każdego $C > 0$ ciąg $\{ET(\tau_n^c)\}$ jest warunkowo zwarty w $\mathcal{S}$.

DOWÓD. Niech $\{e_i\}$ będzie bazą w H. Zdefiniujmy c i ą g ł e odwzorowanie $\mathcal{S}$ na $\mathcal{M}(\mathbb{N})$ /w $\mathbb{N}$ wybieramy topologię dyskretną/ w sposób następujący:

/4.41/ $\mathcal{S} \ni T \mapsto M^T \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$

$$M^T(\{i\}) = \langle Te_i, e_i\rangle \; ; \; i\in\mathbb{N} .$$

Rozważmy ciągi miar losowych $M^{T(\sigma_n)}$ i $M^{T(\tau_n^c)}$.
Ponieważ odwzorowanie $T \mapsto M^T$ jest ciągłe, ciąg $\{M^{T(\sigma_n)}\}$ jest ciasny; ponadto $M^{T(\tau_n^c)}(\mathbb{N}) = tr(T(\tau_n^c)) \leq C$ p.w..
Z Wn. 16.3., ciąg $\{EM^{T(\tau_n^c)}\} \subset \mathcal{M}(\mathbb{N})$ jest relatywnie zwarty.
Łatwo jednak sprawdzić, że

/4.42/ $EM^{T(\tau_n^c)} = M^{ET(\tau_n^c)}$.

Z kryterium warunkowej zwartości w $\mathcal{S}$ /Wn. 2.3/ wynika, że ciąg $\{T_n\} \subset \mathcal{S}$ jest warunkowo zwarty wtedy, i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu /w ustalonej bazie/ ciąg miar $\{M^{T_n}\} \subset \mathcal{M}(\mathbb{N})$ jest relatywnie zwarty. Powyższy fakt, oraz /4.42/ implikują warunkową zwartość $\{ET(\tau_n^c)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\square$

LEMAT 4.11.

Niech $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}}, \underline{\sigma})$ będzie układem podstawowym.

Jeżeli $\{|\mu(\sigma_n)|^2\}$ jest ciasny, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją 1/ ciąg momentów zatrzymania $\{\tau_n^\varepsilon(\leq\sigma_n)\}$ oraz 2/ zwarty ciąg $\mathcal{S}$-operatorów $\{T^{n,\varepsilon}\}$, takie, że warunki /4.29/

i /4.30/ są spełnione.

DOWÓD. Niech $\mathcal{U}(\sigma_n)$ i $M(\sigma_n)$ będą określone wzorami /4.31/ i /4.32/. Z Lematu 4.8. wynika, że $\{\mathcal{U}(\sigma_n)\}$ i $\{M(\sigma_n)\}$ są ciasne. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $C > 0$ będzie tak duże, aby

/4.43/ $\sup_m P\left(M(\sigma_n)(H) > C\right) < \varepsilon/2$

/4.44/ $\sup_m P\left(\operatorname{tr}(\mathcal{U}(\sigma_n)) > C\right) < \varepsilon/2$

Zdefiniujmy następnie

/4.45/ $\tau_n^1 := \sigma_m \wedge \sup\left\{l ; \sum_{1\leq k\leq l} |\mu_{mk}|^2(\|x\| > 1) \leq C\right\} ; n\in\mathbb{N}$

/4.46/ $\tau_n^2 := \sigma_m \wedge \sup\left\{l ; \sum_{1\leq k\leq l} \int_{\{\|x\|\leq 1\}} \|x\|^2 |\mu_{mk}|^2(dx) \leq C\right\} ; n\in\mathbb{N}$

τ_m^1 i τ_n^2 są momentami zatrzymania, bowiem $|\mu_{mk}|^2$ jest $\mathcal{F}_{n,k-1}$ - mierzalnym rozkładem losowym. Jeżeli teraz określimy $\tau_n^\varepsilon = \tau_n^1 \wedge \tau_n^2$ to spełniony jest warunek /4.29/:

$$P(\tau_n^\varepsilon < \sigma_m) \leq P(\tau_n^1 < \sigma_m) + P(\tau_n^2 < \sigma_m) < \varepsilon .$$

Ponadto z L. 4.9., ciąg $\{EM(\tau_n^1)\} \subset \mathcal{M}(H)$ jest relatywnie zwarty; podobnie /L. 4.10/ ciąg $\{E\mathcal{U}(\tau_n^2)\} \subset \mathcal{S}$ jest warunkowo zwarty. Ponieważ $E\,\mathcal{U}(\tau_n^\varepsilon) \leq E\mathcal{U}(\tau_n^2)$ i $EM(\tau_n^\varepsilon) \leq EM(\tau_n^1)$ /, więc ciągi $\{E\,\mathcal{U}(\tau_n^\varepsilon)\}$ i $\{EM(\tau_n^\varepsilon)\}$ są również relatywnie zwarte.

Niech dla $L > 0$ zachodzi

/4.47/ $EM(\tau_n^\varepsilon)(\|x\| > L) < \varepsilon$

Połóżmy:

/4.48/ $\langle T^{n,\varepsilon} y, y\rangle := 2\langle E\mathcal{U}(\tau_n^\varepsilon)y, y\rangle + 2\int_{\{1<\|x\|\leq L\}} \langle y, x\rangle^2 EM(\tau_n^\varepsilon)(dx)$

$\{T^{n,\varepsilon}\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest warunkowo zwartym ciągiem S-operatorów i spełniony jest warunek /4.30/:

$$E\Big(\sum_{1\le k\le \tau_n^\varepsilon}(1-|\hat{\mu}_{mk}(y)|^2)\Big) \le \frac{1}{2}E\Big(\sum_{1\le k\le \tau_n^\varepsilon}\int_{\{\|x\|\le L\}}\langle y,x\rangle^2|\mu_{nk}|^2(dx)\Big)$$
$$+\, E\sum_{1\le k\le \tau_n^\varepsilon}|\mu_{mk}|^2(\|x\|>L)$$
$$=\langle T^{n,\varepsilon}y,y\rangle + EM(\tau_n^\varepsilon)(\|x\|>L)$$
$$\le \langle T^{n,\varepsilon}y,y\rangle + \varepsilon\,. \quad \square$$

Zauważmy na koniec, że w L.L. 4.8. - 4.10. zmienne losowe zatrzymujące sumowanie n i e k o n i e c z n i e musiały być momentami zatrzymania. Założenie to było natomiast niezbędne w dowodzie nierówności /4.28/ /L. 4.7/.

§ 5. Uogólniona Zasada P. Lévy'ego.

Przykład 4.3. z poprzedniego paragrafu pokazuje, że na ogół zbieżność /lub rozbieżność/ $\mu(\sigma_m)$ nie ma ścisłego związku z asymptotycznym zachowaniem rozkładów sum $S(\sigma_m)$. Zbadamy teraz najprostszą, i jednocześnie najważniejszą sytuację, w której znajomość słabej granicy ciągu $\{\mu(\sigma_m)\}$ daje pełną informację o słabej zbieżności $\{S(\sigma_n)\}$.

TWIERDZENIE B /5.1/ /Uogólniona Zasada P. Lévy'ego/.

Niech $(\underline{\underline{X}},\underline{\underline{F}},\underline{\sigma})$ będzie układem podstawowym, a $\mu\in\mathcal{M}_1(H)$ - rozkładem na H.

Załóżmy, że ciąg prognozowalnych charakterystyk zmierza wg p-stwa do μ:

/5.1/ $\quad \mu(\sigma_m) \underset{P}{\Rightarrow} \mu$.

Wtedy ciąg $\{\mathcal{L}(S(\sigma_n))\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest relatywnie zwarty, i jeżeli ν jest punktem skupienia ciągu $\{\mathcal{L}(S(\sigma_n))\}$, to ma miejsce równość

/5.2/ $\quad \nu * \mu = \mu^2$.

W szczególności, jeżeli funkcja charakterystyczna $\hat{\mu}$ jest różna od zera na zbiorze gęstym w H, ciąg $\{\mathcal{L}(S(\sigma_m))\}$ jest słabo zbieżny do μ.

DOWÓD. Zauważmy, że wystarczy dowieść związku

$$/5.3/ \quad E \exp(i\langle y, S(\sigma_n)\rangle) \longrightarrow \hat{\mu}(y)$$

dla wszystkich takich $y \in H$, że $\hat{\mu}(y) \neq 0$.

Istotnie, jeżeli $\mu(\sigma_m) \underset{p}{\Rightarrow} \mu$, to ciąg $\{\mu(\sigma_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciasny i Tw. 4.4. daje nam relatywną zwartość ciągu $\{\mathcal{L}(S(\sigma_m))\}_{m\in\mathbb{N}}$. Przypuśćmy, że ma miejsce /5.3/. Jeżeli wzdłuż pewnego podciągu $\{m'\}$, $\mathcal{L}(S(\sigma_{m'})) \Rightarrow \nu$, to $E \exp(i\langle y, S(\sigma_{n'})\rangle) \longrightarrow \hat{\nu}(y); y \in H$, i w szczególności $\hat{\nu}(y) = \hat{\mu}(y)$, jeśli tylko $\hat{\mu}(y) \neq 0$. Oznacza to, że dla dowolnego $y \in H$

$$/5.4/ \quad \hat{\nu}(y)\cdot\hat{\mu}(y) = (\hat{\mu}(y))^2,$$

a powyższy związek jest zapisem /5.2/ przy pomocy funkcji charakterystycznych. W przypadku, gdy $\hat{\mu}$ jest różna od zera na zbiorze gęstym w H, równanie /5.2/ ma jedyne rozwiązanie $\nu = \mu$. μ jest więc jedynym punktem skupienia relatywnie zwartego ciągu $\mathcal{L}(S(\sigma_n))$.

W dowodzie warunku /5.3/, funkcję podobną do roli L. 4.7. w dowodzie Tw. 4.4., spełnia następujący

LEMAT 5.2.

Niech $\underline{\mathcal{F}}$ będzie filtracją, a $\underline{Y} = \{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ i $\underline{Z} = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ciągami zmiennych losowych zespolonych.

Załóżmy, że $\underline{Y}$ jest adaptowany do $\underline{\mathcal{F}}$, $\underline{Z}$ jest prognozowalny względem $\underline{\mathcal{F}}$ i mają miejsce warunki:

/5.5/ $Y_0 \equiv 1, \ |Y_k| \leqslant 1$ p.w. ; $k \in \mathbb{N}$.

/5.6/ $|Z_k| \leqslant 1$ p.w. ; $k \in \mathbb{N}$.

/5.7/ $E(Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = Y_{k-1} Z_k$; $k \in \mathbb{N}$.

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $\underline{\mathcal{F}}$- momentu zatrzymania σ spełniona jest nierówność

/5.8/ $$\Big| E_0 Y_\sigma - E_0\Big(\prod_{1\leqslant k\leqslant \sigma} Z_k\Big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant 4 P_0\Big(\Big|\prod_{1\leqslant k\leqslant\sigma} Z_k\Big| \leqslant \varepsilon\Big) + \frac{1}{\varepsilon} E_0\Big|\prod_{1\leqslant k\leqslant\sigma} Z_k - E_0\Big(\prod_{1\leqslant k\leqslant\sigma} Z_k\Big)\Big|$$

gdzie dla prostoty zapisu oznaczono

$$E_0(\cdot) = E(\cdot \mid \mathcal{F}_0), \quad P_0(\cdot) = E_0(I(\cdot)) .$$

DOWÓD. Wprowadźmy ciąg

/5.9/ $$\mathcal{U}_m := \prod_{1\leqslant k\leqslant m} Z_k \ ; \ m \in \mathbb{N}_0 .$$

$\{\mathcal{U}_m\}$ jest prognozowalny i z warunku /5.6/ ma własność $|\mathcal{U}_{m+1}| = |\mathcal{U}_m Z_{m+1}| \leqslant |\mathcal{U}_m|$.

Niech $\varepsilon > 0$. Połóżmy

/5.10/ $$\tau := \sup\{m \ ; |\mathcal{U}_m| > \varepsilon\}$$

Ponieważ ciąg $\{\mathcal{U}_m\}$ jest prognozowalny, τ jest momentem zatrzymania /niekoniecznie skończonym/. Twierdzimy, że ciąg $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$, określony wzorem

/5.11/ $$V_m = (\mathcal{U}_{m\wedge\tau})^{-1} Y_{m\wedge\tau} \ ; \ m \in \mathbb{N}_0$$

jest ograniczonym przez $1/\varepsilon$ /z definicji τ i /5.5// martyngałem o wartościach zespolonych. Istotnie:

/5.12/ $$V_m = I(\tau < m)(\mathcal{U}_{m\wedge\tau})^{-1} Y_{m\wedge\tau} + I(\tau \geqslant m)(\mathcal{U}_{m\wedge\tau})^{-1} Y_{m\wedge\tau}$$
$$=: V_m^1 + V_m^2 .$$

Na zbiorze $\{\tau < m\} = \{\tau \leq m-1\}$

$$\left(U_{m\wedge\tau}\right)^{-1} Y_{m\wedge\tau} = \left(U_{(m-1)\wedge\tau}\right)^{-1} Y_{(m-1)\wedge\tau} .$$

V_m^1 jest więc $\mathcal{F}_{m-1}$ - mierzalne i ponadto

/5.13/ $V_m^1 = I(\tau < m)\, V_{m-1}$.

Na zbiorze $\{m \leq \tau\}(\in \mathcal{F}_{m-1})$ mamy $\tau \wedge m = m$, stąd

$V_m^2 = I(m \leq \tau)\, U_m^{-1} \cdot Y_m$, i dalej

/5.14/ $$E(V_m^2 | \mathcal{F}_{m-1}) = I(m \leq \tau)\, U_m^{-1} E(Y_m | \mathcal{F}_{m-1})$$
$$= I(m \leq \tau)\, U_m^{-1}\, Y_{m-1} Z_m$$
$$= I(m \leq \tau)\, V_{m-1}$$

Równości /5.13/ i /5.14/ pociągają

/5.15/ $$E(V_m | \mathcal{F}_{m-1}) = I(\tau < m)\, V_{m-1} + I(\tau \geqslant m)\, V_{m-1} = V_{m-1}.$$

W konsekwencji, zastosowanie Tw. Dooba do regularnego martyngału $\{V_m\}$ daje nam

/5.16/ $E_0 V_\sigma = V_0 = 1$ p.w.

Z /5.16/ wynika

/5.17/ $$E_0 U_\sigma = E_0 U_\sigma \cdot E_0 V_\sigma = E_0\left(V_\sigma E_0 U_\sigma\right)$$

Opierając się na /5.17/ możemy teraz oszacować

/5.18/ $$|E_0 Y_\sigma - E_0 U_\sigma| \leq |E_0 Y_\sigma - E_0 Y_{\sigma\wedge\tau}| + |E_0 Y_{\sigma\wedge\tau} - E_0 (V_\sigma U_\sigma)|$$
$$+ |E_0 (V_\sigma U_\sigma) - E_0(V_\sigma E_0 U_\sigma)|$$

Pozostaje zauważyć, że

/5.19/ $$|Y_\sigma - Y_{\sigma\wedge\tau}| \leq 2\, I(\tau < \sigma) = 2\, I\Big(\prod_{1\leq k\leq\sigma} |Z_k| \leq \varepsilon\Big)$$

z /5.5/ i def. τ /5.10/

$$/5.20/\quad |Y_{\sigma\wedge\tau} - V_\sigma \mathcal{U}_\sigma| = |Y_{\sigma\wedge\tau} - Y_{\sigma\wedge\tau}(\mathcal{U}_{\sigma\wedge\tau})^{-1}\mathcal{U}_\sigma|$$

$$\leqslant \Big|1 - \prod_{\tau<k\leqslant\sigma} Z_k\Big|\, I(\tau<\sigma)$$

$$\leqslant 2\, I\Big(\prod_{1\leqslant k\leqslant\sigma} |Z_k| \leqslant \varepsilon\Big)$$

z def. V_σ /5.11/, /5.6/ i def. τ /5.10/.

$$/5.21/\quad |V_\sigma \mathcal{U}_\sigma - V_\sigma E_0 \mathcal{U}_\sigma| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}|\mathcal{U}_\sigma - E_0\mathcal{U}_\sigma|$$

bowiem $|V_\sigma| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

Całkując stronami nierówności /5.19/ - /5.21/ względem P_o i uwzględniając /5.18/, otrzymujemy /5.8/. $\square$

Wróćmy do dowodu Tw. 5.1. Niech $y \in H$ będzie takie, aby $\hat{\mu}(y) \neq 0$. Ustalmy n i połóżmy w L. 5.2.

$$Y_k := \exp\Big(i\langle y, \sum_{1\leqslant j\leqslant k} X_{nj}\rangle\Big)$$

$$Z_k := \hat{\mu}_{nk}(y)\ \big(= E\,(\exp(i\langle y, X_{nk}\rangle)|\mathcal{F}_{n,k-1})\ \text{p.w.}\big)$$

$$\varepsilon := \frac{1}{2}|\hat{\mu}(y)|$$

Założenia L. 5.2. są spełnione w sposób oczywisty, stąd dla momentu zatrzymania σ_n zachodzi

$$/5.22/\quad |E_{no}\exp(i\langle y, S(\sigma_n)\rangle) - E_{no}\widehat{\mu(\sigma_n)}(y)|$$

$$\leqslant 4\,P_{no}\Big(|\widehat{\mu(\sigma_n)}(y)| \leqslant \frac{1}{2}|\hat{\mu}(y)|\Big)$$

$$+\ 2\,|\hat{\mu}(y)|^{-1} E_{no}\,|\widehat{\mu(\sigma_n)}(y) - E_{no}\widehat{\mu(\sigma_n)}(y)|$$

Ponieważ $\mu(\sigma_n) \underset{P}{\Rightarrow} \mu$, mają miejsce związki

$$/5.23/\quad \widehat{\mu(\sigma_n)}(y) \xrightarrow[P]{} \hat{\mu}(y)\ ;\ y \in H.$$

/5.24/ $E_{no}\widehat{\mu(\sigma_m)}(y) \xrightarrow[P]{} \hat{\mu}(y)$; $y \in H$.

Stąd $E_{no}|\widehat{\mu(\sigma_m)}(y) - E_{mo}(\widehat{\mu(\sigma_m)}(y))| \xrightarrow[P]{} 0$ oraz $P(|\widehat{\mu(\sigma_n)}(y)| \le \frac{1}{2}|\hat{\mu}(y)|$ $\to 0$, jeśli tylko $\hat{\mu}(y) \neq 0$. Ostatecznie

/5.25/ $E_{no}\exp(i\langle y, S(\sigma_m)\rangle) \xrightarrow[P]{} \hat{\mu}(y)$; $y \in \{y ; \hat{\mu}(y) \neq 0\}$.

Po scałkowaniu obu stron /5.25/ otrzymujemy /5.3/ $\square$

Zauważmy, że na ogół /5.25/ jest rezultatem silniejszym, niż /5.3/ /σ-algebry $\mathfrak{F}_{no}$ nie muszą być trywialne/. Następujące wzmocnienie /5.25/ wykorzystane zostanie w Rozdziale III /przyjmijmy oznaczenie $\mu_0(\sigma_n)$ dla regularnego rozkładu warunkowego $S(\sigma_n)$ względem $\mathfrak{F}_{no}$ /

WNIOSEK 5.3.

Jeżeli funkcja charakterystyczna miary $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$ jest różna od zera na przeliczalnym podzbiorze gęstym $G \subset H$, i jeśli $\mu(\sigma_n) \xRightarrow[P]{} \mu$, to warunkowe rozkłady $S(\sigma_n)$ względem $\mathfrak{F}_{no}$ zmierzają wg p-stwa do μ :

/5.26/ $\mu_0(\sigma_m) \xRightarrow[P]{} \mu$.

DOWÓD. Tw. 5.1. gwarantuje zbieżność $\mathcal{L}(S(\sigma_n)) = E\,\mu_0(\sigma_n) \Rightarrow \mu$, ciąg $\{\mu_0(\sigma_m)\}$ jest więc /zob. Wn. 16.4/ ciasny. Niech ν /rozkład losowy/ będzie punktem skupienia $\{\mu_0(\sigma_m)\}$. Wtedy

$$\widehat{\mu(\sigma_{m'})}(y) \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \hat{\nu}(y) \ ; \ y \in H .$$

wzdłuż pewnego podciągu $\{m'\}$. Ale z /5.25/ $\hat{\nu}(y) = \hat{\mu}(y)$ p.w.; $y \in G$, i stąd

/5.27/ $P(\{\omega ; \nu(\omega) = \mu\}) = P(\bigcap_{y \in G}\{\hat{\nu}(\omega)(y) = \hat{\mu}(y)\}) = 1$. $\square$

Jak zaznaczono we Wstępie, problem, czy /5.1/ implikuje $\mathcal{L}(S(\sigma_n)) \Rightarrow \mu$ dla dowolnej miary μ, pozostaje otwarty.

Tw. 5.1. nie może być uogólnione na przypadek dowolnej, ośrodkowej przestrzeni Banacha - odpowiedni kontrprzykład został podany przez J.Rosińskiego [33].

Pierwowzorem dla Tw. 5.1. było Twierdzenie B z pracy autora [19], w którym prócz założenia /5.1/ przyjmuje się dodatkowo

/5.28/ $\sup\limits_{1 \leq k \leq \sigma_n} \mu_{nk}(\|x\| > \varepsilon) \xrightarrow[P]{} 0 \;;\; \varepsilon > 0 .$

Dowód Tw. 5.1. przy silnym założeniu /5.28/ jest znacznie prostszy, niż dowód przedstawiony powyżej /tzn. oparty na Tw. 4.4/. Połączone warunki /5.1/ i /5.28/ dają bowiem jawne wyrażenia pozwalające na bezpośrednie sprawdzenie ciasności sum $\{S(\sigma_n)\}$.

§ 6. Przypadek skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta.

Niech przestrzeń Hilberta H będzie skończenie wymiarowa:

/6.1/ $\dim H < +\infty$.

Łatwo spostrzec, że w takim przypadku dowód Tw. 5.1 jest całkowicie oparty na L. 5.2.

