

---

Olsztyn, Toruń. Wydawnictwo OWSliZ,

Wydanie Pierwsze, 2008

Wydanie Drugie, 2012

---

## Podróże po Imperium Liczb

# 02 Cyfry Liczb Naturalnych

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Wersja poprawiona i uzupełniona

7 grudnia 2011

<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>1 Wstępne informacje i ciekawostki o cyfrach</b>	<b>5</b>
1.1 Cyfry i kolejne liczby naturalne . . . . .	5
1.2 Zera i liczby bezzerowe . . . . .	7
1.3 Ostatnie cyfry . . . . .	9
1.4 Skreślanie cyfr . . . . .	10
1.5 Dopisywanie cyfr . . . . .	12
1.6 Występowanie wszystkich cyfr . . . . .	13
1.7 Cyfry i podzielność . . . . .	14
1.8 Cyfry w zapisie dwójkowym . . . . .	15
1.9 Sumy liczb $n$ -cyfrowych . . . . .	16
1.10 Różne zadania o cyfrach . . . . .	19
<b>2 Przystawianie cyfr</b>	<b>21</b>
2.1 Odwracanie porządku cyfr . . . . .	21
2.2 Liczby palindromiczne . . . . .	24
2.3 Liczby palindromiczne i ciągi arytmetyczne . . . . .	27
2.4 Liczby Lychrela . . . . .	31
2.5 Przystawianie pierwszej cyfry na koniec . . . . .	34
2.6 Przystawianie ostatniej cyfry na początek . . . . .	35
2.7 Przystawienia cykliczne i podzielność . . . . .	42
2.8 Permutacje cyfr . . . . .	43
<b>3 Suma cyfr</b>	<b>45</b>
3.1 Przykłady i własności . . . . .	45
3.2 Suma cyfr i liczby potęgowe . . . . .	47
3.3 Nierówności z sumą cyfr . . . . .	48
3.4 Ciąg $s(n)/s(kn)$ . . . . .	49
3.5 Wielokrotności dziewiątki . . . . .	51

3.6	Liczby postaci $s(an)$ . . . . .	54
3.7	Suma cyfr i podzielność . . . . .	54
3.8	Sumy cyfr i liczby przeniesień do "pamięci" w dodawaniu . . . . .	55
3.9	Sumy cyfr i kolejne liczby naturalne . . . . .	57
3.10	Suma cyfr i ciągi arytmetyczne . . . . .	58
3.11	Liczba liczb $k$ -cyfrowych o danej sumie cyfr . . . . .	59
3.12	Liczby postaci $n + s(n)$ . . . . .	61
3.13	Ciąg $n, s(n), ss(n), sss(n), \dots$ . . . . .	62
3.14	Zadania różne . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Arytmetyczne operacje na cyfrach</b>	<b>64</b>
4.1	Suma kwadratów cyfr . . . . .	64
4.2	Liczby szczęśliwe . . . . .	65
4.3	Suma sześciątów cyfr . . . . .	66
4.4	Suma bikwadratów cyfr . . . . .	67
4.5	Suma piątych potęg cyfr . . . . .	67
4.6	Sumy, cyfry i wielomiany . . . . .	68
4.7	Uogólnienia $f$ -ciągów; $w$ -ciągi . . . . .	72
4.8	Iloczyn cyfr . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Liczby Nivena</b>	<b>79</b>
5.1	Przykłady liczb Nivena . . . . .	79
5.2	Kolejne liczby naturalne i liczby Nivena . . . . .	80
5.3	Liczby Nivena specjalnego typu . . . . .	81
5.4	Liczby Nivena o danym ilorazie . . . . .	82
5.5	Literatura dodatkowa . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Początkowe cyfry</b>	<b>83</b>
6.1	Ogólne fakty o $(m,q)$ -liczbach . . . . .	83
6.2	Twierdzenia o granicach . . . . .	84
6.3	Początkowe cyfry ciągów wielomianowych . . . . .	87
6.4	Początkowe cyfry postępów arytmetycznych . . . . .	89
6.5	Początkowe cyfry liczb potęgowych . . . . .	90
6.6	Początkowe cyfry symboli Newtona . . . . .	92
6.7	Początkowe cyfry i różne ciągi . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Potęgi dwójki</b>	<b>96</b>
7.1	Wstępne informacje i ciekawostki . . . . .	97
7.2	Początkowe cyfry potęg dwójki . . . . .	98
7.3	Pierwsza cyfra potęg dwójki . . . . .	99
7.4	Ostatnie cyfry potęg dwójki . . . . .	101
7.5	Suma cyfr potęg dwójki . . . . .	104
7.6	Cyfry liczb podzielnych przez potęgę dwójki . . . . .	106
7.7	Wielomiany i potęgi dwójki . . . . .	107
7.8	Wielomiany i potęgi liczby pierwszej . . . . .	112
7.9	Różne zadania i fakty z potęgami dwójki . . . . .	114