Istotnie, warunek

/6.2/ $(\equiv /5.3/)$ $E\exp(i\langle y, S(\sigma_n)\rangle) \longrightarrow \hat{\mu}(y) \;;\; y \in \{y \,;\, \hat{\mu}(y) \neq 0\}.$

jest konsekwencją nierówności /5.22/ /danej przez L. 5.2/ oraz warunku

/6.3/ $(\equiv (5.23))$ $\widehat{\mu(\sigma_m)}(y) \xrightarrow[p]{} \hat{\mu}(y)$; $y \in H$.

który, z kolei, wynika z założenia

/6.4/ $(\equiv /5.1/)$ $\mu(\sigma_m) \underset{p}{\Rightarrow} \mu$.

$\hat{\mu}$, jako funkcja charakterystyczna, jest ciągła w $0 \in H$, i dlatego zbiór $\{y;\ \hat{\mu}(y) \neq 0\}$ zawiera pewne otoczenie zera: $0 \in A \subset H$. Na mocy /6.2/, na A ma miejsce zbieżność funkcji charakterystycznych sum $S(\sigma_n)$ do funkcji ciągłej w zerze. Fakt ten implikuje ciasność sum $\{S(\sigma_n)\}$.

Dowód. Tw. 5.1. przy dodatkowym założeniu /6.1/ jest zakończony.

Pozostaje jeszcze wyjaśnić związek między podstawowym założeniem /6.4/, a warunkiem /6.3/.

STWIERDZENIE 6.1.

Niech $\{\mu_m\}$ będzie ciągiem rozkładów losowych na H, a $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$ – rozkładem /nielosowym/ na H.
Jeżeli dim H $< +\infty$, to następujące warunki są równoważne.

/i / $\mu_m \underset{p}{\Rightarrow} \mu$

/ii/ $\hat{\mu}_m(y) \xrightarrow[p]{} \hat{\mu}(y)$; $y \in G$,

gdzie G jest dowolnym gęstym podzbiorem H, zawierającym otoczenie zera.

DOWÓD. Odwzorowane $\mathcal{M}_1(H) \ni \nu \longmapsto \hat{\nu}(y) \in \mathbb{C}^1$ jest ciągłe, warunek /ii/ jest więc oczywistą konsekwencją (i) .
Załóżmy /ii/. Z Tw. Lebesgue'a wynika, że

$$E\ \hat{\mu}_m(y) \to \hat{\mu}(y)$$

na pewnym otoczeniu zera. Implikuje to relatywną zwartość ciągu $\{E\mu_m\}$. Na podstawie Wn. 16.4. ciąg $\{\mu_m\}$ jest ciasny.

Dalej rozumujemy tak samo, jak w dowodzie Wn. 5.3.

Oczywiście, jeżeli dim $H = +\infty$, warunek /ii/ jest istotnie słabszy niż /i/.

Wykorzystując przedstawioną metodę, łatwo jest podać dla miar losowych, analogiczną do Stw. 6.1., charakretyzację zbieżności wg r o z k ł a d u. W § 9 zobaczymy, że z punktu widzenia martyngałowych twierdzeń granicznych, jest to niecelowe.

R o z d z i a ł II
MARTYNGAŁOWE TWIERDZENIA GRANICZNE

§ 7. Martyngałowe twierdzenia graniczne dla składników warunkowo infinitezymalnych.

Martyngałowe twierdzenie graniczne dla składników warunkowo infinitezymalnych /w skrócie MTG /I/ /, to skonstruowane wg Zasady P. Lévy'ego uogólnienie rozwiązania centralnego problemu granicznego /CPG/ dla sum niezależnych zmiennych losowych.

Pokażemy, jak uzyskać MTG /I/, stosując Uogólnioną Zasadę P.Lévy'ego.

Przypomnijmy najpierw podstawowe tezy rozwiązania CPG w przestrzeni Hilberta /wg Varadhana [37], zob. również [29], Rozdz.VI/.

Niech $\underline{\underline{\mathfrak{X}}} = \{ X_{nk} \ ; \ 1 \leqslant k \leqslant k_n, n \in \mathbb{N} \}$ będzie tablicą niezależnych w wierszach zmiennych losowych o wartościach w H. Załóżmy, że zmienne tablicy $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ są jednostajnie infinitezymalne, tzn.

/7.1/ $$\sup_{1 \leqslant k \leqslant k_n} P(\|X_{nk}\| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad ; \ \varepsilon > 0 .$$

Wówczas klasa możliwych rozkładów granicznych dla sum wierszowych pokrywa się z klasą rozkładów nieskończenie podzielnych, tzn. takich rozkładów μ, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje rozkład μ_n o własności

/7.2/ $$\mu = (\mu_n)^{*n}$$

Rozkład μ jest rozkładem nieskończenie podzielnym wtedy, i tylko wtedy, gdy jego funkcja charakterystyczna jest postaci

/7.3/ $\hat{\mu}(y) = \exp\left(i\langle y,a\rangle - \frac{1}{2}\langle Sy,y\rangle + \int K(y,x)\, M(dx) \right)$

gdzie $a \in H$, S jest S-operatorem, M - miarą spektralną Lévy'ego, tzn. σ-skończoną miarą na $\mathcal{B}_H$ o własnościach

/7.4/ $\int_{\{\|x\| \leq 1\}} \|x\|^2 M(dx) < +\infty$

/7.5/ $M(\|x\| > c) < +\infty \quad ; \quad c > 0$

/7.6/ $M(\{0\}) = 0$

W /7.3/ funkcja $K(y,x)$ jest określona wzorem

/7.7/ $K(y,x) = \exp(i\langle y,x\rangle) - 1 - i\langle y,x\rangle\, h(\|x\|)$

gdzie funkcja $h : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ zadana jest przez

/7.8/ $h(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

W istocie, nie jest ważna konkretna postać /7.8/ funkcji h, lecz jej ciągłość oraz fakt przyjmowania wartości 1 w pewnym otoczeniu zera oraz wartości 0 na zewnątrz pewnego otoczenia zera.

Przy ustalonej funkcji h, reprezentacja rozkładu nieskończenie podzielnego μ przez trójkę /a, S, M/ zadaną w /7.3/ jest jednoznaczna; nazywamy ją reprezentacją Lévy'ego rozkładu μ i oznaczamy

/7.9/ $\mu = \ell(a, S, M)$

W przypadku, gdy $M \equiv 0$, rozkład $\ell\,/a,S,0/$ nazywamy rozkładem gausowskim o wartości średniej a i operatorze kowariancji S.

Rodzina miar Lévy'ego na H jest podzbiorem zbioru miar σ-skończonych na $\mathcal{B}_H$ i spełniających warunki /7.5/ i /7.6/, czyli skończonych na zewnątrz każdego otoczenia zera i nie posiadających atomu w zerze.

Oznaczamy zbiór takich miar przez

/7.10/ $\sigma_0 - \mathcal{M}(H)$

Zbiór borelowski $A \in \mathcal{B}_H$ nazywamy zbiorem ciągłości miary $M \in \sigma_0 - \mathcal{M}(H)$, jeżeli

/7.11/ $0 \notin \bar{A}, \quad M(\partial A) = 0$

gdzie $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ jest topologicznym brzegiem A. Rodzinę zbiorów ciągłości miary $M \in \sigma_0 - \mathcal{M}(H)$ oznaczać będziemy symbolem

/7.12/ $\sigma_0 -$ Cont M.

Mówimy, że rodzina $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_H$ determinuje zbieżność w $\sigma_0 - \mathcal{M}(H)$, jeżeli dla dowolnego ciągu $\{M_n\}_{m \in \overline{\mathbb{N}}} \subset \sigma_0 - \mathcal{M}(H)$ takiego, że $M_\infty(\|x\| = \varepsilon) = 0$, zbieżność

/7.13/ $M_m^\varepsilon(A) \longrightarrow M_\infty^\varepsilon(A)\ ; \ A \cap \{\|x\| \geq \varepsilon\} \in \sigma_0 - \mathrm{Cont}\, M_\infty\,,\ A \in \mathcal{A}\,,$

pociąga zbieżność

/7.14/ $M_n^\varepsilon \Rightarrow M_\infty^\varepsilon \quad (\omega \ \ \mathcal{M}(\{\|x\| \geq \varepsilon\}))$

gdzie $M_n^\varepsilon(A) = M_m(A \cap \{\|x\| \geq \varepsilon\})\ ; n \in \overline{\mathbb{N}}$, można traktować jako elementy przestrzeni $\mathcal{M}(\{\|x\| \geq \varepsilon\})$.

Z łatwej modyfikacji Wniosków 1 i 2, str. 15, [4], wynika, że dla dowolnej miary $M \in \sigma_0 - \mathcal{M}(H)$ można znaleźć p r z e l i c z a l n ą rodzinę $\mathcal{A} \subset \sigma_0 -$ Cont M, która determinuje zbieżność w $\sigma_0 - \mathcal{M}(H)$.

TWIERDZENIE 7.1.

Niech tablica $\underline{\underline{\mathfrak{X}}} = \{ X_{nk};\ 1 \leqslant k \leqslant k_n, n \in \mathbb{N} \}$ niezależnych w wierszach zmiennych losowych o wartościach w H spełnia warunek jednostajnej infinitezymalności /7.1/.
Rozważmy warunki / $\tilde{X}_{nk} = X_{nk}\, h(\|X_{nk}\|)$ /:

/7.15/ $\sum_k P(X_{nk} \in A) \to M^{\infty}(A);\quad A \in \mathcal{A}$.

/7.16/ $\sum_k E\,\tilde{X}_{nk} \to a^{\infty}$

/7.17/ $\sum_k \left(E\,\|\tilde{X}_{nk}\|^2 - \|E\,\tilde{X}_{nk}\|^2\right) \to \operatorname{tr}(S^{\infty}) + \int \|x\|^2 h^2(\|x\|) M^{\infty}(dx)$

/7.18/ $\sum_k \left(E\langle y, \tilde{X}_{nk}\rangle^2 - \langle y, E\tilde{X}_{nk}\rangle^2 \right) \to$

$$\to \langle S^{\infty} y, y\rangle + \int \langle y, x\rangle^2 h^2(\|x\|) M^{\infty}(dx)\ ;\ y \in G.$$

gdzie sumowanie po k rozciągnięte jest na zbiór $\{1,2,\ldots,k_n\}$.

Dla zbieżności $\mathcal{L}(S_m) \Rightarrow \mu_{\infty} = \ell(a^{\infty}, S^{\infty}, M^{\infty})$ potrzeba, aby spełnione były warunki /7.15/ - /7.18/ z $\mathcal{A} = \sigma_0\text{-}\mathrm{Cont}\, M^{\infty}$ i G = H, i wystarcza, aby miały miejsce warunki /7.16/ i /7.17/ oraz warunek /7.15/ dla $\mathcal{A}$ - pewnej przeliczalnej rodziny zbiorów ciągłości M^{∞}, determinującej zbieżność w $\sigma_0\text{-}\mathcal{M}(H)$, i warunek /7.18/ dla G - pewnego przeliczalnego, liniowego i gęstego podzbioru H. □

W oparciu o Tw. 7.1. "przetłumaczymy" teraz założenie UZL:

/7.19/ $\mu(\sigma_m) \underset{p}{\Rightarrow} \mu$.

STWIERDZENIE 7.2.

Niech $\underline{\underline{\nu}} = \{\nu_{mk};\ k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ będzie tablicą rozkładów losowych na H, $\underline{\tau} = \{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{N}_0$, a $\mu_{\infty} = \ell(a^{\infty}, S^{\infty}, M^{\infty})$ rozkładem nieskończenie podzielnym. Połóżmy

/7.20/ $\nu(\tau_n) := \underset{1\leq k\leq \tau_n}{\boxed{*}} \nu_{mk}$

Jeżeli rozkłady losowe tablicy $\underline{\underline{\nu}}$ są $\underline{\tau}$- jednostajnie infinitezymalne, tzn. spełniony jest warunek

/7.21/ $\sup\limits_{1\leq k\leq \tau_n} \nu_{mk}(\|x\|>\varepsilon) \xrightarrow[P]{} 0 \ ; \ \varepsilon>0 .$

to zbieżność

/7.22/ $\nu(\tau_m) \underset{P}{\Longrightarrow} \mu_\infty$

zachodzi wtedy, i tylko wtedy, gdy mają miejsce warunki

/7.23/ $\sum\limits_{1\leq k\leq \tau_n} \nu_{mk}(A) \xrightarrow[P]{} M^\infty(A) \ ; \ A\in\mathcal{A} .$

/7.24/ $\sum\limits_{1\leq k\leq \tau_n} \int x h(\|x\|)\nu_{mk}(dx) \xrightarrow[P]{} a^\infty$

/7.25/ $\sum\limits_{1\leq k\leq \tau_n} \left(\int \|x\|^2 h^2(\|x\|)\nu_{mk}(dx) - \left\|\int x h(\|x\|)\nu_{mk}(dx)\right\|^2\right)$
$\xrightarrow[P]{} tr(S^\infty) + \int \|x\|^2 h^2(\|x\|) M^\infty(dx) .$

/7.26/ $\sum\limits_{1\leq k\leq \tau_n} \left(\int \langle y,x\rangle^2 h^2(\|x\|)\nu_{mk}(dx) - \langle y, \int x h(\|x\|)\nu_{mk}(dx)\rangle^2\right)$
$\xrightarrow[P]{} \langle S^\infty y, y\rangle + \int \langle y,x\rangle^2 h^2(\|x\|) M^\infty(dx) \ ; \ y\in G .$

gdzie $\mathcal{A}\subset \mathfrak{S}_0$ - Cont M^∞ jest przeliczalną rodziną determinującą zbieżność w $\mathfrak{S}_0 - \mathcal{M}(H)$, a $G\subset H$ jest przeliczalnym, liniowym i gęstym podzbiorem H .

DOWÓD. Zdefiniujmy przestrzenie $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$:

/7.27/ $\mathcal{H} := \mathbb{N}_0 \times (\mathcal{M}_1(H))^{\mathbb{N}}$

/7.28/ $\mathcal{H}_1 := [0,1]^{\mathbb{N}} \times \mathcal{M}_1(H)$

/7.29/ $\mathcal{H}_2 := [0,1]^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}} \times H \times (\mathbb{R}^+) \times (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$

W przestrzeniach $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ przyjmujemy topologię produktową /więc są to przestrzenie polskie/.

Niech $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ będzie malejącym do zera ciągiem liczb rzeczywistych.

Funkcjonał $F_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ określimy wzorem

/7.30/ $F_1((m,(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}})) = \left(\left(\sup_{1\leq k\leq m} \nu_k(\|x\|>\varepsilon_j)\right)_{j\in\mathbb{N}},\ \boxed{*}_{1\leq k\leq m}\, \nu_k\right)$

/zgodnie ze stałą konwencją $\boxed{*}_{1\leq k\leq 0} \equiv \delta_0$, ponadto przyjmujemy $\sup_{1\leq k\leq 0} \nu_k(\|x\|>\varepsilon_j) \equiv 0$ /.

Niech $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ i $G = \{y_1, y_2, \ldots\}$ będą takie, jak w tezie twierdzenia. Mając zadany rozkład $\mu_\infty = \ell(a^\infty, S^\infty, M^\infty)$ oraz wybrane $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}$ i G określamy funkcjonał

$$F_2 = (F_2^1, F_2^2, \ldots, F_2^5) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_2$$

poprzez wartości poszczególnych współrzędnych F_2 na $x = (n, (\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{H}$:

/7.31/ $F_2^1(x) := \left(\sup_{1\leq k\leq n} \nu_k(\|x\|>\varepsilon_j)\right)_{j\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$

/7.32/ $F_2^2(x) := \left(\sum_{1\leq k\leq n} \nu_k(A_j)\right)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$

/7.33/ $F_2^3(x) := \sum_{1\leq k\leq n} \int x h(\|x\|)\, \nu_k(dx) \in H$

/7.34/ $F_2^4(x) := \sum_{1\leq k\leq n} \left(\int \|x\|^2 h^2(\|x\|)\, \nu_k(dx) - \left\|\int x h(\|x\|)\, \nu_k(dx)\right\|^2\right) \in \mathbb{R}^+$

/7.35/ $F_2^5(x) := \left(\sum_{1\leq k\leq n} \left(\int \langle y_j, x\rangle^2 h^2(\|x\|)\, \nu_k(dx) - \left\langle y_j, \int x h(\|x\|)\, \nu_k(dx)\right\rangle^2\right)\right)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$

Jeżeli $\{x_n\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, Tw. 7.1. mówi, że

/7.36/ $F_1(x_n) \to x' = ((0)_{j\in\mathbb{N}},\ \mu = \ell(a^\infty, S^\infty, M^\infty)) \in \mathcal{H}_1$

dokładnie wtedy, gdy

/7.37/ $F_2(x_n) \to x'' = \Big((0)_{j\in\mathbb{N}},\ (M^\infty(A_j))_{j\in\mathbb{N}},\ a^\infty,$

$\mathrm{tr}(S^\infty) + \int \|x\|^2 h^2(\|x\|)\, M^\infty(dx),$

$\left(\langle S^\infty y_j, y_j\rangle + \int \langle y_j, x\rangle^2 h^2(\|x\|)\, M^\infty(dx)\right)_{j\in\mathbb{N}}\Big) \in \mathcal{H}_2$

Stąd /$\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ są przestrzeniami polskimi/ metodą wybierania podciągów natychmiast uzyskujemy, że

$$/7.38/ \quad F_1(X_n) \xrightarrow[P]{} x' \iff F_2(X_n) \xrightarrow[P]{} x'' .$$

dla dowolnego ciągu $\{X_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ mierzalnych elementów losowych w $\mathcal{H}$. Kładąc $X_n = (\tau_n, (\nu_{mk})_{k\in\mathbb{N}})$ uzyskujemy tezę stwierdzenia . □

Niech $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}, \underline{\sigma})$ będzie układem podstawowym. Stosując oznaczenia § 3 połóżmy w Stw. 7.2. $\nu_{mk} = \mu_{nk}$ i $\tau_n = \sigma_n$. Ponieważ μ_{mk} jest regularnym rozkładem warunkowym X_{nk} względem $\mathcal{F}_{n,k-1}$, warunek /7.23/ możemy przepisać w postaci

$$/7.39/ \quad \sum_{1\le k\le\sigma_n} P_{n,k-1}(X_{nk}\in A) \xrightarrow[P]{} M^{\infty}(A) \; ; \; A\in\mathcal{A} .$$

gdzie użyliśmy konwencji

$$/7.40/ \quad P_{n,k-1}(\cdot) = P(\cdot\,|\mathcal{F}_{n,k-1}) , \; E_{n,k-1}(\cdot) = E(\cdot\,|\mathcal{F}_{n,k-1}).$$

Podobnie można przetłumaczyć pozostałe warunki

/7.21/ i /7.24/ - /7.26/. Na mocy Stw. 7.2 implikują one zbieżność wg p-stwa prognozowalnych charakterystyk $\mu(\sigma_n)$ do $\mu_\infty = \ell(a^\infty, \varsigma^\infty, M^\infty)$, czyli założenie Tw. 5.1. Udowodniliśmy tym samym:

TWIERDZENIE C//17,3/ - MTG/I//

Niech $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}, \underline{\sigma})$ będzie układem podstawowym, a $\mu_\infty = \ell(a^\infty, \varsigma^\infty, M^\infty)$ rozkładem nieskończenie podzielnym.

Załóżmy, że spełnione są następujące warunki :

$$/7.41/ \quad \sup_{1\le k\le\sigma_n} P_{n,k-1}(\|X_{nk}\|>\varepsilon) \xrightarrow[P]{} 0 \; ; \; \varepsilon > 0.$$

$$/7.42/ \quad \sum_{1\le k\le\sigma_n} P_{n,k-1}(X_{n,k}\in A) \xrightarrow[P]{} M^\infty(A); \; A\in\sigma_0\text{- Cont } M^\infty$$

/7.43/ $$\sum_{1\le k\le \sigma_n} E_{n,k-1}(\widetilde{X}_{nk}) \xrightarrow[P]{} a^\infty .$$

/7.44/ $$\sum_{1\le k\le \sigma_n} \left(E_{n,k-1}\|\widetilde{X}_{nk}\|^2 - \|E_{n,k-1}(\widetilde{X}_{nk})\|^2\right) \xrightarrow[P]{}$$

$$\xrightarrow[P]{} tr(S^\infty) + \int \|x\|^2 h^2(\|x\|)\, M^\infty(dx)$$

/7.45/ $$\sum_{1\le k\le \sigma_n} \left(E_{n,k-1}\langle y,\widetilde{X}_{nk}\rangle^2 - \langle y, E_{n,k-1}(\widetilde{X}_{nk})\rangle^2\right) \xrightarrow[P]{}$$

$$\xrightarrow[P]{} \langle S^\infty y, y\rangle + \int \langle y,x\rangle^2 h^2(\|x\|)\, M^\infty(dx) \quad ; \ y\in H .$$

gdzie, jak zwykle, $\widetilde{X}_{nk} = X_{nk}\, h(\|X_{nk}\|)$.

Wówczas rozkłady ciągu $\{S(\sigma_n)\}_{m\in N}$ są słabo zbieżne do rozkładu $\mu_\infty = \ell(a^\infty, S^\infty, M^\infty)$. ∎

W przypadku, gdy $\mu_\infty = \ell(0, S^\infty, 0)$ jest symetrycznym rozkładem gausowskim o operatorze kowariancji S^∞, Tw. 7.3. przyjmuje postać następującą:

WNIOSEK 7.4. /CMTG/

Niech $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{F}}, \underline{\sigma})$ będzie układem podstawowym. Ciąg $\{S(\sigma_m)\}_{m\in N}$ jest zbieżny wg rozkładu do $\mu_\infty = \ell(0, S^\infty, 0)$, jeśli spełnione są następujące warunki:

/7.46/ $$\sum_{1\le k\le \sigma_n} P_{n,k-1}(\|X_{nk}\| > \varepsilon) \xrightarrow[P]{} 0 \ ; \ \varepsilon > 0.$$

/7.47/ $$\sum_{1\le k\le \sigma_n} E_{n,k-1}(\widetilde{X}_{nk}) \xrightarrow[P]{} 0.$$

/7.48/ $$\sum_{1\le k\le \sigma_n} \left(E_{n,k-1}\|\widetilde{X}_{nk}\|^2 - \|E_{n,k-1}(\widetilde{X}_{nk})\|^2\right) \xrightarrow[P]{} tr(S^\infty)$$

/7.49/ $$\sum_{1\le k\le \sigma_n} \left(E_{n,k-1}\langle y,\widetilde{X}_{nk}\rangle^2 - \langle y, E_{n,k-1}\widetilde{X}_{nk}\rangle^2\right) \xrightarrow[P]{} \langle S^\infty y, y\rangle \ ; \ y\in H:$$

gdzie jako $\widetilde{X}_{nk}$ można położyć $X_{nk}\, I(\|X_{nk}\| \le C)$, $C > 0$. □

Tw. 7.3. i Wn. 7.4 są nieskończenie wymiarowymi uogólnieniami Tw. 4.2. i Wn. 6.1 z pracy [22], gdzie rozważany jest przypadek $H = \mathbb{R}^d$, $\sigma_n \equiv k_n \in \mathbb{N}$. Mniej przejrzyste w formie sformułowanie Tw. 7.3. zostało opublikowane w pracy autora [19]. Rosiński [33] udowodnił twierdzenie analogiczne do Tw. 7.3. w przypadku p - wygładzalnej, ośrodkowej przestrzeni Banacha. Jak wiadomo ze Wstępu, technika dowodu tego rezultatu nie mogła być oparta na ZL; zbliżona jest ona do metody przedstawionej w pracy [19].