<b>8</b>	<b>Potęgi trójki</b>	<b>117</b>
8.1	Fakty i ciekawostki . . . . .	117
8.2	Początkowe cyfry potęg trójki . . . . .	119
8.3	Końcowe cyfry potęg trójki . . . . .	120
8.4	Sumy cyfr potęg trójki . . . . .	121
8.5	Wielomiany i potęgi trójki . . . . .	122
<b>9</b>	<b>Potęgi piątki</b>	<b>123</b>
9.1	Potęgi piątki . . . . .	123
9.2	Liczba cyfr potęg piątki . . . . .	124
9.3	Potęgi piątki i ich wielokrotności bez danej cyfry . . . . .	124
9.4	Początkowe cyfry potęg piątki . . . . .	125
9.5	Końcowe cyfry i potęgi piątki . . . . .	127
9.6	Potęgi piątki i zera . . . . .	128
9.7	Wielomiany i potęgi piątki . . . . .	129
<b>10</b>	<b>Cyfry liczb potęgowych</b>	<b>130</b>
10.1	Potęgi szóstki . . . . .	130
10.2	Potęgi siódemki . . . . .	131
10.3	Potęgi jedenastki . . . . .	133
10.4	Różne potęgi . . . . .	134
10.5	Okresy ciągów ostatnich cyfr liczb potęgowych . . . . .	135
10.6	Ciąg $n^n$ . . . . .	136
	<b>Spis cytowanej literatury</b>	<b>138</b>
	<b>Skorowidz nazwisk</b>	<b>142</b>
	<b>Skorowidz</b>	<b>144</b>

---

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń  
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