MTG /I/ oraz pochodne tego twierdzenia /zob. § 8./ są najważniejszymi konsekwencjami UZL. Nie wyczerpują one jednak wszystkich możliwości zastosowań. Podamy przykład nietrywialnego MTG, w którym składniki nie muszą być warunkowo infinitezymalne.

Ograniczamy się do przypadku $H = \mathbb{R}^1$.

Mówimy, że tablica $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ jest /0-1/-tablicą, jeśli wszystkie zmienne tablicy $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ przyjmują wyłącznie wartości 0 i 1, tzn. są funkcjami charakterystycznymi pewnych zbiorów:

/7.50/ $X_{nk} = I_{A_{nk}}$; $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

TWIERDZENIE 7.5.

Niech $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ będzie /0-1/-tablicą i niech $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\sigma})$ będzie układem podstawowym.

Oznaczamy $P_{n,k} = P_{n,k-1}(X_{nk} = 1)$.

Niech $\mu = \mu_0 * \underset{k=1}{\overset{\infty}{\boxed{*}}} \mu_k$, gdzie μ_0 jest standardowym rozkładem Poissona o parametrze $\lambda \geqslant 0$, a $\mu_k = p_k \delta_1 + (1-p_k)\delta_0 ; k \geqslant 1$, są rozkładami /0-1/-zmiennych losowych o parametrach $0 \leqslant p_k \leqslant 1$, przy czym

/7.51/ $\sum_{1 \leqslant k < +\infty} p_k < +\infty$

Warunki

$$/7.52/ \quad \sum_{1 \leq k \leq \sigma_m} \mathbf{P}_{nk} \xrightarrow[\mathcal{P}]{} \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

$$/7.53/ \quad \sum_{1 \leq k \leq \sigma_m} (\mathbf{P}_{nk})^j \xrightarrow[\mathcal{P}]{} \sum_{k=1}^{\infty} (p_k)^j; \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

pociągają zbieżność $\mathcal{L}(S(\sigma_m)) \Rightarrow \mu$.

DOWÓD. Zauważmy, że rozkłady warunkowe X_{nk} względem $\mathcal{F}_{n,k-1}$ są losowymi /0-1/-rozkładami :

$$/7.54/ \quad \mu_{mk} = \mathbf{P}_{nk} \cdot \delta_1 + /1 - \mathbf{P}_{nk}/ \cdot \delta_0$$

Przypuśćmy, że mamy udowodnione odpowiednie twierdzenie dla splotów /0-1/-rozkładów. Ponieważ /7.52/ i /7.53/ tworzą przeliczaną rodzinę warunków, w celu sprawdzenia założenia UZL /Tw. 5.1/ można zastosować procedurę analogiczną do Stw. 7.2.

Wystarczy więc wykazać:

TWIERDZENIE 7.6.

Niech $\underline{\underline{\nu}} = \{\nu_{nk};\ 1 \leq k \leq k_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie tablicą /0-1/ rozkładów:

$$7.55/ \quad \nu_{nk} = p_{nk} \cdot \delta_1 + /1 - p_{nk}/ \cdot \delta_0$$

Niech rozkład μ będzie określony jak w Tw. 7.5.

Dla zbieżności

$$/7.56/ \quad \nu_n = \boxed{*}_{1 \leq k \leq k_n} \nu_{mk} \Rightarrow \mu$$

potrzeba i wystarcza, aby

$$/7.57/ \quad \sum_{1 \leq k \leq k_n} p_{nk} \to \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

$$/7.58/ \quad \sum_{1 \leq k \leq k_n} (p_{nk})^j \to \sum_{k=1}^{\infty} (p_k)^j; \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

DOWÓD. Rozważmy transformaty Laplace'a rozkładów ν_n i μ $(t > 0)$:

$$L_t(\nu_n) = \int e^{-tx} \nu_n(dx) = \prod_{1 \leq k \leq k_n} \left(1 + (e^{-t} - 1) p_{nk}\right)$$

$$= \exp\Big(\sum_{1 \leq k \leq k_n} \ln\left(1 + (e^{-t} - 1) p_{nk}\right)$$

$$= \exp\Big(- \sum_{1 \leq k \leq k_n} \sum_{j=1}^{\infty} (1 - e^{-t})^j (p_{nk})^j \Big)$$

$$= \exp\Big(- \sum_{j=1}^{\infty} u^j \Big(\sum_{1 \leq k \leq k_n} (p_{nk})^j \Big)$$

$$L_t(\mu) = \int e^{-tx} \mu(dx) = e^{-\lambda(1 - e^{-t})} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + (e^{-t} - 1) p_k\right)$$

$$= \exp\Big(- u\Big(\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} p_k\Big) - \sum_{j=2}^{\infty} u^j \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (p_k)^j \Big) \Big)$$

gdzie $u = (1 - e^{-t})$, $u \in (0,1)$.

Wynika stąd, że $L_t \nu_n \to L_t \mu$; $t > 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$/7.59/ \quad \sum_{j=1}^{\infty} u^j \Big(\sum_{1 \leq k \leq k_n} p_{nk}^j \Big) \to u\Big(\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} p_k\Big) + \sum_{j=2}^{\infty} u^j \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (p_k)^j \Big); \quad u \in (0,1)$$

Pozostaje tylko zauważyć, że $0 \leq p_{nk} \leq 1$ pociąga

$$/7.60/ \quad 0 \leq \sum_{1 \leq k \leq k_n} p_{nk}^j \leq \sum_{1 \leq k \leq k_n} p_{nk} \leq \sup_{n} \sum_{1 \leq k \leq k_n} p_{nk} \; ; \; j \geq 2.$$

przy czym $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{1 \leq k \leq k_n} p_{nk} < +\infty$, bądź to z założenia /7.57/, bądź z /7.59/. Stąd współczynniki szeregów potęgowych w /7.59/ są wspólnie ograniczone - zbieżność w /7.59/ zachodzi więc dokładnie wtedy, gdy na miejsce zbieżność współczynników, tzn. /7.57/ i /7.58/ /zob. L. 3, [20] / □

§ 8. Centralne twierdzenie graniczne dla tablic różnic martyngałowych.

Interesującą konsekwencją CMTG jest centralne twierdzenie graniczne dla tablic różnic martyngałowych.

DEFINICJA 8.1. Tablicę $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{F}})$ spełniającą warunki

/8.1/ $E\|X_{nk}\| < +\infty$; $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

/8.2/ $E_{n,k-1}(X_{nk}) = 0$ p.w. ; $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

nazywamy tablicą różnic martyngałowych /TRM/ $\square$

Zauważmy, że jeżeli $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{F}})$ jest TRM, to również $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}^0)$ jest TRM, gdzie $\underline{\underline{F}}^0 = \{F^0_{nk}\}$ jest rodziną filtracji naturalnych: $F^0_{nk} = \sigma(X_{n1}, \ldots, X_{nk})$. W tej sytuacji, naturalne wydaje się żądanie, aby warunki TG dla TRM były niezmiennicze ze względu na zamianę filtracji $\underline{\underline{F}} \leftrightarrow \underline{\underline{F}}^0$. Nie jest to oczywiste w przypadku CMTG /Wn. 7.4/. Z drugiej strony, ze względu na silne założenia /8.1/ i /8.2/, operowanie uciętymi zmiennymi losowymi /np. warunek /7.47/ we Wn. 7.4/ jest niepotrzebnym skomplikowaniem problemu.

Od tych niedostatków wolne jest

TWIERDZENIE 8.2. /CTGM/.

Załóżmy, że $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{F}})$ jest TRM. Układ podstawowy $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}, \underline{\sigma})$ niech spełnia warunki:

/8.3/ $$\sup_{1 \leq k \leq \sigma_n} \|X_{nk}\| \xrightarrow[L^1]{} 0.$$

/8.4/ $$\sum_{1 \leq k \leq \sigma_n} \|X_{nk}\|^2 \xrightarrow[P]{} \operatorname{tr}(S^\infty)$$

/8.5/ $$\sum_{1\leq k\leq \sigma_n} \langle y, X_{nk}\rangle^2 \xrightarrow[P]{} \langle S^{\infty} y,y\rangle \quad ; \quad y\in G.$$

gdzie S^{∞} jest S-operatorem, G – liniowym i gęstym podzbiorem H.

Wtedy ciąg $\{S(\sigma_m)\}_{m\in \mathbb{N}}$ jest zbieżny wg rozkładu do $\ell/0,S^{\infty}, 0/$.

DOWÓD. Sprawdzimy, że spełnione są warunki /7.46/- /7.49/ z Wn. 7.4.

LEMAT 8.3.

Niech $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\sigma})$ będzie układem podstawowym.

/i/ Warunek /7.46/ i warunek

/8.6./ $$\sup_{1\leq k\leq \sigma_n} \|X_{nk}\| \xrightarrow[P]{} 0.$$

są równoważne.

/ii/ Załóżmy /8.6/. Wtedy warunek /7.48/ jest równoważny z

/8.7/ $$\sum_{1\leq k\leq \sigma_n} \| X_{nk} - E_{n,k-1} X_{nk} I(\|X_{nk}\| \leq 1) \|^2 \xrightarrow[P]{} \operatorname{tr}(S^{\infty})$$

a warunek /7.49/ jest równoważny z

/8.8/ $$\sum_{1\leq k\leq \sigma_n} \langle y, X_{nk} - E_{n,k-1} X_{nk} I(\|X_{nk}\| \leq 1)\rangle^2 \xrightarrow[P]{} \langle S^{\infty} y,y\rangle$$

DOWÓD. Adaptujemy /bez żadnych trudności technicznych/ jednowymiarowy dowód Tw.B. z pracy Sziriajewa i Lipcera [26].$\square$

LEMAT 8.4.

Jeżeli układ podstawowy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\sigma})$ spełnia warunek /8.3/, to spełniony jest również warunek

/8.9/ $$\sum_{1\leq k\leq \sigma_n} E_{n,k-1}(\|X_{nk}\| I(\|X_{nk}\| > 1)) \xrightarrow[P]{} 0.$$

DOWÓD przez zaadaptowanie rezultatu Hellanda [15], L.2.4. $\square$

Warunek /7.46/ wynika z /8.3/ /L. 8.3./

Na mocy /8.7/, aby sprawdzić /7.48/ wystarczy wykazać, że

$$/8.10/ \quad \sum_{1\leqslant k\leqslant \sigma_n} - 2\langle X_{nk}, E_{n,k-1} X_{nk} I(\|X_{nk}\|\leqslant 1)\rangle \xrightarrow[P]{} 0.$$

$$/8.11/ \quad \sum_{1\leqslant k\leqslant \sigma_n} \| E_{n,k-1} X_{nk} I(\|X_{nk}\|\leqslant 1)\|^2 \xrightarrow[P]{} 0.$$

Ale z założenia $E_{n,k-1} X_{nk} = 0$, więc

$$-\langle X_{nk}, E_{n,k-1} X_{nk} I(\|X_{nk}\|\leqslant 1)\rangle = \langle X_{nk}, E_{nk-1} X_{nk} I(\|X_{nk}\| > 1)\rangle,$$

i stąd, na podstawie L. 8.4.

$$\Big| \sum_{1\leqslant k\leqslant \sigma_n} \langle X_{nk}, E_{n,k-1} X_{nk} I(\|X_{nk}\|\leqslant 1)\rangle \Big|$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant \sigma_n} \|X_{nk}\| \cdot \sum_{1\leqslant k\leqslant \sigma_n} E_{n,k-1}(\|X_{nk}\| I(\|X_{nk}\| > 1)) \xrightarrow[P]{} 0.$$

Sprawdziliśmy /8.10/. Podobnie wykazujemy /8.11/ oraz /7.49/.
Warunek /7.47/ wynika bezpośrednio z $E_{n,k-1} X_{nk} = 0$ i /8.9/. $\square$

Pierwsze tego typu twierdzenie dla TRM udowodnił /w przypadku $H = R^1$/ McLeish [27].

Oprócz warunku /8.4/ zakładał on /8.6/ i

$$/8.12/ \quad \sup_n E \sup_{1\leqslant k\leqslant \sigma_n} \|X_{nk}\|^2 < +\infty$$

/postulował więc istnienie drugich momentów/.

Założenie /8.3/ zamiast /8.6/ i /8.12/ zostało wprowadzone przez Gänsslera i Häuslera [10]. Ich oryginalny dowód polegał na zastąpieniu tablicy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}})$ przez nową tablicę $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}', \underline{\underline{\mathfrak{F}}})$, która spełniała już założenia Tw.McLeisha. Przedstawione tutaj ujęcie, w zasadzie oparte jest na pracy Hellanda [15].

§ 9. O możliwościach uogólnienia Tw. 5.1.

Przypomnijmy założenia Tw. 5.1.

/9.1/ μ_{nk} jest regularnym rozkładem warunkowym X_{nk} względem $\mathcal{F}_{n,k-1}$, gdzie $\underset{\approx}{\mathfrak{X}} = \{X_{nk}\}$ jest adaptowana do $\underset{=}{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_{nk}\}$ i $\underset{=}{\mathcal{F}}$ jest ciągiem filtracji.

/9.2/ $\mu(\sigma_n) \underset{P}{\Rightarrow} \mu$, gdzie $\mu(\sigma_n) = \boxed{*}_{1 \leq k \leq \sigma_n} \mu_{nk}$ i μ jest /nielosowym/ rozkładem na H.

Warunek /9.1/ można traktować jako odpowiedź na pytanie: j a k w a r u n k o w a ć ? Podobnie /9.2/ wyjaśnia j a k i e g o r o d z a j u z b i e ż n o ś ć $\mu(\sigma_n)$ należy zakładać.

W pracy [9] , A.Dvoretzky sugerował odmienną niż /9.1/ odpowiedź na pierwsze pytanie. Używając terminologii naszej pracy, ideę Dvoretzky'ego można przedstawić w sposób następujący: należy wziąć jako μ_{nk} regularny rozkład warunkowy X_{nk} względem σ-algebry generowanej przez $S_{n,k-1} = \sum_{1 \leq j \leq k-1} X_{nj}$, i postulować /9.2/. Jak pokazuje kontrprzykład Kłopotowskiego /[23]/, tego typu ZL nie jest prawdziwa. Autorowi nieznane są inne, alternatywne wobec /9.1/, propozycje warunkowania.

Załóżmy więc /9.1/, i niech $\mu(\sigma_n)$ zmierza wg rozkładu /w $\mathcal{M}_1(H)$/ do pewnego rozkładu losowego $\mu_\infty(\cdot,\omega)$:

/9.3/ $\mu(\sigma_n) \underset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} \mu_\infty(\cdot,\omega)$

Tw. A /4.4/ niniejszej pracy pozwala stwierdzić ciasność ciągu $\{S(\sigma_n)\}$. Niestety, hipoteza

/9.4/ $\mathcal{L}(S(\sigma_m)) \Rightarrow E\mu_\infty$

nie jest prawdziwa /zob. np. Dvoretzky [9] , P.Hall, C.C.Heyde [14]/.

Naturalny przykład pokaże, że nawet zastąpienie warunku /9.3/ przez znacznie silniejszy

/9.5/ $\mu(\sigma_m) \underset{P}{\Rightarrow} \mu_\infty(\cdot,\omega)$

nie implikuje /9.4/, jeśli rozkład $\mu_\infty(\cdot,\omega)$ jest istotnie losowy.

PRZYKŁAD 9.1. Niech $\{(W_t, F_t);\ t\in\mathbb{R}^+\}$ będzie standardowym ruchem Browna /wszystkie niezbędne w tym przykładzie fakty i definicje zawarte są w [12]/. Połóżmy

/9.6/ $T(\omega) = \inf\{t>0\ ;\ W_t(\omega) = 1\}$.

T jest momentem zatrzymania. Rozważmy ciągły lokalny martyngał $\{(W_{t\wedge T}, F_{t\wedge T});\ t\in\mathbb{R}^+\}$. Niech $\{t_{nk};\ 0\leq k\leq k_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ będzie normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0,1]$, tzn.

/9.7/ $0 = t_{no} < t_{n1} < \ldots < t_{nk_n} = 1$;

/9.8/ $\max\limits_{1\leq k\leq k_n} |t_{nk} - t_{nk-1}| \to 0$

Określimy rzeczywisty układ podstawowy $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}, \sigma)$ wzorami

/9.9/ $X_{nk} = W_{t_{nk}\wedge T} - W_{t_{n,k-1}\wedge T}$; $1\leq k\leq k_n$, $X_{nk} = 0$; $k > k_n$, $n\in\mathbb{N}$

/9.10/ $\mathcal{F}_{nk} = \mathcal{F}_{t_{nk}}$; $0\leq k\leq k_n$, $\mathcal{F}_{nk} = \mathcal{F}_1$; $k>k_n$, $n\in\mathbb{N}$.

/9.11/ $\sigma_m \equiv k_n$; $n\in\mathbb{N}$.

Pokażemy, że

/9.12/ $\mu(\sigma_m) \underset{P}{\Rightarrow} N(0, T\wedge 1)$

ale jednocześnie

$$/9.13/\quad \mathcal{L}(S(\sigma_m)) = \mathcal{L}(W_{T\wedge 1}) \neq EN(0, T\wedge 1)$$

gdzie $N(0,T\wedge 1) = N(0, T(\omega)\wedge 1)$ jest losowym rozkładem normalnym o wariancji /losowej/ $\sigma^2(\omega) = T(\omega)\wedge 1$.

TRM $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{F}})$ spełnia warunki

$$/9.14/\quad \sup_{1\leqslant k\leqslant k_n} |X_{nk}| \xrightarrow[L^1]{} 0$$

$$/9.15/\quad \sum_{1\leqslant k\leqslant k_n} X_{nk}^2 \xrightarrow[p]{} T\wedge 1.$$

Istotnie, warunek /9.14/ wynika

1/ z implikowanego przez /9.8/ i ciągłość trajektorii procesu $\{W_{t\wedge T}\}$, warunku

$$/9.16/\quad \sup_{1\leqslant k\leqslant k_n} |X_{nk}| \to 0 \quad \text{p.w.}$$

2/ z jednostajnej całkowalności $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n} |X_{nk}|$:

$$/9.17/\quad \sup_m E \sup_k X_{nk}^2 \leqslant \sup_m E\left(\sum_k X_{nk}^2\right) = \sup_m E\left(\sum_k X_{nk}\right)^2 = E W_{T\wedge 1}^2 \leqslant EW_1^2 = 1.$$

Aby udowodnić /9.15/, zauważmy, że proces $\{t \mapsto t\wedge T\}$ jest wariacją kwadratową ciągłego martyngału lokalnego $(W_{t\wedge T}, F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$; warunek /9.15/ jest więc szczególnym przypadkiem /t = 1/ podstawowej własności wariacji kwadratowej /zob. Tw. 22, Rozdz.I, [12]/.

Podobnie, jak w dowodzie Tw. 8.2., stwierdzamy, że warunki /9.14/ i /9.15/ pociągają spełnienie warunków /7.46/, /7.47/ oraz

/9.18/ $$\sum_k \left(E_{n,k-1} \tilde{X}_{nk}^2 - (E_{n,k-1} \tilde{X}_{nk})^2 \right) \xrightarrow[p]{} T \wedge 1.$$

Oczywiste przystosowanie Stw. 7.2. daje teraz równoważność /7.46/, /7,47/ i /9,18/ z warunkiem /9.12/

Pozostaje wykazać /9.13/. Pokażemy, że dla $y \neq k\pi$

/9.19/ $$E \exp (i y W_{T \wedge 1}) - E \exp (- \tfrac{1}{2} y^2 (T \wedge 1)) \neq 0$$

Zauważmy, że

/9.20/ $$E \exp \left(- \tfrac{1}{2} y^2 (T \wedge 1)\right) = \exp (- \tfrac{1}{2} y^2) P(T > 1) + $$
$$+ E \exp (- \tfrac{1}{2} y^2 T) I (T \leqslant 1) = \exp (- \tfrac{1}{2} y^2) +$$
$$+ \exp (- \tfrac{1}{2} y^2) E \left(\exp (\tfrac{1}{2} y^2 (1 - T)) - 1\right) I (T \leqslant 1).$$

oraz, z def. T, /9.6/

/9.21/ $$E\exp(iyW_{T \wedge 1}) = \exp(iy) P (T \leqslant 1) + E\exp(iyW_1) I (T > 1).$$

Niech dla $y \in \mathbb{R}$

/9.22/ $$Y_t(y) = \exp\left(iyW_{t \wedge T \wedge 1} + \tfrac{1}{2} y^2 (t \wedge T \wedge 1)\right) \; ; \; t \in \mathbb{R}^+ .$$

Przy pomocy wzoru Ito łatwo sprawdzić, że $(Y_t(y), F_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ jest jednostajnie całkowalnym martyngałem / korzystamy z oczywistych związków $\langle W_{s \wedge T \wedge 1}, W_{s \wedge T \wedge 1} \rangle_t = t \wedge T \wedge 1$, $\langle W_{s \wedge T \wedge 1}, s \wedge T \wedge 1 \rangle_t = \langle s \wedge T \wedge 1, s \wedge T \wedge 1 \rangle_t \equiv 0$ /:

$$Y_t (y) = iy \int_0^t Y_s(y) \, dW_{s \wedge T \wedge 1} + \tfrac{1}{2} y^2 \int_0^t Y_s(y) \, d(s \wedge T \wedge 1)$$
$$- \tfrac{1}{2} y^2 \int_0^t Y_s(y) \, d(s \wedge T \wedge 1) = iy \int_0^t Y_s(y) \, dW_{s \wedge T \wedge 1}$$

Stąd, w szczególności

/9.23/ $$EY_1(y) = E \, Y_0(y) = 1$$

Z /9.22/, /9.23/ i /9.6/ wynika, że

/9.24/ $1 = \exp(iy)\, E\exp\left(\frac{1}{2}y^2 T\right) I(T \leqslant 1) +$

$$+ \exp\left(\frac{1}{2}y^2\right) E\exp(iyW_1)\, I(T > 1)$$

lub, po przekształceniu,

/9.25/ $E\exp(iyW_1)\, I(T > 1) = \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) -$

$$- \exp\left(iy - \frac{1}{2}y^2\right) E\exp\left(\frac{1}{2}y^2 T\right) I(T \leqslant 1)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) - \exp(iy)\, E\exp\left(-\frac{1}{2}y^2(1-T)\right) I(T \leqslant 1)$$

Podstawiając /9.25/ do /9.21/, możemy sprawdzić /9.19/:

/9.26/ $E\exp\left(iy\, W_{T\wedge 1}\right) - E\exp\left(-\frac{1}{2}y^2(T \wedge 1)\right) =$

$$= \exp(iy)\, E\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}y^2(1-T)\right)\right) I(T \leqslant 1) -$$

$$- \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) E\left(\exp\left(\frac{1}{2}y^2(1-T)\right) - 1\right) I(T \leqslant 1) \neq 0$$

Gdyby bowiem różnica w /9.26/ była równa 0, wówczas dla $y \neq k\pi$

/9.27/ $E\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}y^2(1-T)\right)\right) I(T \leqslant 1) = 0$

/9.28/ $\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}y^2(1-T)\right)\right) I(T \leqslant 1) = 0$ p.w.

/9.29/ $P(T < 1) = 0.$

Związek /9.29/ stoi w sprzeczności np. z faktem, że

/9.30/ $P(W_t \geqslant 1) > 0 \;;\; t > 0 .\ \square$

Istnieje k l a s a układów podstawowych, do których można stosować UZL w wersji /9.5/

Niech $\underline{\mathfrak{X}} = \{X_1, X_2, \ldots\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w H, adaptowanym do filtracji $\underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots\}$

Niech $\underline{B} = \{B_n\} \subset L/H/$ będzie ciągiem liniowych i ograniczonych operatorów na H, przy czym $B_n \to 0$ silnie, tzn

/9.31/ $B_n x \to 0$; $x \in H$.

W oparciu o ciągi $\underline{\mathfrak{X}}, \underline{\mathfrak{F}}, \underline{B}$ budujemy tablicę $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}})$ w sposób następujący:

/9.32/ $X_{nk} = B_n X_k$; $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

/9.33/ $\mathfrak{F}_{nk} = \mathfrak{F}_k$; $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$.

TWIERDZENIE 9.2.

Niech tablica $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}})$ będzie określona przez /9.32/ i /9.33/ i niech $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\sigma})$ będzie układem podstawowym.

Załóżmy, że rozkład losowy $\mu_\infty(\cdot, \omega)$ ma własność

/9.34/ $P(\omega ; \hat{\mu}_\infty(y, \omega) = 0) = 0$; $y \in G$.

gdzie G jest pewnym gęstym podzbiorem H.

Wówczas warunek

/9.35/ $\mu(\sigma_m) \underset{P}{\Rightarrow} \mu_\infty(\cdot, \omega)$

pociąga $\mathcal{L}(S(\sigma_n)) \Rightarrow E\mu_\infty$.

DOWÓD. Z Tw. 4.4. wynika ciasność ciągu $\{S(\sigma_m)\}$ .Pokażemy,że

/9.36/ $E\exp(i\langle y, S(\sigma_n)\rangle) \longrightarrow E\hat{\mu}_\infty(y, \omega)$; $y \in G$

Z /9.31/ wynika, że istnieje taki podciąg niemalejący $\{k_m'\} \subset \mathbb{N}$, że

/9.37/ $k_m' \to +\infty$

/9.38/ $\sum_{1 \leq k \leq k_n'} \| A_n X_k \| \to 0$ p.w.

Niech $y \in G$. /9.31/ pociąga również

/9.39/ $\hat{\mu}_{mk}(y) \to 1$ p.w. ; $k \in \mathbb{N}$.

Istnieje więc podciąg niemalejący $\{k_n''\} \subset \mathbb{N}$, który spełnia /9.37/ oraz

/9.40/ $\sum\limits_{1 \leq k \leq k_n''} |1 - \hat{\mu}_{mk}(y)| \to 0$ p.w.

Ciąg $k_n = k_n' \wedge k_n''$ jest niemalejący i posiada własności /9.37/, /9.38/ i /9.40/. W szczególności z /9.40/ łatwo wynika

/9.41/ $\prod\limits_{1 \leq k \leq k_n} \hat{\mu}_{mk}(y) \to 1$ p.w.

Określimy nowy układ podstawowy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}', \underline{\underline{\mathcal{F}}}', \underline{\sigma}')$ wzorami

/9.42/ $X_{nk}' = X_{n,k+k_n}$; $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

/9.43/ $\mathcal{F}_{nk}' = \mathcal{F}_{n,k+k_n}$; $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$.

/9.44/ $\sigma_m' = \sigma_n - k_n \wedge \sigma_m$; $n \in \mathbb{N}$.

Układ $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}', \underline{\underline{\mathcal{F}}}', \underline{\sigma}')$ nieznacznie różni się od $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}}, \underline{\sigma})$:

/9.45/ $S(\sigma_m) - S'(\sigma_m') \to 0$ p.w. /bo /9.38//

/9.46/ $\hat{\mu}(\sigma_n)(y) - \hat{\mu}'(\sigma_n')(y) \to 0$ p.w. /bo /9.41//

Po pierwsze, wystarczy więc wykazać, że $E e^{i\langle y, S'(\sigma_n')\rangle} \to E\hat{\mu}_\infty(y)$.

Po drugie, z /9.35/ i /9.46/ wynika, że

/9.47/ $\hat{\mu}'(\sigma_m')(y) \xrightarrow[P]{} \hat{\mu}_\infty(y)$

Po trzecie, /9.47/ i /9.37/ pociągają

/9.48/ $\hat{\mu}_\infty(y) - E(\hat{\mu}_\infty(y) | \mathcal{F}_{no}') = \hat{\mu}_\infty(y) - E(\hat{\mu}_\infty(y) | \mathcal{F}_{k_n}) \to 0$ p.w.

W celu uproszczenia oznaczeń, zakładamy, że układ $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}}, \underline{\sigma})$ posiada dodatkowo własność /9.48/.

Stosując L. 5.2. /podobnie, jak w dowodzie nierówności /5.22// otrzymujemy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

/9.49/ $$\left| E_{no} (\exp i \langle y, S(\sigma_n) \rangle) - E_{no} (\hat{\mu(\sigma_n)}(y)) \right| \leqslant$$
$$\leqslant 4 P_{no} (| \hat{\mu(\sigma_n)}(y) | \leqslant \varepsilon)$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} E_{no} \left| \hat{\mu(\sigma_n)}(y) - E_{mo} (\hat{\mu(\sigma_m)}(y)) \right|$$

Wystarczy teraz zauważyć, że

/9.50/ $$E \left| \hat{\mu(\sigma_n)}(y) - E_{mo} (\hat{\mu(\sigma_n)}(y)) \right| \leqslant 2 E \left| \hat{\mu(\sigma_n)}(y) - \hat{\mu_\infty}(y) \right|$$
$$+ E \left| \hat{\mu_\infty}(y) - E_{mo} (\hat{\mu_\infty}(y)) \right| \to 0$$

na podstawie /9.47/ i /9.48/ ;

/9.51/ $$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{m} \sup P (| \hat{\mu(\sigma_n)}(y) | \leqslant \varepsilon) \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} P (| \hat{\mu}_\infty(y) | \leqslant \varepsilon) = 0 .$$

gdyż założyliśmy /9.34/ i /9.47/.

Korzystając z /9.49/ - /9.51/ otrzymujemy

$$E_{no} \exp(i \langle y, S(\sigma_n) \rangle) - E_{mo} \hat{\mu(\sigma_n)}(y) \xrightarrow[P]{} 0$$

co jest nieco silniejszym związkiem, niż /9.36/. $\square$

Oto przykład zastosowania Tw. 9.3.

PRZYKŁAD 9.3. Niech $\underline{\mathfrak{X}} = \{ X_1, X_2, \ldots \}$ będzie ściśle stacjonarnym ciągiem całkowalnych z kwadratem zmiennych losowych w H. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$.

Załóżmy, że istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że

/9.52/ $$E(X_k | \mathcal{F}_{m+k}) = 0 \ ; \quad k \in \mathbb{N} .$$

Wówczas ciąg

/9.53/ $$S_m = (\sqrt{m})^{-1} \sum_{k=1}^{m} X_k$$

jest zbieżny wg rozkładu do mieszanki rozkładów gausowskich $E\, \ell(0, S^\infty(\omega), 0)$, gdzie losowy S-operator S^∞ zadany jest formułą

$$/9.54/\quad \langle S^{\infty}y,y\rangle = E\Big(\big\langle y, E\big(\sum_{k=1}^{m} X_k \,|\, \mathfrak{F}_m\big) - E\big(\sum_{k=1}^{m} X_k \,|\, \mathfrak{F}_{m+1}\big)\big\rangle^2 \,\Big|\, \mathfrak{I}\Big)$$

/w której $\mathfrak{I}$ oznacza σ-algebrę zbiorów niezmiennych dla ciągu $\underline{\mathfrak{X}}$ /.

Sprowadzimy najpierw sytuację do przypadku $m = 1$. Rzeczywiście, z własności /9.52/ wynika, że możemy używać przedstawienia

$$/9.55/\quad X_i = \sum_{k=i}^{i+m} E(X_i|\mathfrak{F}_k) - E(X_i|\mathfrak{F}_{k+1}) = \sum_{k=i}^{i+m} Y_{ik}$$

$$/9.56/\quad \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{i+m} Y_{ik} = \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{k} Y_{ik} + \sum_{k=m}^{n}\sum_{i=k-m+1}^{k} Y_{ik} + \sum_{k=n+1}^{n+m-1}\sum_{i=k-m+1}^{n} Y_{ik} = Z_{1n} + Z_{2n} + Z_{3n}$$

Oczywiście $\frac{1}{\sqrt{n}} Z_{1n} \to 0$ p.w. Podobnie, ze stacjonarności $\underline{\mathfrak{X}}$,

$$/9.57/\quad \frac{1}{\sqrt{n}} E|Z_{3n}| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\, 2m^2 E|X_1| \to 0 .$$

Stąd $S_n - \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{2n} \xrightarrow[p]{} 0$ i wystarczy zbadać ciąg $\frac{1}{\sqrt{n}} Z_{2n}$. Zauważmy, że dla $k \geqslant m$

$$/9.58/\quad \sum_{i=k-m+1}^{k} Y_{ik} = \sum_{i=k-m+1}^{k} \big(E(X_i|\mathfrak{F}_k) - E(X_i|\mathfrak{F}_{k+1})\big) =$$
$$= E\Big(\sum_{i=k-m+1}^{k} X_i \,|\, \mathfrak{F}_k\Big) - E\Big(\sum_{i=k-m+1}^{k} X_i \,|\, \mathfrak{F}_{k+1}\Big) =: X'_k$$

Ciąg $\{X'_k ; \mathfrak{F}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jest stacjonarny i ma własności

$$/9.59/\quad E(X'_k|\mathfrak{F}_{k+1}) = 0 \quad ; \ k\in\mathbb{N}$$

$$/9.60/\quad \langle S^{\infty}y,y\rangle = E(\langle y, X'_1\rangle^2|\mathfrak{I})$$

Ponieważ $\frac{1}{\sqrt{n}} Z_{2n} = \sqrt{\frac{n-m+1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-m+1}} \sum_{k=1}^{n-m+1} X'_k$, zagadnienie zostało sprowadzone do przypadku $m = 1$.

Określimy układ podstawowy $(\underline{\mathfrak{X}}, \underline{\mathfrak{F}}, \underline{\sigma})$ wzorami

$$/9.61/\quad X_{nk} = \frac{X_{n-k+1}}{\sqrt{n}} \ ;\ 1\le k\le n,\ X_{nk} = 0 \ ;\ k>n,\ n\in\mathbb{N}.$$

/9.62/ $\mathcal{F}_{nk} = \mathcal{F}_{n-k+1}$; $0 \le k \le n$, $\mathcal{F}_{nk} = \mathcal{F}_1$; $k > n, n \in \mathbb{N}$.

/9.63/ $\sigma_n \equiv n$; $n \in \mathbb{N}$.

$(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{\mathcal{F}}})$ jest TRM, więc /podobnie jak w Przykł. 9.1/ wystarczy sprawdzić zmodyfikowane warunki Tw. 8.2.:

/9.64/ $$\sup_{1 \le k \le n} \|X_{nk}\| \xrightarrow[L^1]{} 0 .$$

/9.65/ $$\sum_{1 \le k \le n} \|X_{nk}\|^2 \xrightarrow[P]{} tr(S^\infty) \left(= E(\|X_1\|^2 | \mathcal{J})\right)$$

/9.66/ $$\sum_{1 \le k \le n} \langle y, X_{nk} \rangle^2 \xrightarrow[P]{} \langle S^\infty y, y \rangle \; ; y \in H .$$

Zacznijmy od /9.65/:

$$\sum_{1 \le k \le n} \|X_{nk}\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{1 \le k \le n} \|X_k\|^2 \longrightarrow E(\|X_1\|^2 | \mathcal{J}) \quad \text{p.w.}$$

na mocy stacjonarności ciągu $\{X_1, X_2, \dots\}$ i indywidualnego twierdzenia ergodycznego.

Podobnie dowodzimy /9.66/.

Aby uzyskać /9.64/ zauważmy, że dla $\varepsilon > 0$

/9.67/ $$\begin{aligned} \sup_{1 \le k \le n} \|X_{nk}\|^2 &\le \varepsilon^2 + \sup_{1 \le k \le n} \|X_{nk}\|^2 I(\|X_{nk}\| > \varepsilon) \\ &\le \varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{n} \|X_{nk}\|^2 I(\|X_{nk}\| > \varepsilon) \\ &= \varepsilon^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|X_k\|^2 \; I(\|X_k\| > \varepsilon\sqrt{n}) \end{aligned}$$

Stąd $$E \sup_{1 \le k \le n} \|X_{nk}\|^2 \le \varepsilon^2 + \frac{1}{n} E\left(\sum_{1 \le k \le n} \|X_k\|^2 \; I(\|X_k\| > \varepsilon\sqrt{n})\right)$$

$$= \varepsilon^2 + E\|X_1\|^2 I(\|X_1\| > \varepsilon\sqrt{n}) \longrightarrow \varepsilon^2 \quad \square$$

Przykład 9.3. jest uogólnieniem CTG dla martyngałów o przyrostach stacjonarnych i ergodycznych /Billingsley [3], Ibragimow [16]/ oraz rezultatów dotyczących tzw. m - zależnych zmiennych losowych.

Głęboką dyskusję zastosowań CTGM można znaleźć w książce P.Hall, CC.Heyde "Martingale Limit Theory and Its Application" /[14]/.

Rozdział III
FUNKCJONALNE MARTYNGAŁOWE TWIERDZENIA GRANICZNE

§ 10. Funkcjonalna zbieżność procesów.

Niech $/\mathcal{H}, d/$ będzie ośrodkową i zupełną przestrzenią metryczną.

Przestrzenią $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ nazywamy zbiór odwzorowań $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{H}$ spełniających warunki

/10.1/ dla $t = 0$ istnieje $f(0+)$ i $f(0) = f(0+)$

/10.2/ dla każdego $t > 0$ istnieją $f(t-)$ i $f(t+)$, przy czym ma miejsce równość $f(t) = f(t+)$.

/przez $f(t-)$ i $f(t+)$ oznaczamy, jak zwykle, odpowiednio lewo - i prawostronne granice odwzorowania f w punkcie t/.

W przestrzeni $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ wprowadza się topologię poprzez zbieżność ciągów.

Ciąg $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset D(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ zmierza do $f_\infty \in D(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ /w $\mathcal{J}_1$ - topologii Skorochoda/ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg $\{\lambda_m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\}_{m\in\mathbb{N}}$ funkcji ciągłych, ściśle rosnących i spełniających $\lambda_m(0)=0$, $n\in\mathbb{N}$, że:

/10.3/ $\sup\limits_{0<s\leq t} |\lambda_m(s) - s| \longrightarrow 0$; $t \in \mathbb{R}^+$.

/10.4/ $\sup\limits_{0<s\leq t} d(f_m(\lambda_n(s)), f_\infty(s)) \longrightarrow 0$; $t \in \mathbb{R}^+$

$\mathcal{J}_1$ - topologię Skorochoda można zmetryzować w sposób ośrodkowy i zupełny /zob. [4], [25], [30], [36]/.

Każdy proces $X = \{X(t) ; t \in \mathbb{R}^+\}$ o wartościach w $\mathcal{H}$, którego trajektorie z p-stwem 1 należą do przestrzeni $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$

można więc traktować jako mierzalny element losowy w przestrzeni polskiej.

Zbieżność wg rozkładu procesów o trajektoriach w $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ nazywać będziemy funkcjonalną zbieżnością procesów.

Wykorzystamy pewne specjalne kryterium funkcjonalnej zbieżności procesów.

TWIERDZENIE 10.1.

Niech $\{X_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ będzie ciągiem procesów o trajektoriach w $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Niech skończenie wymiarowe rozkłady ciągu $\{X_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ będą zbieżne, nad pewnym zbiorem gęstym $T' \subset \mathbb{R}^+$, do odpowiednich rozkładów procesu X_∞ , tzn. dla każdego skończonego podzbioru $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \subset T'$

/10.5/ $(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_m)) \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathcal{H}^m)]{} (X_\infty(t_1), \ldots, X_\infty(t_m))$.

Załóżmy, że spełniony jest tzw. warunek Aldousa

/ $\mathcal{F}_m^0 = \{\mathcal{F}_m^0(t) = \sigma(X_m(s);\ s \leqslant t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ jest naturalną filtracją dla procesu X_n /:

dla każdego ciągu $\{\tau_m : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_m^0, P) \longrightarrow \mathbb{R}^+\}_{m\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}_m^0$- momentów zatrzymania, przyjmujących tylko skończoną liczbę wartości

/10.6/ $0 \leqslant t_{m1} < t_{n2} < \ldots < t_{mk_m}$

i wspólnie ograniczonych przez pewną stałą $C > 0$

/10.7/ $t_{nk_n} \leqslant C \quad ; \quad m \in \mathbb{N}$ (A)

oraz dla dowolnego ciągu liczb $\{\delta_m\}$ monotonicznie malejącego do zera :

/10.8/ $\delta_m \downarrow 0$

ma miejsce zbieżność

/10.9/ $d(X_n(\tau_m + \delta_m), X_m(\tau_n)) \xrightarrow[P]{} 0$.

Wówczas procesy X_n zmierzają wg rozkładu /w $D(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$/ do procesu X_∞ .

DOWÓD. Wprowadźmy moduły $\omega''(\delta, q, f)$ i $\omega([0,\delta), f)$ /gdzie $\delta > 0$, $q > 0$ i $f \in D(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ / wzorami

/10.10/ $\omega''(\delta, q, f) = \sup\{\min(d(f(t_1), f(t_2)), d(f(t_2), f(t_3)))\}$,

gdzie kres górny wzięty jest po wszystkich układach (t_1, t_2, t_3) spełniających $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_1 + \delta \leq q$,

/10.11/ $\omega([0,\delta), f) = \sup\{d(f(t_1), f(t_2))\}$

gdzie kres górny bierzemy po wszystkich t_1, t_2 , $0 \leq t_1 < t_2 < \delta$.

LEMAT 10.2.

Z warunku (A) wynika dla każdego $q > 0$

/10.12/ $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{m} P(\omega''(\delta, q, X_m) + \omega([0,\delta), X_m) \geq \varepsilon) = 0$; $\varepsilon > 0$.

DOWÓD. przez adaptację dowodu jednowymiarowego twierdzenia Aldousa /[1]/. $\square$.

LEMAT 10.3

Przypuśćmy, że ma miejsce warunek

/10.13/ $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{m} P(\omega''(\delta, q, X_m) \geq \varepsilon) = 0$; $\varepsilon > 0$, $q > 0$.

Następujące warunki są równoważne.

/i/ dla każdego $t \in T'$ z pewnego gęstego podzbioru $T' \subset \mathbb{R}^+$, $0 \in T'$, ciąg $\{X_n(t)\}_{m \in \mathbb{N}}$ jest ciasny.

/ii/ dla każdych $q > 0$ i $\varepsilon > 0$ istnieje taki zwarty zbiór $K_{\varepsilon,q} \subset \mathcal{H}$, że

/10.14/ $\inf\limits_{m} P(X_n(t) \in K_{\varepsilon,q} ; 0 \leq t \leq q) > 1 - \varepsilon$

DOWÓD. Oczywiście /ii/ pociąga /i/.

Niech dla $m \in \mathbb{N}$, $\{y_{mk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ będzie zbiorem środków kul domkniętych $S_{\frac{1}{m}}(y_{mk})$ o promieniu $\frac{1}{m}$ i własności

/10.15/ $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_{\frac{1}{2m}}(y_{mk}) = \mathcal{H}$. $\left(\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{\frac{1}{m}}(y_{mk}) = \mathcal{H}\right)$

Zauważmy, że warunek /ii/ jest równoważny z

/iii/ dla dowolnych $\varepsilon > 0$ i $m \in \mathbb{N}$ istnieje $N(m,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ o własności

/10.16/ $\inf_m P\left(X_n(t) \in \bigcup_{k=1}^{N(m,\varepsilon)} S_{\frac{1}{m}}(y_{mk})\ ;\ 0 \leqslant t \leqslant q\right) > 1-\varepsilon$

Rzeczywiście, /iii/ jest na pewno słabszy niż /ii/. Z drugiej strony, jeśli wybrać na podstawie /iii/ liczby $N_m = N(m, \varepsilon/2^m)$, to wówczas

$$\sup_m P\left(\bigcup_{0 \leqslant t \leqslant q} \left\{X_n(t) \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{N_m} S_{\frac{1}{m}}(y_{mk})\right\}\right)$$
$$= \sup_m P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant q} \left\{X_n(t) \notin \bigcup_{k=1}^{N_m} S_{\frac{1}{m}}(y_{mk})\right\}\right)$$
$$\leqslant \sup_m \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\bigcup_{0 \leqslant t \leqslant q} \left\{X_n(t) \notin \bigcup_{k=1}^{N_m} S_{\frac{1}{m}}(y_{mk})\right\}\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon/2^m = \varepsilon .$$

i $K_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant N_m} S_{\frac{1}{m}}(y_{mk})$ jest poszukiwanym zb. zwartym.

Wystarczy więc pokazać, że z /i/ wynika /iii/.

Niech $\varepsilon > 0$ i $m \in \mathbb{N}$ będą ustalone. Weźmy $\delta > 0$ tak małe, aby

/10.17/ $\sup_m P\left(\omega''(\delta, q, X_m) > \frac{1}{2m}\right) < \varepsilon$

Niech $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k(\delta)} = q$ będzie podziałem odcinka $[0,q]$ elementami zbioru T', przy czym

/10.18/ $\max_{1 \leqslant i \leqslant k(\delta)} (t_i - t_{i-1}) < \delta$

Niech $M = M(m,\varepsilon)$ będzie takie, że

/10.19/ $\inf_m P\left(X_n(t_i) \in \bigcup_{k=1}^{M} S_{\frac{1}{2m}}(y_{mk})\ ;\ 0 \leqslant i \leqslant k(\delta)\right) > 1-\varepsilon$

Pokażemy, że można wziąć $N(m, 2\varepsilon) = M(m,\varepsilon)$.

Oznaczmy: $A_1 = \bigcup_{k=1}^{M(m,\varepsilon)} S_{\frac{1}{m}}(y_{mk})$, $A_2 := \bigcup_{k=1}^{M} S_{\frac{1}{2m}}(y_{mk})$

Ma miejsce inkluzja

/10.20/ $$B_L := \left\{ \omega''(\delta, q, X_n) \leqslant \frac{1}{2m} \right\} \cap \left\{ X_n(t_i) \in A_2 \, ; \, 0 \leqslant i \leqslant k(\delta) \right\}$$
$$\subset \left\{ X_n(t) \in A_1 \, ; \, 0 \leqslant t \leqslant q \right\} =: B_P$$

Niech bowiem $\omega \in B_L$ i $t \in [0,q]$. Jeżeli $t = t_i$ dla pewnego i, $0 \leqslant i \leqslant k(\delta)$, to automatycznie $X_n(t_i) \in A_2 \subset A_1$. Jeżeli $t \in (t_{i-1}, t_i)$, to na mocy /10.18/ i def. $\omega''(\delta, q, f)$:

/10.21/ $$\min \left\{ d\left(X_n(t_{i-1},\omega), X_n(t,\omega)\right), d\left(X_n(t,\omega), X_n(t_i,\omega)\right) \right\}$$
$$\leqslant \omega''(\delta, q, X_n(\cdot,\omega)) \leqslant \frac{1}{2m}$$

Stąd na pewno $d\left(X_n(t,\omega), A_2\right) \leqslant \frac{1}{2m}$ i $X_n(t,\omega) \in A_1$.

Ostatecznie $X_n(t,\omega) \in A_1$; $0 \leqslant t \leqslant q$, czyli $\omega \in B_P$.

Z /10.17/, /10.19/ i /10.20/ wynika, że

/10.22/ $$P\left(X_n(t) \in A_1 \, ; \, 0 \leqslant t \leqslant q\right) > 1 - 2\varepsilon \, ; \, n \in \mathbb{N} \quad \square$$

Wróćmy do dowodu Tw. 10.1. Na mocy L. 10.2., warunek (A) pociąga /10.12/ i w szczególności, założenie /10.13/ z L. 10.3. Z kolei zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych /10.5/ daje warunek /10.14/ z L. 10.3.. /10.12/ i /10.14/ są równoważne ciasności ciągu $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ /zob. Tw. 15.3., [4]/. Zbieżność /10.15/ identyfikuje także granicę ciągu X_n jako X_∞. $\square$

Warto może dodać, że przeprowadzony przez Aldousa [1] dowód Tw. 10.1. nie daje się bezpośrednio przenieść na ogólny przypadek - główną trudność stanowi dowód warunku /10.14/.

W niniejszej pracy rozpatrywać będziemy jedynie przypadek $\mathcal{H} = H$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta. Jak zwykle, $\mathcal{M}_1(D(\mathbb{R}^+,H))$ oznaczać będzie przestrzeń rozkładów procesów o trajektoriach w $D(\mathbb{R}^+,H)$, z topologią słabej zbieżności. W $\mathcal{M}_1(D(\mathbb{R}^+,H))$ wyróżniamy domknięty podzbiór $\mathcal{M}_1^*(D(\mathbb{R}^+,H))$ rozkładów procesów o przyrostach niezależnych /w skrócie: PoPN/ i trajektoriach w $D(\mathbb{R}^+,H)$.

§ 11. Układ podstawowy dla funkcjonalnego MTG. Prognozowalne charakterystyki rozkładów procesów generowanych przez układ podstawowy.

DEFINICJA 11.1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną z dyskretną filtracją $\underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Dyskretną skalą czasu /krótko: skalą czasu/ $\Sigma = \{\sigma(t)\,;\, t\in\mathbb{R}^+\}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ nazwiemy proces na $\mathbb{R}^+$ spełniający następujące warunki:

/11.1/ $\sigma(0) \equiv 0$

/11.2/ dla każdego $t\in\mathbb{R}^+$, $\sigma(t) : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ jest skończonym momentem zatrzymania względem $\underline{\mathcal{F}}$.

/11.3/ dla każdego $\omega\in\Omega$, trajektoria $t \longmapsto \sigma(t)(\omega)$ jest niemalejąca, prawostronnie ciągła i rośnie jedynie przez skoki wielkości 1.

/11.4/ $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t)(\omega) = +\infty$ dla każdego $\omega\in\Omega$. $\square$

Dysponując ciągiem $\underline{\mathfrak{X}} = \{X_1, X_2, \ldots\}$ zmiennych losowych o wartościach w H, adaptowanym do $\underline{\mathcal{F}}$, przy pomocy skali czasu Σ konstruujemy proces $X = \{X(t)\,;\, t\in\mathbb{R}^+\}$ w sposób następujący:

/11.5/ $$X(t) = \sum_{1 \leq k \leq \sigma(t)} X_k \; ; \quad t \in \mathbb{R}^+ .$$

Zauważmy, że używając oznaczeń Rozdz.I. możemy napisać:

/11.6/ $$X(t) = S(\sigma(t))$$

W szczególności, zmienna $X(t)$ jest $\mathcal{F}_{\sigma(t)}$ - mierzalna, i stąd

/11.7/ $$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s \, ; \, s \leq t) \subset \mathcal{F}_{\sigma(t)}$$

Każdy moment zatrzymania względem $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ jest więc również $\{\mathcal{F}_{\sigma(t)}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$- momentem zatrzymania.

Niech $\underline{\mu} = \{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem regularnych rozkładów warunkowych X_j względem $\mathcal{F}_{j-1}$.

Ustalmy na chwilę $\omega\in\Omega$ i oznaczmy przez $t_1, t_2, \dots$ kolejne momenty skoków trajektorii $\sigma(t)(\omega)$:

/11.8/ $$t_1 = T_1(\omega) = \inf\{t > 0 \; ; \Delta\sigma(t)(\omega) = 1\}$$

$$t_j = T_j(\omega) = \inf\{t > T_{j-1}(\omega) \; ; \; \Delta\sigma(t)(\omega) = 1\} \; ; \; j \geq 2.$$

Przy założeniu /11.4/, każdy ze zbiorów po prawej stronie /11.8/ jest niepusty, i dlatego ciąg $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ jest poprawnie określony i ściśle rosnący do $+\infty$. W rezultacie, w każdym skończonym odcinku $[0,t]$ zawarta jest jedynie skończona ilość elementów ciągu $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Niech $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o indywidualnych rozkładach

/11.9/ $$\mathcal{L}(Y_j) = \mu_j(\cdot,\omega) \; ; \; j\in\mathbb{N}.$$

Oznaczmy przez $\tilde{\mu}(\omega)$ rozkład na $D(\mathbb{R}^+,H)$ dyskretnego PoPN otrzymanego przez sumowanie ciągu $\{Y_j\}$ wg skali czasu $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Innymi słowy, $\tilde{\mu}(\omega)$ jest rozkładem PoPN Y_ω określonego przez

/11.10/ $$Y_\omega(t) = \sum_{\{j;\, t_j \leq t\}} Y_j \,.$$

W szczególności, rozkładami losowymi na H są elementy losowe:

/11.11/ $$\omega \longmapsto \tilde{\mu}(\omega)\circ \pi_t^{-1} = \mathop{\boxed{*}}_{1\leq j\leq \sigma(t)} \mu_j(\omega) \quad ; \quad t\in\mathbb{R}^+ \,.$$

Korzystając z /11.11/ oraz ze Stw. 15.2., łatwo sprawdzić, że skonstruowany powyżej element losowy

/11.12/ $$\Omega \ni \omega \longmapsto \tilde{\mu}(\omega) \in \mathcal{M}_1^*(\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,H))$$

jest mierzalny. Z konstrukcji również wynika fakt, że rozkład losowy $\tilde{\mu}$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do zbioru P - miary zero, niezależnie od wyboru ciągu $\underline{\mu}$ stowarzyszonego z $(\underline{\mathfrak{X}},\underline{\mathfrak{F}})$ /por. § 3 - jednoznaczność $\mu(\sigma_n)$/.

DEFINICJA 11.2. Niech Σ będzie skalą czasu na $(\Omega,\mathfrak{F},\underline{\mathfrak{F}},P)$, a ciąg zmiennych losowych $\underline{\mathfrak{X}}$ będzie adaptowany do $\underline{\mathfrak{F}}$. Proces $X = X(\underline{\mathfrak{X}},\underline{\mathfrak{F}},\Sigma)$ zadany wzorem /11.5/ nazywamy procesem generowanym przez $(\underline{\mathfrak{X}},\underline{\mathfrak{F}},\Sigma)$
Rozkład losowy $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\underline{\mathfrak{X}},\underline{\mathfrak{F}},\Sigma)$ (w $\mathcal{M}_1^*(D(\mathbb{R}^+,H))$) zadany przez /11.12/ nazywać będziemy prognozowalną charakterystyką rozkładu procesu $X(\underline{\mathfrak{X}},\underline{\mathfrak{F}},\Sigma)$. □

DEFINICJA 11.3. Układem podstawowym /dla funkcjonalnego twierdzenia granicznego/ nazywamy trójkę $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\mathfrak{F}}},\underline{\Sigma})$, gdzie $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\mathfrak{F}}})$ jest tablicą $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ adaptowamą do $\underline{\underline{\mathfrak{F}}} = \{\underline{\mathfrak{F}_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, a $\underline{\Sigma} = \{\Sigma_m\}_{n\in\mathbb{N}}$

$= \{ \{\sigma_m(t)\,;t\in\mathbb{R}^+\}\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem skal czasu względem $\underline{\underline{\mathcal{F}}}$ /tzn. dla każdego $n\in\mathbb{N}$, Σ_m jest skalą czasu na $(\Omega,\mathcal{F},\underline{\mathcal{F}_n},P)$/$\square$

Funkcjonalny układ podstawowy wyznacza ciąg procesów $\{X_n = X_n(\underline{\mathfrak{X}_n},\underline{\mathcal{F}_n},\Sigma_m)\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz ciąg $\{\tilde{\mu}_m = \tilde{\mu}_m(\underline{\mathfrak{X}_n},\underline{\mathcal{F}_n},\Sigma_m)\}_{n\in\mathbb{N}}$ prognozowalnych charakterystyk rozkładów procesów X_n.

§ 12. Funkcjonalna Zasada P. Lévy'ego.

Przez analogię do Tw. 5.1., Funkcjonalną Zasadą P. Lévy'ego nazwiemy FTG dla układu podstawowego $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\mathcal{F}}},\underline{\Sigma})$, w którym na podstawie zbieżności prognozowalnych charakterystyk $\{\tilde{\mu}_m\}$ wnioskujemy o zbieżności procesów $\{X_n = X_n(\underline{\mathfrak{X}_n},\underline{\mathcal{F}_n},\Sigma_m)$

Udowodnimy szczególny przypadek FZL.

TWIERDZENIE D /12.1/

Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem procesów generowanym przez f. układ podstawowy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\mathcal{F}}},\underline{\Sigma})$, a X_∞ będzie ciągłym wg p-stwa PoPN o rozkładzie $\tilde{\mu}_\infty \in \mathcal{M}_1^*(D(\mathbb{R}^+,H))$.

Załóżmy, że ciąg $\{\tilde{\mu}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ prognozowalnych charakterystyk rozkładów $\{X_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny wg p-stwa do $\tilde{\mu}_\infty$:

/12.1/ $\quad \tilde{\mu}_m \underset{P}{\Rightarrow} \tilde{\mu}_\infty$

Wówczas procesy $\{X_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ są zbieżne wg rozkładu / w $D(\mathbb{R}^+,H)$ / do X_∞ :

/12.2/ $\quad X_n \xrightarrow[\mathcal{D}(D(\mathbb{R}^+,H))]{} X_\infty$

DOWÓD. Zgodnie z Tw. 10.1. wystarczy

/i/ zbadać zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych,

/ii/ sprawdzić /10.9/ z warunku Aldousa (**A**).

Zajmiemy się najpierw punktem /i/. Wybierzmy liczby $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r < +\infty$. Zgodnie z metodą Craméra-Walda wystarczy wykazać, że

/12.3/ $$\left(X_n(t_1) - X_n(t_0),\ X_n(t_2) - X_n(t_1), \ldots, X_n(t_r) - X_n(t_{r-1})\right) =$$
$$=: \left(\Delta_1 X_n, \Delta_2 X_n, \ldots, \Delta_r X_n\right) \xrightarrow[\mathcal{D}(H^r)]{} \left(\Delta_1 X_\infty, \Delta_2 X_\infty, \ldots, \Delta_r X_\infty\right) :=$$
$$= \left(X_\infty(t_1) - X_\infty(t_0), \ldots, X_\infty(t_r) - X_\infty(t_{r-1})\right)$$

Skorzystamy z Tw. 5.1. W tym celu, dla ustalonego p; $1 \leq p \leq r$, definiujemy układ podstawowy $\left(\underline{\underline{X}}^p, \underline{\underline{\mathcal{F}}}^p, \underline{\sigma}^p\right)$ w następujący sposób:

/12.4/ $$X^p_{nk} = X_{n, \sigma_n(t_{p-1})+k}$$
$$\left(= \sum_{j=1}^{\infty} X_{nj}\, I\left(\sigma_n(t_{p-1}) + k = j\right)\right); \quad k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$$

/12.5/ $$\mathcal{F}^p_{nk} = \mathcal{F}_{n, \sigma_n(t_{p-1})+k}; \quad k \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}.$$

/12.6/ $$\sigma^p_n = \sigma_n(t_p) - \sigma_n(t_{p-1}); \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sprawdzimy, że wzory /12.4/ - /12.6/ rzeczywiście definiują układ podstawowy. Przede wszystkim, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$, $\sigma_n(t_{p-1}) + k$ jest momentem zatrzymania względem $\underline{\mathcal{F}_n} = \{\mathcal{F}_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$. Stąd zmienna X^p_{nk} jest $\mathcal{F}^p_{nk}$ - mierzalna. Ponadto, $\{\sigma^p_n = k\} = \{\sigma_n(t_p) - \sigma_n(t_{p-1}) = k\} = \{\sigma_n(t_p) = \sigma_n(t_{p-1}) + k\} \in \mathcal{F}^p_{nk}$, więc σ^p_n jest momentem zatrzymania względem $\{\mathcal{F}^p_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Mają miejsce następujące równości /stosujemy oznaczenia /3.5/ i /3.11/ /:

$$/12.7/ \quad \Delta_p X_n = \sum_{\sigma_m(t_{p-1}) < j \leq \sigma_n(t_p)} X_{nj} = S(\sigma_n^p) \; ; \quad 1 \leq p \leq r, \; n \in \mathbb{N}.$$

$$/12.8/ \quad \Delta_p \tilde{\mu}_m = \mathop{\boxed{*}}_{\sigma_m(t_{p-1}) < j \leq \sigma_n(t_p)} \mu_{nj} = \mu(\sigma_n^p) \; ; \quad 1 \leq p \leq r, \; n \in \mathbb{N}.$$

Z założenia /12.1/ wynika, że

$$/12.9/ \quad \mu(\sigma_n^p) \underset{P}{\Longrightarrow} \Delta_p \tilde{\mu}_\infty \left(:= \mathcal{L}\left(X_\infty(t_p) - X_\infty(t_{p-1}) \right) \right) \; ; \quad 1 \leq p \leq r$$

Istotnie, funkcjonał

$$D(\mathbb{R}^+, H) \ni f \longmapsto \Delta_p(f) = f(t_p) - f(t_{p-1}) \in H$$

jest $\tilde{\mu}_\infty$ - p.w. ciągły /gdyż $\tilde{\mu}_\infty$ jest rozkładem procesu ciągłego wg p-stwa /, stąd $\tilde{\mu}_n \underset{P}{\Longrightarrow} \tilde{\mu}_\infty$ pociąga /12.9/:

$$\mu(\sigma_n^p) = \tilde{\mu}_m \circ \Delta_p^{-1} \underset{P}{\Longrightarrow} \tilde{\mu}_\infty \circ \Delta_p^{-1} = \Delta_p \tilde{\mu}_\infty .$$

Ponieważ $\Delta_p \tilde{\mu}_\infty$ jest rozkładem nieskończenie podzielnym, jego funkcja charakterystyczna jest różna od zera; zastosowanie Tw. 5.1. daje po pierwsze: ciasność ciągu $\{\Delta_p X_n\}$;

* po drugie /Wn. 5.3./:

$$/12.10/ \quad E\left(\exp(i\langle y, \Delta_p X_n \rangle) \mid \mathcal{F}_{no}^p \right) \underset{P}{\longrightarrow} \widehat{\Delta_p \tilde{\mu}_\infty}(y) \; ; \quad y \in H .$$

Z ciasności każdej ze współrzędnych wynika ciasność ciągu wektorów /12.3/, pozostaje więc udowodnić, że dla dowolnych $y_1, y_2, \ldots, y_r \in H$

$$/12.11/ \quad E\exp\left(i \sum_{p=1}^{r} \langle y_p, \Delta_p X_m \rangle\right) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} E\exp\left(i \sum_{p=1}^{r} \langle y_p, \Delta_p X_\infty \rangle\right) = \prod_{p=1}^{r} \widehat{\Delta_p \tilde{\mu}_\infty}(y_p) .$$

LEMAT 12.2.

Niech $\{\mathcal{Z}_p\}_{p=1}^{p=r}$ będzie skończonym ciągiem zespolonych zmiennych losowych, $\{z_p\}_{p=1}^{p=r}$ ciągiem l i c z b zespolonych, a $\{\mathcal{F}_p\}_{p=0}^{p=r}$ rosnącym ciągiem σ-algebr. Jeżeli $\{\mathcal{Z}_p\}$ jest adaptowany do $\{\mathcal{F}_p\}$ oraz

/12.12/ $|\mathcal{Z}_p| \leqslant 1$ p.w., $|z_p| \leqslant 1$; $1 \leqslant p \leqslant r$,

to ma miejsce nierówność

/12.13/ $$\left|E\mathcal{Z}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{Z}_r - z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_r\right| \leqslant \sum_{p=1}^{r} \left|E(\mathcal{Z}_p|\mathcal{F}_{p-1}) - z_p\right| .$$

DOWÓD. $$\left|E\,\mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2 \cdot \ldots \cdot \mathcal{Z}_r - z_1 z_2 \ldots z_r\right|$$

$$= \left|\sum_{p=1}^{r} E(\mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2 \cdot \ldots \cdot \mathcal{Z}_p \cdot z_{p+1} \cdot \ldots \cdot z_r - \mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2 \cdot \ldots \cdot \mathcal{Z}_{p-1} \cdot z_p \cdot \ldots \cdot z_r)\right|$$

$$= \left|\sum_{p=1}^{r} E\,\mathcal{Z}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{Z}_{p-1} \cdot z_{p+1} \ldots z_r \left(E(\mathcal{Z}_p | \mathcal{F}_{p-1}) - z_p\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{r} \left|E(\mathcal{Z}_p | \mathcal{F}_{p-1}) - z_p\right| . \;\square$$

Dla ustalonego n, podstawiając w /12.13/

$$\mathcal{Z}_p = \exp(i\langle y_p, \Delta_p X_n\rangle) , \quad \mathcal{F}_p = \mathcal{F}_{no}^{p+1} \; (= \mathcal{F}_{n,\sigma_m(t_p)}),$$

$$z_p = \widehat{\Delta_p \tilde{\mu}_\infty}(y) \quad ; \quad 1 \leqslant p \leqslant r,$$

widzimy, że /12.11/ natychmiast wynika z /12.10/. Dowód zbieżności rozkładów skończenie wymiarowych został zakończony.

Wykażemy, że spełniony jest również warunek /10.9/.

Ustalmy $C > 0$ i niech dla każdego n, τ_n będzie momentem zatrzymania względem $\{\mathcal{F}_{n,\sigma_m(t)}\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, przyjmującym skończoną ilość wartości

/12.14/ $$0 \leqslant t_{n1} < t_{n2} < \ldots < t_{nm_n} \leqslant C.$$

Niech $\delta_m \searrow 0$. Mamy udowodnić, że

/12.15/ $X_n(\tau_m+\delta_n) - X_n(\tau_n) \xrightarrow[P]{} 0.$

Przede wszystkim zauważmy, iż $\sigma_m(\tau_n)$ i $\sigma_m(\tau_n+\delta_m)$ są momentami zatrzymania względem $\underline{\mathcal{F}_n} = \{\mathcal{F}_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Istotnie, ponieważ τ_m jest momentem zatrzymania względem $\{\mathcal{F}_{n,\sigma_m(t)}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, dla dowolnego k, $1\leq k\leq m_n$, zachodzi

/12.16/ $\{\tau_m = t_{mk}\} \in \mathcal{F}_{m,\sigma_m(t_{mk})}$

Z definicji oznacza to, że dla dowolnych $1\leq k\leq m_n$ i $j\in\mathbb{N}_0$

/12.17/ $\{\tau_m = t_{mk}\}\cap\{\sigma_m(t_{mk})\leq j\} \in \mathcal{F}_{mj}$

Stąd

/12.18/ $\{\sigma_m(\tau_m)\leq j\} = \bigcup_{k=1}^{m_m}\{\tau_m = t_{mk}\}\cap\{\sigma_m(t_{mk})\leq j\} \in \mathcal{F}_{mj}.$

Identyczny jest dowód /12.18/ dla $\sigma_m(\tau_n+\delta_m)$ /gdyż δ_n jest liczbą/.

Podobnie, jak w pierwszej części dowodu //12.4/ - /12.6//, definiujemy nowy układ podstawowy

/12.19/ $X^0_{nk} = X_{n,\sigma_m(\tau_m)+k}$; $k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}$.

/12.90/ $\mathcal{F}^0_{nk} = \mathcal{F}_{n,\sigma_m(\tau_n)+k}$; $k\in\mathbb{N}_0, n\in\mathbb{N}$.

/12.21/ $\sigma^0_n = \sigma_n(\tau_n+\delta_m)-\sigma_n(\tau_m)$; $n\in\mathbb{N}$.

przy czym, oczywiście, zachodzi:

/12.22/ $S(\sigma^0_n) = X_n(\tau_n+\delta_m) - X_n(\tau_n)$; $m\in\mathbb{N}$.

/12.23/ $\mu(\sigma^0_n) = \boxed{*}_{\sigma_m(\tau_n)<k\leq\sigma_m(\tau_n+\delta_m)} \mu_{mk} \left(=: \Delta^{\tau_n+\delta_m}_{\tau_m}\tilde{\mu}_m\right)$; $m\in\mathbb{N}$.

Aby skorzystać z Tw. 5.1., wystarczy wykazać, że

/12.24/ $\mu(\sigma^0_m) = \Delta^{\tau_n+\delta_n}_{\tau_m}\tilde{\mu}_m \underset{P}{\Rightarrow} \delta_0$.

lub równoważnie - w każdym podciągu $\{m'\}\subset\mathbb{N}$ wskazać podciąg $\{m''\}\subset\{m'\}$, dla którego /12.24/ jest spełnione p.w. Niech więc $\{n'\} \subset \mathbb{N}$ i niech dla $\{n''\} \subset \{n'\}$ założenie /12.1/ będzie spełnione P - p.w.:

/12.25/ $$\tilde{\mu}_{n''}(\omega) \Rightarrow \tilde{\mu}_\infty \quad ; \quad \omega \in \Omega_1 \subset \Omega ,$$

gdzie $P(\Omega_1) = 1$. Ponieważ $(\tau_n(\omega) + \delta_n) - \tau_n(\omega) = \delta_n \searrow 0$, więc /12.24/ natychmiast wynika z /12.25/ i poniższego lematu.

LEMAT 12.3.

Niech $\{Y_n\}_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ będzie ciągiem procesów o trajektoriach w $D(\mathbb{R}^+,H)$. Niech $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczbowymi o własnościach:

/12.26/ $s_n \leq t_n \leq C$, gdzie C jest pewną stałą ,

/12.27/ $t_n - s_n \to 0$.

Jeżeli Y_∞ jest ciągły wg p-stwa i $Y_n \xrightarrow[D]{} Y_\infty$, to

/12.28/ $Y_n(t_n) - Y_n(s_n) \xrightarrow[p]{} 0$.

W szczególności, jeżeli $\{Y_n\}_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ są PoPN i $\nu_n, \nu_\infty \in \mathcal{M}_1^*(D(\mathbb{R}^+,H))$ są ich rozkładami, to $\nu_n \Rightarrow \nu_\infty$ i ciągłość wg p-stwa Y_∞ implikują

/12.29/ $$\Delta_{s_n}^{t_n} \nu_n \Rightarrow \delta_0 .$$

DOWÓD. Jeżeli $Y_n(t_n) - Y_n(s_n) \not\xrightarrow[p]{} 0$, to istnieją podciągi $\{t_{n'}\}$ i $\{s_{n'}\}$ oraz $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \leq C$, takie, że $t_{n'} \geq s_{n'} \to t_0$ i dla pewnego $\varepsilon > 0$

/12.30/ $P(\|Y_{n'}(t_{n'}) - Y_{n'}(s_{n'})\| > \varepsilon) > \varepsilon$,

Ponieważ $Y_n \xrightarrow[D]{} Y_\infty$, na mocy Tw. Skorochoda o reprezentacji/[34]/, możemy założyć, że

/12.31/ $Y_n(\cdot,\omega) \to Y_\infty(\cdot,\omega)$; $\omega \in \Omega$,

jako elementy przestrzeni $D(\mathbb{R}^+,H)$. W szczególności, jeśli tylko trajektoria $Y_\infty(\cdot,\omega)$ jest ciągła w $t_o \in \mathbb{R}^+$, i $t_n \to t_o$, $s_n \to t_o$, to

/12.32/ $Y_n(t_n,\omega) \to Y_\infty(t_o,\omega)$, $Y_n(s_n,\omega) \to Y_\infty(t_o,\omega)$

/12.33/ $Y_n(t_n,\omega) - Y_n(s_n,\omega) \to 0$.

Z ciągłości wg p-stwa procesu Y_∞, że dla dowolnego $t_o \in \mathbb{R}^+$, p.w. trajektorie Y_∞ są ciągłe w t_o. Stąd w /12.33/ występuje zbieżność p.w. Jest to sprzeczność z /12.30/. □

§ 13. Funkcjonalne martyngałowe twierdzenie graniczne.

Możliwości zastosowań UZL uwarunkowane są posiadaniem odpowiedniego, tzn. operującego przeliczalną liczbą warunków nakładanych na charakterystyki składników, twierdzenia granicznego dla sum niezależnych zmiennych losowych. Każde takie "dobre" twierdzenie daje odpowiednie MTG.

Podobny zamysł doprowadził do sformułowania, w poprzednim paragrafie, FZL. Np. "randomizując", na mocy FZL, słynne Tw. Donskera, otrzymujemy natychmiast zasadę niezmienniczości dla martyngałów, udowodnioną przez Browna w pracy [6] /udowodnioną, oczywiście, metodami bezpośrednimi, bez użycia FZL/.

Próba dowodu ogólnego FMTG /którego założenia byłyby równoważne z założeniem /12.1/ Tw. 12.1/ napotyka jednak trudności techniczne. Znane autorowi, odpowiednie FTG dla /rzeczywistych/ dyskretnych PoPN - tw. 3.1. z pracy Prochorowa [30] i tw. 2.3. z pracy Skorochoda [35] - operują bowiem warunkami, które nie tylko są trudne do sprawdzenia, ale i nieprzydatne z punktu widzenia procedury rondonizacyjnej /analogicznej do Stw. 7.2./

Naszym celem będzie więc w pierwszej kolejności dowód FTG w klasycznym przypadku dyskretnych PoPN. Głównym narzędziem będzie tutaj

LEMAT 13.1.

Niech $\{X_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem PoPN i trajektoriach w $D(\mathbb{R}^+,H)$ Niech proces X_∞ będzie ciągłym wg p-stwa PoPN /istnieje modyfikacja X_∞ o trajektoriach w $D(\mathbb{R}^+,H)$/.

Ciąg $\{X_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny wg rozkładu do X_∞, wtedy, i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbieżnego ciągu $\{t_n\}\subset\mathbb{R}^+$, $t_n\to t$, spełniony jest warunek

/13.1/ $X_n(t_n)\xrightarrow[\mathcal{D}(H)]{} X_\infty(t)$; $t_n\to t$.

DOWÓD. Jeżeli $X_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} X$, to /X_∞ jest ciągły wg p-stwa/ dla dowolnego $t\in\mathbb{R}^+$, $X_n(t)\xrightarrow[\mathcal{D}(H)]{} X_\infty(t)$. Niech $t_n\to t$. Z ciągu $\{t_n\}$ możemy wybrać podciąg monotoniczny, np. $\{t_{n'}\}$, $t_{n'}\nearrow t$. Z /12.28/ /L. 12.3/, $X_{n'}(t) - X_{n'}(t_{n'})\xrightarrow[P]{} 0$.

Stąd $X_{n'}(t_{n'})\xrightarrow[\mathcal{D}(H)]{} X_\infty(t)$. Ponieważ każdy podciąg ciągu $\{t_n\}$ zawiera podciąg monotoniczny, $X_n(t_n)\xrightarrow[\mathcal{D}(H)]{} X_\infty(t)$.

Załóżmy teraz /13.1/. Niech $t_n\to t$, $s_n\to s$, $t_n\geqslant s_n$. Mamy

/13.2/ $X_n(t_n)\xrightarrow[\mathcal{D}(H)]{} X_\infty(t)$, $X_n(s_n)\xrightarrow[\mathcal{D}(H)]{} X_\infty(s)$.

i stąd

/13.3/ $\mathcal{L}(X_n(t_n) - X_n(s_n)) * \mathcal{L}(X_n(s_n)) \Rightarrow \mathcal{L}(X_\infty(t) - X_\infty(s)) * \mathcal{L}(X_\infty(s))$

W szczególności, $\{\mathcal{L}(X_n(t_n) - X_n(s_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest relatywnie zwarty, a ponieważ funkcja charakterystyczna $\mathcal{L}(X_\infty(s))$ jest niezerowa, więc

$$/13.4/ \quad X_n(t_n) - X_n(s_n) \xrightarrow[D(H)]{} X_\infty(t) - X_\infty(s).$$

Z /13.4/ otrzymujemy zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych /por. /12.3/ /.

Niech teraz ciągi $\{t_n\}$ i $\{s_n\}$ spełniają warunki $t_n \geq s_n$, $t_n - s_n \to 0$, $\{t_n\}$ jest ograniczony. Z tego ostatniego żądania i /13.4/ wynika łatwo, że

$$/13.5/ \quad X_n(t_n) - X_n(s_n) \xrightarrow[p]{} 0 \; ; \; t_n - s_n \to 0, \; t_n \geq s_n,$$

$\sup_n t_n < +\infty$, co z kolei jest równoważne z

$$/13.6/ \quad \lim_{\delta\to 0} \limsup_n \sup_{\substack{t,s \leq q \\ |t-s|<\delta}} P(\|X_n(t) - X_n(s)\| > \varepsilon) = 0; \; \varepsilon > 0, \; q > 0.$$

Zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych wraz z /13.6/ implikują $X_n \xrightarrow[D]{} X_\infty$ na mocy Tw. Skorochoda/[35]/, /które zresztą jest łatwym wnioskiem z Tw. 10.1/ $\square$

Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem dyskretnych PoPN, tzn.

$$/13.7/ \quad X_n(t) = \sum_{\{j;\, t_n(j) \leq t\}} X_{nj} \; ; \quad t \in \mathbb{R}^+, \; n \in \mathbb{N}.$$

gdzie $\underline{\mathfrak{X}}_n = \{X_{n1}, X_{n2}, \ldots\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartościach w H, a $\{t_n(j)\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ jest skalą czasu. Oczywiście trajektorie procesów X_n należą do $D(\mathbb{R}^+, H)$, ponadto $X_n(0) \equiv 0$; $n \in \mathbb{N}$.

Ustalmy na chwilę $n \in \mathbb{N}$. Z procesem $\{X_n\}$ stowarzyszyć możemy odwzorowanie

/13.8/ $R^+ \ni t \mapsto (\alpha_t^n, S_t^n, M_t^n) \in H \times \mathcal{S} \times (\sigma_0 - \mathcal{M}(H))$

nazywane układem lokalnych charakterystyk procesu X_n i określone wzorami

/13.9/ $\alpha_t^n := \sum E\, X_{nj} h(\| X_{nj} \|) = \sum E\, \tilde{X}_{nj} \in H$

/13.10/ $\langle S_t^n y, y \rangle = \sum (E(\langle y, \tilde{X}_{nj} \rangle^2 - \langle y, E\, \tilde{X}_{nj} \rangle^2) \in \mathcal{S}$

/13.11/ $M_t^n(A) = \sum P(X_{nj} \in A \setminus \{0\}) \in \sigma_0 - \mathcal{M}(H)$

gdzie sumowanie odbywa się po zbiorze $\{ j \, ; \, t_n(j) \leqslant t \}$

Z /13.11/ wynika, że układ lokalnych charakterystyk wyznacza rozkład procesu dyskretnego.

Niech X_∞ będzie ciągłym wg p-stwa PoPN, $X_\infty(0) \equiv 0$. Jednym z głównych zastosowań rozwiązania CPG /Tw. 7.1/ jest następująca reprezentacja jednowymiarowych rozkładów procesu X_∞:

/13.12/ $E(\exp i \langle y, X_\infty(t) \rangle) =$

$$= \exp\Big(i \langle y, \alpha_t^\infty \rangle - \frac{1}{2} \langle S_t^\infty y, y \rangle + \int K(y,x)\, M_t^\infty(dx)\Big)$$

gdzie funkcja $K(y,x)$ określona jest przez /7.7/, a odwzorowanie

/13.13/ $t \mapsto \alpha_t^\infty \in H$ jest ciągłe, $\alpha_0^\infty = 0$.

/13.14/ $t \mapsto S_t^\infty \in \mathcal{S}$ jest ciągłe i niemalejące /tzn. jeśli $t \geqslant s$, to $S_t^\infty - S_s^\infty \in \mathcal{S}$/, $S_0^\infty = 0$.

/13.15/ $t \mapsto M_t^\infty \in \sigma_0 - \mathcal{M}(H)$ jest niemalejącym $(M_0^\infty \equiv 0)$ odwzorowaniem w zbiór miar Lévy'ego na H, i jest ciągłe w następującym sensie: dla dowolnego $A \in \mathcal{B}_H$, $\bar{A} \not\ni 0$, funkcja $f^A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f^A(t) = M_t^\infty(A)$ jest ciągła.

W szczególności, dla dowolnych $t \geq s \geq 0$ rozkład zmiennej losowej $X_\infty(t) - X_\infty(s)$ jest nieskończenie podzielny.

Podobnie, jak dla procesów dyskretnych, określające rozkład procesu X_∞ odwzorowanie $t \mapsto (\alpha_t^\infty, S_t^\infty, M_t^\infty)$ nazywamy układem lokalnych charakterystyk procesu X_∞.

TWIERDZENIE /13.2/

Ciąg dyskretnych PoPN $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o charakterystykach lokalnych (α^n, S^n, M^n), jest zbieżny wg rozkładu do ciągłego wg p-stwa PoPN X_∞, o charakterystykach lokalnych $(\alpha^\infty, S^\infty, M^\infty)$ wtedy, i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki

/13.16/ $M_t^n(A) \to M_t^\infty(A)$; $A \in \mathcal{A}$, $t \in T'$.

/13.17/ $\sup\limits_{0<s\leq t} \|\alpha_s^n - \alpha_s^\infty\| \to 0$; $t \in T'$.

/13.18/ $\mathrm{tr}(S_t^n) \to \mathrm{tr}(S_t^\infty) + \int \|x\|^2 h^2(\|x\|) M_t^\infty(dx)$; $t \in T'$

/13.19/ $\langle S_t^n y, y\rangle \to \langle S_t^\infty y, y\rangle + \int \langle y, x\rangle^2 h^2(\|x\|) M_t^\infty(dx)$: $y \in G$, $t \in T'$

gdzie $T' \subset \mathbb{R}^+$ jest dowolnym p r z e l i c z a l n y m podzbiorem gęstym, $\mathcal{A} \subset \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \sigma_0\text{-}\mathrm{Cont}\, M_t^\infty$ jest dowolną p r z e l i c z a l n ą rodziną determinującą zbieżność miar Lévy'ego, a G - jest dowolnym p r z e l i c z a l n y m, liniowym i gęstym podzbiorem H.

Jeżeli $X_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} X_\infty$, to warunki /13.16/ - /13.19/ są spełnione dla $T' = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \sigma_0\text{-}\mathrm{Cont}\, M_t^\infty$ i G = H.

DOWÓD. Przypuśćmy, że zarówno ze zbieżności procesów wg rozkładu, jak i z warunku /13.16/ wynika niemal jednostajna infinitezymalność składników procesów X_n :

$$/13.20/ \quad \sup_{\{j;\ t_m(j)\leqslant t\}} P\left(\|X_{nj}\|\geqslant\varepsilon\right)\to 0\ ;\ \varepsilon>0,\quad t\geqslant 0.$$

Na mocy L.13.1., wystarczy wykazać równoważność warunku /13.1/ i warunków /13.16/ - /13.19/.

Ponieważ spełniony jest warunek /13.20/, więc $X_n(t)=\sum X_{nj}$ jest sumą infinitezymalnych składników i zbieżność w /13.1/ możemy wyrazić przy pomocy Tw. 7.1. Oznacza to, że /13.1/ jest równoważny z warunkami /13.21/ - /13.23/:

$$/13.21/ \quad M^n_{t_n}(A)\to M^\infty_t(A)\ ;\quad A\in\mathcal{A},\quad t_n\to t.$$

$$/13.22/ \quad \alpha^n_{t_n}\to\alpha^\infty_t\ ;\quad t_m\to t.$$

$$/13.23/ \quad S^n_{t_n}\to T^\infty_t\ \ (w\ b)\ ;\quad t_m\to t.$$

gdzie T^∞_t jest S-operatorem zadanym przez formę kwadratową:

$$/13.24/ \quad \langle T^\infty_t y,y\rangle=\langle S^\infty_t y,y\rangle+\int\langle y,x\rangle^2 h^2(\|x\|)\,M^\infty_t(dx)\ ;\quad y\in H.$$

Widać, że /13.22/ jest równoważne z /13.17/, a warunki /13.21/ i /13.23/ pociągają /13.16/, /13.18/ i /13,19/. Wystarczy więc wykazać, że z /13.16/ wynika /13.21/ i że /13.18/ wraz z /13.19/ implikują /13.23/.

Niech $A\in\mathcal{A}$. Na mocy /13.15/ funkcja $f^A_\infty(s):=M^\infty_s(A)$ jest ciągła i niemalejąca. Funkcje $f^A_n(s):=M^n_s(A)$ są niemalejące. Warunek /13.16/ oznacza, że $f^A_n(s)\to f^A_\infty(s)$ dla s z pewnego podzbioru gęstego $\mathbb{R}^+$. Niemal jednostajna zbieżność /13.21/ wynika teraz z elementarnego faktu z analizy, który poniżej wyodrębnimy w postaci lematu.

LEMAT 13.3.

Niech $\{f_m\}_{m\in\overline{\mathbb{N}}}$ będzie ciągiem funkcji niemalejących na $\mathbb{R}^+$, i f_∞ niech będzie f.ciągłą na $\mathbb{R}^+$.

Jeżeli dla pewnego gęstego /i zawierającego 0/ podzbioru $T' \in \mathbb{R}^+$ ma miejsce zbieżność

/13.25/ $f_n(t) \to f_\infty(t)$; $t \in T'$,

wówczas f_n zmierza do f_∞ niemal jednostajnie na $\mathbb{R}^+$, i w szczególności, niemal jednostajnie do funkcji $f_\infty^* \equiv 0$ zmierzają maksima skoków funkcji f_n, tzn.

/13.26/ $f_n^*(t) := \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \Delta f_n(s) \to 0$; $t \in \mathbb{R}^+$,

gdzie $\Delta f_n(s) = f_n(s+) - f_n(s-)$. $\square$

Podobnie, jak /13.21/ wykazujemy warunek /13.23/ wybierając funkcje $f_n^y(s) := \langle S_s^n y, y \rangle$, $f_\infty^y(s) := \langle T_t^\infty y, y \rangle$, itd.

Dowód Tw. 13.2, zakończymy, dwukrotnie wykazując warunek /13.20/.

LEMAT 13.4.

Niech procesy $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będą generowane wg wzoru /13.7/ przez ciągi $\{Y_{nj}\}_{j \in \mathbb{N}}$ /niekoniecznie niezależnych/ zmiennych losowych w H i skale czasu $\{t_n(j)\}_{j \in \mathbb{N}}$. Niech Y_∞ będzie procesem ciągłym wg p-stwa i o trajektoriach w $D(\mathbb{R}^+, H)$. Jeżeli $Y_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} Y_\infty$, to spełniony jest warunek /13.20/.

DOWÓD. Przypuśćmy, że dla pewnych $\varepsilon > 0$ i $t > 0$ warunek /13.20/ nie zachodzi. Wówczas istnieją: $\eta > 0$, $t_0 \leqslant t$ i ciąg $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, takie, że

/13.27/ $t_n(j_n) \to t_0$

/13.28/ $\limsup\limits_n P(\|Y_{nj_n}\| \geqslant \varepsilon) \geqslant \eta > 0$.

Niech $\{s_n\} \in \mathbb{R}^+$ będzie ciągiem określonym przez /13.29/:

/13.29/ $t_n(j_n) > s_n > \max\left(t_n(j_n) - \frac{1}{n},\ t_n(j_n - 1)\right)$

Z definicji /13.7/ mają miejsce

/13.30/ $s_n \to t_0$

/13.31/ $Y_{nj_n} = Y_n\left(t_n(j_n)\right) - Y_n(s_n)$.

Stąd $t_n(j_n) - s_n \to 0$, $\{t_n(j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym, i na mocy /13.28/ i /13.31/, $Y_n\left(t_n(j_n)\right) - Y_n(s_n)$ nie zmierza wg p-stwa do zera. Otrzymaliśmy sprzeczność z tezą L. 12.3. $\square$

LEMAT 13.5.

Warunek /13.16/ pociąga niemal jednostajną infinitezymalność składników procesów dyskretnych X_n , tzn. warunek /13.20/.

DOWÓD. Ustalmy $t > 0$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie takie, aby

/13.32/ $M_t^{\infty}\left(\|X\| = \varepsilon\right) = 0$

/zauważmy, iż ε może być dowolnie bliskie zera/. Wprowadzimy funkcje $f_n(s) = M_s^n\left(\|X\| > \varepsilon\right)$; $s \leq t$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$. Funkcje f_n ; $n\in\overline{\mathbb{N}}$, są niemalejące, f_∞ jest ciągła, ponadto z /13.16/ oraz /13.32/ mamy

/13.33/ $f_n(s) \to f_\infty(s)$; $s \in T' \cap [0,t]$.

Ponieważ $\sup_j P\left(\|X_{nj}\| > \varepsilon\right) = \sup_{0\leq s\leq t} f_n(s) - f_n(s-) = f_n^*(t)$, warunek /13.20/ jest drugą tezą /13.26/ L. 13.3 . $\square$

We wspomnianych na wstępie FTG, zarówno Prochorow, jak i Skorochod, zakładają a priori infinitezymalność składników.

W formie zaprezentowanej powyżej, dostateczność warunków /13.16/ - /13.19/ /plus niepotrzebne dodatkowe założenie o infinitezymalności/ została stwierdzona w pracy 17 /przypadek $H = R^d$, 1982/. Autorowi nie są znane prace dotyczące konieczności warunków Tw. 13.2.

Dysponując Tw. 13.2., które operuje przeliczalną liczbą warunków, z łatwością zmodyfikować można metodę ze Stw. 7.2., i w ten sposób "rozszyfrować" założenie /12.1/ FZL.

TWIERDZENIE F /13.6 - FMTG/

Niech funkcjonalny układ podstawowy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\underline{\Sigma}})$ generuje ciąg procesów $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Niech X_∞ będzie ciągłym wg p-stwa PoPN z układem lokalnych charakterystyk $(\alpha^\infty, S^\infty, M^\infty)$. Dla zbieżności wg rozkładu /w $D(\mathbb{R}^+, H)$/ciągu procesów $\{X_n\}$ do X_∞ /$X_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} X_\infty$/ wystarcza, aby dla każdego t z pewnego zbioru gęstego $T' \subset \mathbb{R}^+$, spełnione były warunki

/13.34/ $\sum_{1\leq k\leq \sigma_n(t)} P_{n,k-1}(X_{nk}\in A) \xrightarrow[p]{} M_t^\infty(A)$; $A \in \mathcal{A}$,

/13.35/ $\sup_{0<s\leq t} \left\| \sum_{1\leq k\leq \sigma_n(s)} E_{n,k-1} \tilde{X}_{nk} - \alpha_s^\infty \right\| \xrightarrow[p]{} 0$,

/13.36/ $\sum_{1\leq k\leq \sigma_n(t)} \left(E_{n,k-1} \|\tilde{X}_{nk}\|^2 - \|E_{n,k-1}\tilde{X}_{nk}\|^2 \right) \xrightarrow[p]{} \mathrm{tr}(T_t^\infty)$,

/13.37/ $\sum_{1\leq k\leq \sigma_n(t)} \left(E_{n,k-1}\langle y,\tilde{X}_{nk}\rangle^2 - \langle y, E_{n,k-1}\tilde{X}_{nk}\rangle^2 \right) \xrightarrow[p]{} \langle T_t^\infty y,y\rangle$; $y\in G$

gdzie S-operator T_t^∞ zadany jest wzorem /13.24/, tzn.

$$\langle T_t^\infty y,y\rangle = \langle S_t^\infty y,y\rangle + \int \langle y,x\rangle^2 h^2(\|x\|)\, M^\infty(dx) \ ; \ y\in H .$$

a $\mathcal{A}$ i G są takie same jak w Tw. 13.2. $\square$

Niestety, gdy X_∞ nie jest procesem gausowskim, warunki Tw. 13.6. są na ogół dalekie od konieczności /pomijając przypadek objęty Tw. 13.2/.

§ 14. Zasada niezmienniczości dla tablic różnic martyngałowych.

W 1979 roku, w cytowanej już pracy [10], Gänssler i Häusler podali zasadę niezmienniczości dla TRM. Udowodnimy nieskończenie wymiarową wersję tego twierdzenia.

TWIERDZENIE G /14.1/

Niech X_∞ będzie gausowskim PoPN i układzie charakterystyk lokalnych $(0, S_t^\infty, 0)$.

Załóżmy, że $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}})$ jest TRM, i że funkcjonalny układ podstawowy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\underline{\Sigma}})$ spełnia warunek

/14.1/ ciąg $\left\{ X_n^*(t) = \sup_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \| X_{nk} \| \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie całkowalny dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$.

Ciąg $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ procesów generowanych przez $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\underline{\Sigma}})$ jest zbieżny wg rozkładu /w $D(\mathbb{R}^+, H)$/ do X_∞ w t e d y i t y l k o w t e d y, gdy dla pewnego zbioru gęstego $T' \in \mathbb{R}^+$ i pewnego liniowego i gęstego podzbioru $G \subset H$, spełnione są warunki

/14.2/ $$\sum_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \| X_{nk} \|^2 \xrightarrow[p]{} \operatorname{tr}(S_t^\infty) ; \quad t \in T'.$$

/14.3/ $$\sum_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \langle y, X_{nk} \rangle^2 \xrightarrow[p]{} \langle S_t^\infty y, y \rangle ; \quad y \in G, \quad t \in T'.$$

Jeżeli $X_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} X_\infty$, wówczas warunki /14.2/ i /14.3/ spełnione są dla $T' = \mathbb{R}^+$ i $G = H$.

DOWÓD dostateczności warunków /14.1/ - /14.3/.

Z warunku /14.2/ wynika

/14.4/ $\sup_{1 \le k \le \sigma_n(t)} \| X_{nk} \| \xrightarrow[p]{} 0 \; ; \quad t \in \mathbb{R}^+$

Rzeczywiście, połóżmy $Z_n(t) = \sum_{1 \le k \le \sigma_n(t)} \| X_{nk} \|^2$ i niech $T'' \subset T'$ będzie przeliczalnym podzbiorem T', gęstym w $\mathbb{R}^+$. Po ewentualnym przejściu do podciągu, możemy założyć, że

/14.5/ $Z_n(t) \to \operatorname{tr}(S_t^\infty)$ p.w. ; $t \in T''$.

Stosując L. 13.3, otrzymujemy

/14.6/ $Z_n^*(t) = \sup_{1 \le k \le \sigma_n(t)} \| X_{nk} \|^2 \to 0$ p.w. ; $t \in T''$.

/pisząc znak równości w /14.6/ skorzystaliśmy z faktu, że trajektorie skal czasu mają skoki wielkości jeden/.

Warunek /14.4/ wraz z założoną jednostajną całkowalnością /14.1/, pociągają

/14.7/ $\sup_{1 \le k \le \sigma_n(t)} \| X_{nk} \| \xrightarrow[L^1]{} 0 \; ; \quad t \in \mathbb{R}^+$.

Powtarzając teraz rozumowanie przeprowadzone w dowodzie Tw. 8.2. /CTGM/, sprawdzamy, że warunki /14.7/, /14.2/ i /14.3/ pociągają warunki /13.34/ - /13.37/ /dla $\alpha_t^\infty \equiv 0$, $M_t^\infty \equiv 0$ / z Tw. 13.6 /FMTG/.

DOWÓD konieczności warunków /14.2/ i /14.3/.

Przypuśćmy, że $X_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} X_\infty$. Ponieważ p.w. trajektorie X_∞ są ciągłe, zbieżność wg rozkładu do X_∞ implikuje

/14.8/ $X_n^*(t) \xrightarrow[\mathcal{D}]{} X_\infty^*(t) = 0 \; ; \quad t \in \mathbb{R}^+$

Stąd, i z /14.1/, wynika /14.7/. W szczególności

/14.9/ $\sup_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} |\langle y, X_{nk} \rangle| \leq \|y\| \sup_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \|X_{nk}\| \xrightarrow[L^1]{} 0; \; y \in H, \; t \in \mathbb{R}^+$

Dla $y \in H$ rozważmy /rzeczywistą/ TRM $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}^y, \underline{\underline{\mathfrak{F}}})$, gdzie $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}^y = \{\langle y, X_{nk} \rangle\}$

Ponieważ ma miejsce /14.9/, do układu podstawowego $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}^y, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\Sigma})$ możemy zastosować jednowymiarową wersję naszego twierdzenia /zob. [10] /, i w ten sposób uzyskać

/14.10/ $\sum_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \langle y, X_{nk} \rangle^2 \xrightarrow[p]{} \langle S_t^\infty y, y \rangle \; ; \quad t \in \mathbb{R}^+, \; y \in H,$

czyli warunek /14.3/. Do dowodu pozostaje warunek /14.2/.

LEMAT 14.2.

Niech $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}})$ będzie TRM, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - ciągiem procesów generowanym przez f. układ podstawowy $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}, \underline{\underline{\mathfrak{F}}}, \underline{\underline{\Sigma}})$.

Przypuśćmy, że ciąg $\{X_n\}$ spełnia warunek /14.7/. Wówczas istnieje tablica $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}'$ taka, że $(\underline{\underline{\mathfrak{X}}}', \underline{\underline{\mathfrak{F}}})$ jest TRM, zmienne tablicy $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}'$ są ograniczone :

/14.11/ $\|X_{nk}\| \leq 2 \; ; \quad k \in \mathbb{N}, \; n \in \mathbb{N}$.

i spełnione są warunki

/14.12/ $\sup_{0 < s \leq t} \|X_n(s) - X_n'(s)\| \xrightarrow[p]{} 0 \; ; \quad t \in \mathbb{R}^+$

/14.13/ $\sup_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \|X_{nk}'\| \xrightarrow[L^1]{} 0 \; ; \quad t \in \mathbb{R}^+$

/14.14/ $\sum_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \|X_{nk}\|^2 - \sum_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \|X_{nk}'\|^2 \xrightarrow[p]{} 0 \; ; \quad t \in \mathbb{R}^+$.

/14.15/ $\sum_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \langle y, X_{nk} \rangle^2 - \sum_{1 \leq k \leq \sigma_n(t)} \langle y, X_{nk}' \rangle^2 \xrightarrow[p]{} 0; \; y \in H, \; t \in \mathbb{R}^+$.

DOWÓD polega na adaptacji dowodu Lematu 1 z pracy [10]. $\square$

Na mocy L. 14.2, możemy założyć, że tablica $\underline{\underline{\mathfrak{X}}}$ składa się z różnic martyngałowych X_{nk}, norma których ograniczona jest przez 2.

Przypuśćmy na chwilę, że ciąg $\{\mathcal{U}_n = \mathcal{U}(\sigma_n(t))\}_{n\in\mathbb{N}}$ losowych S-operatorów zadanych wzorem

/14.16/ $\langle \mathcal{U}_n y,y\rangle = \sum_{1\leq k\leq \sigma_n(t)} \langle y,X_{nk}\rangle^2$

jest ciasny w $\mathcal{S}$. Wówczas $\mathrm{tr}(\mathcal{U}_n) \xrightarrow[p]{} \mathrm{tr}(S_t^\infty)$. Istotnie, niech $\{\mathcal{U}_{n'}\}$ będzie dowolnym zbieżnym wg rozkładu podciągiem $\{\mathcal{U}_n\}$:

$$\mathcal{U}_{n'} \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathcal{S})]{} \mathcal{U}_\infty .$$

Dla dowolnego $y\in H$, $\langle \mathcal{U}_{n'} y,y\rangle \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \langle \mathcal{U}_\infty y,y\rangle$. Stąd i z /14.10/ $P\left(\langle U_\infty y,y\rangle = \langle S_t^\infty y,y\rangle \;;\; y\in G\right) = 1$, gdzie G jest przeliczalnym podzbiorem gęstym w H. Jest to równoważne stwierdzeniu $U_\infty = S_t^\infty$ P - p.w., i w rezultacie $\mathrm{tr}(U_{n'}) \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \mathrm{tr}(U_\infty) = \mathrm{tr}(S_t^\infty)$.

Z ciasności ciągu $\{U_n\}$ wynika teraz

$$\mathrm{tr}(U_n) = \sum_{1\leq k\leq \sigma_n(t)} \|X_{nk}\|^2 \xrightarrow[p]{} \mathrm{tr}(S_t^\infty)$$

Dowód warunku /14.2/ sprowadzony został do wykazania ciasności ciągu $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ustalmy bazę ortonormalną $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ w H i przypomnijmy odwzorowanie /4.41/ :

/14.17/ $\mathcal{S} \ni T \longmapsto M^T \in \mathcal{M}/H/$

$$M^T(\{i\}) = \langle Te_i, e_i\rangle$$

Ciasność $\{U_n\}$ jest równoważna ciasności miar losowych $\{M^{U_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Możemy więc zastosować Tw. 16.1. Innymi słowy, należy znaleźć momenty zatrzymania $\{\tau_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że

/14.18/ $P\left(\tau_n^\varepsilon < \sigma_m(t)\right) < \varepsilon \; ; \; n\in\mathbb{N}$.

/14.19/ $\{EU(\tau_n^\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ jest warunkowo zwarty.

Pokażemy najpierw, że z ciasności ciągu $\{X_n\}$ wynikają /definicja r_N^2 - zob. /2.9/ /:

/14.20/ $\lim\limits_{C\to\infty} \sup\limits_m P\left(\sup\limits_{0<s\leqslant t} \|X_n(s)\| > C\right) = 0; \quad t\in\mathbb{R}^+$.

/14.21/ $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_m P\left(\sup\limits_{0<s\leqslant t} r_N^2(X_n(s)) > \delta\right) = 0; \; \delta>0, \; t\in\mathbb{R}^+$.

Dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje zwarty zbiór $K_\varepsilon \subset H$ taki, że

/14.22/ $\inf\limits_m P\left(X_n(s)\in K_\varepsilon \; ; \; 0\leqslant s\leqslant t\right) > 1-\varepsilon$

Ponieważ K_ε jest zwarty, istnieje stała $C>0$ ograniczająca zbiór K_ε: $\sup\limits_{x\in K_\varepsilon} \|x\| \leqslant C$, i dlatego

/14.23/ $\sup\limits_m P\left(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} \|X_n(s)\| > C\right) \leqslant \sup\limits_m P\left(\bigcup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} \{X_m(s)\notin K_\varepsilon\}\right) \leqslant \varepsilon$

Podobnie, dla $\delta>0$, z kryterium warunkowej zwartości w przestrzeni H /Tw. 2.2/ istnieje $N(\delta,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ takie, że dla $N \geqslant N(\delta,\varepsilon)$, $\sup\limits_{x\in K_\varepsilon} r_N^2(x) \leqslant \delta$. W konsekwencji, dla $N\geqslant N(\delta,\varepsilon)$

/14.24/ $\sup\limits_m P\left(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} r_N^2(X_n(s)) > \delta\right) \leqslant \sup\limits_m P\left(\bigcup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} \{X_n(s)\notin K_\varepsilon\}\right) \leqslant \varepsilon$.

Dla ustalonego $\varepsilon>0$ połóżmy teraz

/14.25/ $\tau_n\left(=\tau_n^\varepsilon\right) = \sigma_m(t) \wedge \inf\left\{k \; ; \; \sup\limits_{1\leqslant j\leqslant k} \left\|\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j} X_{mi}\right\|^2 > C^2\right\}$

gdzie C jest dobrane tak, aby spełniony był warunek /14.23/. Wówczas

/14.26/ $\sup\limits_m \operatorname{tr}\left(EU(\tau_n)\right) = \sup\limits_m E\left(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant\tau_n} \|X_{mk}\|^2\right)$

$= \sup\limits_m E\left\|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant\tau_n} X_{mk}\right\|^2 \leqslant 2(C^2+4) \quad (\text{bo } \|X_{mk}\|\leqslant 2)$

$$/14.27/\quad \sup_m \sum_{i=N}^{\infty} \langle E\mathcal{U}(\tau_n)e_i, e_i\rangle = \sup_m \sum_{i=N}^{\infty} E\Big(\sum_{1\le k\le \tau_n} \langle X_{mk}e_i, e_i\rangle^2\Big)$$

$$= \sup_m E\Big(\sum_{1\le k\le \tau_n} r_N^2(X_{mk})\Big)$$

$$= \sup_m E\, r_N^2\Big(\sum_{1\le k\le \tau_n} X_{mk}\Big)$$

$$\le \delta + \sup_m 2(c^2+4)\, P\Big(r_N^2\Big(\sum_{1\le k\le \tau_n} X_{mk}\Big) > \delta\Big)$$

$$\le \delta + 2(c^2+4) \sup_m P\Big(\sup_{1\le k\le \sigma_n(t)} r_N^2\Big(\sum_{1\le j\le k} X_{mj}\Big) > \delta\Big).$$

Z /14.21/ wynika, że ostatnie wyrażenie po prawej stronie /14.27/ zmierza do 0, gdy $N \to +\infty$. Warunki /14.26/ i /14.27/ oznaczają warunkową zwartość ciągu $\{EU(\tau_n^{\varepsilon})\}_{m\in\mathbb{N}}$. Pozostaje więc tylko zauważyć, że z /14.25/

$$P\big(U(\tau_n^{\varepsilon}) \ne U(\sigma_n(t))\big) \le P(\tau_n < \sigma_n(t)) < \varepsilon \qquad \square .$$

U Z U P E Ł N I E N I E

MIARY LOSOWE

§ 15. Miary losowe

Niech $(\mathcal{H},d)$ będzie ośrodkową i zupełną przestrzenią metryczną, a $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{M}_1(\mathcal{H})$ odpowiednio przestrzeniami miar skończonych i rozkładów na $\mathcal{H}$, wyposażonymi w topologię słabej zbieżności /zob. § 1/

DEFINICJA 15.1. Miarą losową /rozkładem losowym/ na $\mathcal{H}$ nazywamy mierzalny element losowy o wartościach w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ / $\mathcal{M}_1(\mathcal{H})$ /. $\square$

Wiadomo /zob. Tw. 6.6., Rozdz.II,[29]/, że słabą topologię w $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ generują odwzorowania postaci

/15.1/ $$\mathcal{M}(\mathcal{H}) \ni M \longmapsto \tilde{f}(M) := \int f(x)\, M(dx) \in \mathbb{R}^1 .$$

gdzie $f \in \underline{F} \subset CB(\mathcal{H})$ i $\underline{F}$ jest pewnym p r z e l i c z a l n y m podzbiorem przestrzeni funkcji ciągłych i ograniczonych na $\mathcal{H}$. Łatwo stąd wynika

STWIERDZENIE 15.2.

Niech $M: (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathcal{M}(\mathcal{H})$ będzie elementem losowym w $\mathcal{M}(\mathcal{H})$.

Następujące warunki są równoważne :

/i/ M jest miarą losową /M jest mierzalny/

/ii/ Odwzorowanie $\tilde{f} \circ M$ jest mierzalne dla każdej funkcji f ciągłej i ograniczonej na $\mathcal{H}$.

/iii/ Odwzorowanie $\tilde{f} \circ M$ jest mierzalne dla każdej funkcji f borelowskiej i takiej, że
$$P\left(\int |f(x)|\, M(dx) < +\infty \right) = 1 . \square .$$

DEFINICJA 15.3. Mówimy, że miara losowa M jest całkowalna, jeśli $E(M(\mathcal{H})) < +\infty$. Jeżeli M jest całkowalna, wówczas odwzorowanie

/15.2/ $\mathcal{B}_{\mathcal{H}} \ni A \longmapsto (EM)(A) := E(M(A)) \in \mathbb{R}^+$

zadaje miarę $EM \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$, którą nazywać będziemy wartością oczekiwaną miary losowej M. $\square$

Zauważmy, że jeśli μ jest regularnym rozkładem warunkowym $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathcal{H}, \mathcal{B}_{\mathcal{H}})$ względem $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, to

/15.3/ $E\mu = \mathcal{L}(X)$.

Miary losowe, w sensie definicji 15.1., od dawna rozpatrywane były w kontekście tzw. procesów punktowych oraz procesów gałązkowych; na ogół jednak zainteresowanie budziły przypadki, gdy przestrzeń $\mathcal{H}$ była zwarta /[31]/, bądź lokalnie zwarta o bazie przeliczalnej /[18], [21]/. Wydaje się, że pierwszą pracą, w której konsekwentnie stosuje się aparat miar losowych na przestrzeni ogólniejszej niż wymienione, jest praca Aldousa [2].

§ 16. Kryteria ciasności miar losowych.

Niech $\{M_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną miar losowych na $\mathcal{H}$. Ponieważ przestrzeń $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ jest przestrzenią topologiczną, pojęcie ciasności rodziny $\{M_i\}_{i\in I}$ ma naturalny, określony w § 1, sens. Zgodnie z /1.3/, rodzina $\{M_i\}_{i\in I}$ jest ciasna, jeżeli dla każdego $\delta > 0$ istnieją zbiory mierzalne $\{A_{i,\delta}\}_{i\in I}$ takie, że

/16.1/ $P(A_{i,\delta}) > 1 - \delta; \quad i \in I$.

/16.2/ zbiór $\bigcup_{i\in I}\{M_i(\cdot,\omega)\,;\,\omega\in A_{i,\delta}\}\subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ jest warunkowo / = relatywnie/ zwarty.

Korzystając z Tw. Prochorowa /Tw.1.2./ udowodnimy

TWIERDZENIE 16.1.

Niech $\{M_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną miar losowych na $\mathcal{H}$. Następujące warunki są równoważne:

/i/ Rodzina $\{M_i\}_{i\in I}$ jest ciasna.

/ii/ Dla każdego $\delta>0$ istnieje taka rodzina całkowalnych miar losowych $\{M_i^\delta\}_{i\in I}$, że

/16.3/ $\sup_{i\in I} P(M_i^\delta \neq M_i) < \delta$

/16.4/ zbiór $\{EM_i^\delta\}_{i\in I}\subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ jest relatywnie zwarty.

DOWÓD. Załóżmy, że rodzina $\{M_i\}_{i\in I}$ jest ciasna. Ustalmy $\delta>0$ i niech zbiory $\{A_{i,\delta}\}_{i\in I}$ spełniają /16.1/ i /16.2/.

Połóżmy

/16.5/ $M_i^\delta(\cdot,\omega) = I_{A_{i,\delta}}(\omega)\cdot M_i(\cdot,\omega)\quad ;\ i\in I$.

Na mocy /16.2/ i Tw. Prochorowa, istnieją:

1/ stała $C>0$ oraz 2/ ciąg $\{K_n\}$ wstępujących zbiorów zwartych, takie, że

/16.6/ $\sup_{i\in I}\sup_{\omega} M_i^\delta(\mathcal{H})\omega) = \sup_{i\in I}\sup_{\omega\in A_{i,\delta}} M_i(\mathcal{H},\omega)\leq C$

/16.7/ $\sup_{i\in I}\sup_{\omega} M_i^\delta(K_n^c,\omega) = \sup_{i\in I}\sup_{\omega\in A_{i,\delta}} M_i(K_n^c,\omega)\leq \frac{1}{n}\ ;\ n\in\mathbb{N}$.

Stąd

/16.8/ $\sup_{i\in I} EM_i^\delta(\mathcal{H})\leq C$

/16.9/ $\sup_{i\in I} EM_i^\delta(K_n^c)\leq \frac{1}{n}\ ;\ n\in\mathbb{N}$

a więc rodzina $\{M_i^\delta\}_{i\in I}$ spełnia warunek /16.4/.

Warunek /16.3/ wynika z /16.1/ :

/16.10/ $P(M_i^\delta \neq M_i) \leqslant P(A_{i,\delta}) < \delta$.

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek /ii/ stwierdzenia.

Niech $\delta > 0$ i niech rodzina $\{M_i^\delta\}_{i\in I}$ ma własności /16.3/ i /16.4/. Połóżmy

/16.11/ $C = \delta^{-1} \cdot \sup_{i\in I} E M_i^\delta(\mathcal{X})$

Wybierzmy również taki ciąg zbiorów zwartych $\{K_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ aby

/16.12/ $\sup_{i\in I} EM_i^\delta(K_n^c) \leqslant \delta \cdot n^{-1} \cdot 2^{-n}$; $n\in \mathbb{N}$

Zbiory $(A_{i,3\delta})$ określamy wzorem:

/16.13/ $A_{i,3\delta} = \{M_i^\delta = M_i\} \cap \{M_i^\delta(\mathcal{X}) \leqslant C\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \{M_i^\delta(K_n^c) \leqslant \frac{1}{n}\}$

Bezpośrednio z definicji /16.13/ wynika, że spełniony jest warunek /16.2/. Pozostaje do sprawdzenia /16.1/ :

/16.14/ $$P(A_{i,3\delta}^c) \leqslant P(M_i^\delta \neq M_i) + P(M_i^\delta(\mathcal{X}) > C) + \sum_{n=1}^{\infty} P(M_i^\delta(K_n^c) > \tfrac{1}{n}) \leqslant \delta + \frac{E(M_i^\delta(\mathcal{X}))}{C} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot EM_i^\delta(K_n^c) \leqslant 3\delta . \square .$$

WNIOSEK 16.2.

Niech $\{M_i\}_{i\in I}$ i $\{N_i\}_{i\in I}$ będą dwiema rodzinami miar losowych. Przypuśćmy, że rodzina $\{M_i\}_{i\in I}$ jest ciasna, zmienne losowe $\{N_i(\mathcal{X})\}_{i\in I}$ są jednostajnie całkowalne, oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że

/16.15/ $N_i \leqslant C \cdot M_i$ p.w. , $i\in I$.

Wtedy rodzina $\{EN_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ jest relatywnie zwarta.

DOWÓD. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie taka, że $P(A) \leqslant \delta$ pociąga

$$/16.16/ \quad \sup_{i\in I} E\left(N_i(\mathcal{H})\, I_A\right) \leqslant \varepsilon/2$$

Dla ciasnej rodziny $\{M_i\}_{i\in I}$ wybierzmy miary $\{M_i^\delta\}_{i\in I}$ spełniające warunki /16.3/ - /16.4/ z Tw. 16.2.

Niech K będzie takim zbiorem zwartym, że

$$/16.17/ \quad EM_i^\delta(K^c) \leqslant \varepsilon/2C$$

Wówczas

$$/16.18/ \quad EN_i(K^c) = E\left[N_i(K^c)\, I(M_i = M_i^\delta)\right] + E\left[N_i(K^c)\, I(M_i \neq M_i^\delta)\right]$$

$$\leqslant C\,EM_i^\delta(K^c) + E\left[N_i(\mathcal{H})\, I(M_i \neq M_i^\delta)\right]$$

$$\leqslant C \cdot \varepsilon/2C + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

na mocy /16.15/, /16.16/ i /16.17/. Z założonej jednostajnej całkowalności $\{N_i(\mathcal{H})\}$ wynika również

$$/16.19/ \quad \sup_{i\in I} EN_i(\mathcal{H}) < +\infty \quad \square$$

Dwa następne rezultaty są natychmiastowymi konsekwencjami Tw. 16.1 i Wn. 16.2.

WNIOSEK 16.3.

Niech $\{M_i\}_{i\in I}$ i $\{N_i\}_{i\in I}$ będą rodzinami miar losowych. Jeżeli rodzina $\{M_i\}_{i\in I}$ jest ciasna, $N_i \leqslant M_i$ p.w.; $i\in I$, oraz istnieje taka stała $C > 0$, że

$$/16.20/ \quad N_i(\mathcal{H}) \leqslant C \text{ p.w.}; \; i\in I,$$

wtedy rodzina $\{EN_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ jest relatywnie zwarta. $\square$

WNIOSEK 16.4.

Rodzina $\{\mu_i\}_{i\in I}$ rozkładów losowych na $\mathcal{H}$ jest ciasna w t e d y, i t y l k o w t e d y, gdy rodzina $\{E\mu_i\}_{i\in I}$ jest relatywnie zwarta. $\square$

B I B L I O G R A F I A

[1] D.Aldous /1978/, Stopping times and tightness, Ann. Probab., 6, 335-340.

[2] D.Aldous /1978/, Weak convergence of stochastic processes viewed in the Strassbourg manner, preprint.

[3] P.Billingsley /1961/, The Lindeberg - Lévy theorem for martingales, Proc.Amer.Math.Soc.,12, 788-792.

[4] P.Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, New York, 1968.

[5] L.Breiman, Probability, Addison - Wesley, Reading, 1968.

[6] B.M.Brown /1971/, Martingale central limit theorems, Ann.Math. Statist., 42, 59-66.

[7] B.M.Brown, G.K.Eagleson /1971/, Martingale convergence to infinitely divisible laws with finite variances, Trans. Amer. Math.Soc., 162, 449-453.

[8] R.Durret, S.I.Resnick /1978/, Functional limit theorems for dependent random variables, Ann. Probab., 6, 829-846.

[9] A.Dvoretzky /1971/, Asymptotic normality for sums of dependent random variables, Proc. 6th Berkeley Sympos. Math.Statist. Probab., Univ. Calif. Press, 513-535.

[10] P.Gänssler, E.Häusler /1979/, Remarks on the functional central limit theorem for martingales, Z.Wahr.verw. Gebiete, 50, 237-243.

[11] И.И. Гихман, А.В.Скороход, Теория случайных процессов, Том I, Изд. Наука, Москва, 1971.

[12] И.И. Гихман, А.В.Скороход, Теория случайных процессов, Том III, Изд. Наука, Москва, 1975.

[13] B.W.Gniedenko, A.N.Kołmogorow, Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych, PWN, Warszawa 1957.

[14] P.Hall, C.C.Heyde, Martingale Limit Theory and Its Application, Academic Press, New York, 1980.

[15] I.S.Helland /1980/, Central limit theorems for martingales with discrete and continuous time, ukaże się w Scand. J.Statist.

[16] И.А.Ибрагимов /1963/, Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин, Теория вероятн. и её прим., 8, 89-94.

[17] J.Jacod, A.Kłopotowski, J.Memin /1982/, Théreme de la limite centrale et convergence fonctionelle vers un processus á accroissements indépendants: la méthode des martingales, Ann.Inst.Henri Poincaré, XVIII, 1-45.

[18] P.Jagers /1974/, Aspects of random measures and point processes, Adv. in Probab., 3.

[19] A.Jakubowski /1980/, On limit theorems for sums of dependent Hilbert space valued random variables, Lecture Notes in Statist., 2, 178-187.

[20] I.Kabanov, R.Liptcer, A.Shiryaev /1980/, Some limit theorems for simple point processes /martingale approach/, Stochastics, 3, 203-216.

[21] O.Kallenberg, Random Measures, Akademie-Verlag, Berlin, 1975.

[22] A.Kłopotowski /1977/, Limit theorems for sums of dependent random vectors in R^d, Dissert. Math., CLI, 1-62.

[23] A.Kłopotowski /1980/, A remark on the conditioning in limit theorems for dependent random vectors in R^d, Banach Center Publications, Vol.6.: Mathematical Statistics, 175-177.

[24] P.Lévy /1935/, Properietes asymptotiques des sommes de variables aleatoires independantes ou enchainées, J.Math. Pures Appl., Ser.8, 14, 347-402.

[25] T.Lindvaal /1973/, Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D[0,\infty)$, J.Appl. Probab., 10, 109-121.

[26] Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев /1980/, Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов, Теория вероятн. и её прим., XXV, 683-703.

[27] D.L. McLeish /1974/, Dependent central limit theorems and invariance principles, Ann. Probab., 2, 620-628.

[28] J.Neveu, Discrete - Parameter Martingales, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[29] K.R.Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, 1967.

[30] Ю.В.Прохоров /1956/, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятн. и её прим., 1, 177-238.

[31] Ю.В.Прохоров /1961/, О случайных мерах на компактных пространствах, Док. Ак. наук СССР, 138, 53-55.

[32] H.Rootzen /1977/, On the functional central limit theorem for martingales, Z.Wahr. verw.Gebiete, 38, 199-210.

[33] J.Rosiński /1981/, The central limit theorems for dependent random vectors in Banach spaces, Inst.Matem. PAN, prepint nr 241.

[34] А.В. Скороход /1956/, Предельные теоремы для случайных процессов, Теория вероятн. и её прим., 1, 289-319.

[35] А.В. Скороход /1957/, Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями, Теория вероятн. и её прим., 2, 138-171.

[36] C.Stone /1963/, Weak convergence of stochastic processes defined on semi - infinite time intervals, Proc.Amer. Math. Soc., 14, 694-696.

[37] S.R.S. Varadhan /1962/, Limit theorems for sums of independent random variables with values in a Hilbert space, Sankhya, 24, 213-238.

[38] H.Walk /1977/, An invariance principle for the Robbins-Monro process in a Hilbert space, Z.Wahr. verw. Gebiete, 39, 135-150.

WYKAZ STOSOWANYCH SKRÓTÓW

CPG	- centralny problem graniczny
TG	- twierdzenie graniczne
CTG	- centralne twierdzenie graniczne
CTGM	- " " " dla martyngałów /dla tablic różnic martyngałowych/
FTG	- funkcjonalne twierdzenie graniczne
MTG	- martyngałowe " "
MTG/I/	- " " " dla składników warunkowo infinitezymalnych
CMTG	- centralne martyngałowe twierdzenie graniczne
FMTG	- funkcjonalne " " "
ZL	- Zasada P. Lévy'ego
FZL	- Funkcjonalna Zasada P. Lévy'ego
UZL	- Uogólniona " "
TRM	- tablica różnic martyngałowych
PoPN	- proces /procesy/ o przyrostach niezależnych.

OZNACZENIA NIEKTÓRYCH ZBIORÓW

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$	H - str. 11.	$\mathcal{M}_1^+(H)$ - str. 19.
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	$\mathcal{S}$ - str. 12.	$\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ - str. 62.
$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$	$\mathcal{M}(\mathcal{H})$ - str. 9.	$\mathcal{M}_1(\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}))$ - str. 67.
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}^1 ; x \geq 0\}$	$\mathcal{M}_1(\mathcal{H})$ - str. 10.	$\mathcal{M}_1^*(\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, H))$ - str. 67.
$\mathcal{H}$ - str. 9	σ_0-$\mathcal{M}(H)$ - str. 39.	σ_0-Cont$M$ - str. 39.

SPIS TREŚCI

Str.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr A. Jakubowskiego
p.t. "Twierdzenia graniczne dla sum zależnych zmiennych
losowych o wartościach w przestrzeni Hilberta".

Teoria twierdzeń granicznych dla zależnych zmiennych losowych to obecnie szeroki dział teorii prawdopodobieństwa. Zwłaszcza w ostatnich latach teoria ta nabrała impetu dzięki związkom z teorią semimartyngałów, z twierdzeniami granicznymi dla semimartyngałów. Twierdzeniami dla zależnych zmiennych losowyh zajmowali się wybitni probabiliści tacy jak Ibragimow, Varadahan, Grigelionis, Szirajew i Skorochod. Jak do tej pory twierdzenia te otrzymywano poprzez osłabianie założeń o niezależności zmiennych losowych i adaptowaniu , często bardzo pomysłowemu, odpowiedniego klasycznego dowodu. Pośród tych twierdzeń granicznych obszerną klasę stanowią twierdzenia w których niezależność zastępuje się założeniem, że pewne "warunkowe charakterystyki" są małe. Recenzowana rozprawa stanowi przełom w twierdzeniach granicznych takiego typu. Znaleziono w niej metodę redukcji,t.zn. otrzymywania, twierdzeń granicznych z " uwarunkowaniem" w założeniach do odpowiednich twierdzeń dla niezależnych zmiennych losowych. Metodę tą autor nazywa Zasadą Leviego. Jest ona głównym wynikiem rozprawy. Dowód Zasady Leviego składa się z dwu twierdzeń Twierdzenia 4.4 i Twierdzenia 5.1. Dowody tych twierdzeń są mocno nietrywialne, autor "po drodze" dowodzi interesujące same w sobie nierówności typu martyngałowego / Lemat 5.2/. O delikatności tych twierdzeń świadczy również to , że jak się wydaje twierdzenia te są słuszne tylko dla przestrzeni Hilberta, w każdym razie nie są prawdziwe w dowolnej przestrzeni Banacha, oraz to, że założenie $\hat{\mu} \neq 0$ na zbiorze gęstym jest istotne dla identyczności rozkładów granicznych w Twierdzeniu 5.1.. Dalsze rozdziały rozprawy stanowią ilustrację Zasady Leviego i pewnego jej uogólnienia. Tak więc otrzymuje się z niej dosyć łatwo wszystkie znane recenzentowi twierdzenia graniczne z "uwarunkowaniem" w założeniach a także autor wyprowadza istotnie nowe twierdzenia. Na uwagę zasługuje to, że również twierdzenie Ibragimowa,w którym uwarunkowania występują w niewielkim stopniu, twierdzenie o ciągach stacjonarnych uzyskuje się tą metodą. Ostatni rozdział poświęcony jest t.zw. funkcjonalnym twierdzeniom granicznym. Chodzi tu o twierdzenia graniczne dlaprocesów. Autor wykorzystuje swoją metodę do udowodnienia interesującego twierdzenia granicznego, w którym rozkładem granicznym jest proces o przyrostach niezależnych. Po drodze autor udowadnia istotne uogólnienie kryterium Aldousa na zbieżność według rozkładów ciągu procesów, oraz podaje kryterium proste i eleganckie na zbieżność według rozkładów ciągu procesów o przyrostach niezależnych. Twierdzenie graniczne to jest bliskie wynikom Lipcera, Szirajewa o zbieżności według rozkładów ciągu semimartyngałów do procesu o przyrostach niezależnych i wydaje się bardzo prawdopodobne że również tu można zastosować metodę autora. Świadczy to jeszcze raz o znacznej wartości metody autora.

Oprócz tego rozprawa zawiera kilka interesujących przykładów i kontrprzykładów a także uogólnienie Zasady Niezmienniczości na martyngały o wartościach w przestrzeni Hilberta.

Praca napisana jest w sposób bardzo staranny i przejrzysty. Recenzent znalazł tylko niewiele błędów typu korektorskiego. Autor wykazał się w rozprawie imponującą wiedzą w temacie i jego głębokim przemyśleniem, a także umiejętnością w posługiwaniu się zaawansowanymi metodami teorii prawdopodobieństwa. Rozprawa jest bardzo bogata w wyniki. Udowodniona przez autora Zasada Leviego stanie się w teorii twierdzeń granicznych dla zależnych zmiennych losowych podstawowym narzędziem. Czyni ona ~~x ąxj~~ tą teorię o wiele bardziej elegancką i znacznie ją upraszcza. Otwiera ona także nowe pole badań a zwłaszcza w zakresie funkcjonalnych twierdzeń granicznych.

Rozprawę uważam za wybitną i przeto wnoszę o dopuszczenie jej do publiczne obrony i o jej wyróżnienie.

Warszawa 16. XII. 1982

Doc. Stanisław Kwapień
INstytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
im. Bolesława Bieruta
WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I CHEMII
INSTYTUT MATEMATYCZNY
50-384 Wrocław, pl. Grunwaldzki 2/4
Kazimierz Urbanik

Wrocław, dnia 22 grudnia 1982

tel. centrala 286-51, 286-52
dyrektor 297-17

L. dz. ....

R E C E N Z J A

pracy doktorskiej mgra Adama Jakubowskiego pt. Twierdzenia graniczne dla sum zależnych zmiennych losowych o wartościach w przestrzeni Hilberta

Bez przesady można powiedzieć, że twierdzenia graniczne dla sum niezależnych zmiennych losowych stymulowały rózwój nowoczesnego rachunku prawdopodobieństwa. W latach trzydziestych bieżącego stulecia stosując metodę funkcji charakterystycznych stworzono solidną teorię rozkładów granicznych dla sum niezależnych zmiennych losowych o wartościach rzeczywistych .Od lat pięćdziesiątych obserwujemy rozszerzenie tej problematyki na przestrzenie euklidesowe,Hilberta ,Banacha i póżniej topologiczne lokalnie wypukłe.Równolegle powstaje nurt badań rozkładów granicznych na grupach topologicznych. W latach sześćdziesiątych rozpoczyna się praca eliminowania z tej problematyki założenia niezależności sumowanych zmiennych losowych i obecnie zagadnienie twierdzeń granicznych dla sum zależnych zmiennych losowych należy do żywo rozwijającego się działu teorii prawdopodobieństwa. Tu też zaliczyć należy recenzowaną pracę doktorską.

Punktem wyjścia rozważań mgra A.Jakubowskiego jest tablica zmiennych losowych przyjmujących wartości z ośrodkowej przestrzeni Hilberta i adaptowana do rodziny filtracji, z którą wiąże on ciąg momentów zatrzymania.Podstawowymi obiektami badań są : ciąg losowych sum wierszowych $S(\sigma_n)$ $(n \in N)$ $S(\sigma_n) = \sum_{1 \le k \le \sigma_n} X_{nk}$, gdzie σ_n jest n-tym momentem zatrzymania oraz oraz ciąg prognozowalnych charakterystyk $\mu(\sigma_n)$ $(n \in N)$ będących splotem $\mu_{n1} * \mu_{n2} * \ldots * \mu_{n\sigma_n}$ warunkowych rozkładów μ_{nk} zmiennej losowej X_{nk} względem σ- ciała $F_{n,k-1}$ z rodziny filtracyjnej. Zgrubsza mówiąc prognozowalne charakterystyki odpowiadają sytuacji losowej,w której spełniony jest warunek niezależności składników, a badanie związków między

WDN-Zam. 1271/74-5000

własnościami granicznymi $S(\sigma_n)$ a prognozowalnymi charakterystykami to owocna idea sprowadzania sytuacji, w której brak niezależności do sytuacji, w której już jest niezależność. Podstawową rolę odgrywa tu twierdzenia A głoszące, że ciasność ciągu $\mu(\sigma_n)$ implikuje ciasność ciągu rozkładów $S(\sigma_n)$. Dalej Autor formułuje twierdzenie B zwane przez niego uogólnioną zasadą P.Lévy'ego głoszące, że zbieżność $\mu(\sigma_n) \to \mu$ według prawdopodobieństwa pociąga dla każdego punktu skupienia ν ciągu rozkładów $S(\sigma_n)$, który w myśl twierdzenia A jest warunkowo zwarty, równość $\nu * \mu = \mu^2$. Przy dodatkowych założeniach o μ takich jak na przykład nie znikanie funkcji charakterystycznej $\hat{\mu}$ lub w przypadku rzeczywistym skoncentrowanie μ na półprostej dodatniej uzyskane równanie ma tylko jedno rozwiązanie na ν co daje daje zbieżność rozkładów $S(\sigma_n)$ do μ. W dalszej części pracy (rozdział II, § 9) Autor analizuje możliwość rozszerzenia twierdzenia B przez zastąpienie nielosowego rozkładu μ przez rozkład zrandomizowany a ewentualny rozkład graniczny $S(\sigma_n)$ przez $E\mu$ pokazując na przykładach, że wymaga to dodatkowych założeń o podstawowym systemie oraz formułując jedno z możliwych takich założeń, prowadzących do nowego twierdzenia granicznego. Rozdziały II i III pracy są poświęcone zastosowaniom uogólnionej zasady P.Lévy'ego. Autor uzyskuje tu interesujące martyngałowe twierdzenia graniczne oraz centralne twierdzenie graniczne dla tablic różnic martyngałowych. Autor otrzymuje również funkcjonalne analogony martyngałowych twierdzeń granicznych. Wymaga to pomysłowych ale naturalnych uogólnień wcześniej wprowadzonych pojęć i własności dla zmiennych losowych.

W konkluzji stwierdzam, że mgr Adam Jakubowski uzyskał istotny postęp w teorii rozkładów granicznych dla sum zależnych zmiennych losowych. Stworzył on bowiem metodę badawczą, która doprowadziła do nowych, mocnych rezultatów. Jestem przekonany, że metoda A.Jakubowskiego będzie rozwijana i wykorzystana w dalszych badaniach. Dlatego uważam, że praca doktorska mgra A.Jakubowskiego zasługuje na wyróżnienie Nagrodą Ministra Nauki, Szkolnictwa Wyższego i Techniki i stanowi bardzo dobrą podstawę dla dopuszczenia mgra A.Jakubowskiego do publicznej obrony.

K. Urbanik

Kazimierz Urbanik