---

## Skorowidz

- Andžāns A., 138  
Andreescu T., 138  
Andrica D., 138  
Arnold A., 101
- Babinskaja I.L., 138  
Bankow K.G., 87  
Bartczak G., 6, 20, 92  
Beardon A.F., 78  
Bednarek W., 138  
Bernik V.I., 138  
Berstein D.J., 118  
Best C., 81, 82  
Białoborski E., 42  
Bobiński Z., 138  
Boltianski W.G., 92, 101  
Bornsztein P., 51  
Braza P.A., 35  
Brousseau A., 34  
Browkin J., 24, 138  
Brown K., 26, 34, 62  
Bryński M., 138  
Bussman E., 78
- Chentzov N.N., 141  
Coogan D., 27  
Cooper C., 80, 82, 140  
Czakyrjan K., 138
- Dickson L.E., 138  
Djukić D., 138  
Doduniekow S., 138  
Dubner H., 27  
Dulnikowska M., 95  
Dynkin E.B., 138
- Erdős P., 118
- Fabrykowski J., 116  
Feng Z., 138  
Fiedorov R.M., 138  
Fomin D.W., 139
- Gabai H., 27  
Galpierin G.A., 139  
Genkin S.A., 139  
Goodman T.A., 81, 82  
Goodstein E., 47  
Graham R.L., 139  
Grigorjan A.A., 140
- Guttman S., 43  
Guy R.K., 139  
Guzicki W., 116
- Harborth H., 27  
Hardy G.H., 87, 139  
Hurewicz H.A., 20
- Ingleby C.M., 62  
Iseki, 65  
Itenberg I.W., 139
- Jadrenko M.I., 141  
Janković V., 138  
Jaszczenko I.W., 138  
Jeśmanowicz L., 139  
Jędrzejewicz P., 139  
Jegorow A.A., 141  
Jeleński S., 43, 139
- Kanel-Bielov A.J., 138  
Kaplansky I., 114  
Kartaszow I.W., 141  
Kennedy R.E., 80–82, 140  
Kitlińska A., 82  
Knuth D.E., 139  
Koninck De J.-M., 139  
Konjagin S.W., 140  
Kowaldży A.K., 138  
Kronecker L., 85  
Kuczma M., 115  
Kumar H., 65  
Kurlandczyk L., 139  
Kwiatkowski Józef, 65
- Lada A., 20  
Ling Lee W., 116  
Łoś J., 139
- Marzantowicz W., 139  
Matić I., 138  
McLean K.R., 78  
Mercier A., 139  
Michailowskij W.I., 141  
Molczanow S.A., 138  
Mohanty S.P., 65  
Morozowa E.A., 140  
Mostowski A., 140
- Nikołajew E.H., 20

- Niven I., 79  
Nodzyński P., 138  
Nowicki A., 27, 65, 92, 140
- Ondrejka R., 27
- Parameswaran S., 10  
Patashnik O., 139  
Pawłowski H., 140  
Petrović N., 138  
Pióro K., 87  
Pietrakow I.S., 140  
Pompe W., 84, 86, 87, 94, 99, 126  
Porges A., 140
- Rabczuk R., 27  
Rempała J., 138  
Rokowska B., 23, 24  
Ross K.A., 92, 101  
Rozental A.L., 138
- Saadatmanesh M., 140  
Sadowniczij W.A., 140  
Santos D.A., 141  
Schinzel A., 24  
Shah Ali H.A., 78  
Shklarsky D.O., 141  
Sierpiński W., 8, 140, 141  
Skurnick R., 62  
Stark M., 140  
Steinhaus H., 64, 141  
Stewart B.M., 65  
Straszewicz S., 138, 141  
Strzelecki P., 116  
Szterenberg M., 10  
Szurek M., 65, 141  
Szyrkarczyk A., 116
- Tao T., 141  
Tolpygo A.K., 138, 139  
Tong J., 35  
Trigg Ch.W., 34  
Trost E., 141
- Uscki M., 138
- Wachulka A., 16  
Wasilev N.B., 141  
Whitney R.E., 95  
Wilson B., 80, 82  
Wright E.M., 87, 139  
Wyszenskij W.A., 141
- Yaglom I.M., 141

## Skorowidz

bezwzględna wartość, 86, 120  
bikwadrat, 15, 67, 71

### ciąg

arytmetyczny, 8, 9, 13, 27, 29, 58, 89  
Fibonacciego, 63, 94, 95  
 $n^n$ , 136, 137  
niemalejący, 19  
nieograniczony, 49, 51  
nieskończony, 8, 9, 14, 58, 73, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 94, 120  
ograniczony, 76  
okresowy, 10, 22, 23, 74, 101–104, 120, 121, 127, 130, 132, 135–137  
rekurencyjny, 9, 10, 12, 19, 23, 52, 63, 76, 77, 112  
reszt, 101, 136, 137  
rosnący, 63  
skończony, 13, 74, 98, 118, 119, 125, 126, 131  
ciało, 108  
cyfrowy pierwiastek, 78  
część całkowita, 2, 6, 45, 55, 93, 97, 99, 124, 126, 128  
część ułamkowa, 55, 85, 91  
czwórka liczb naturalnych, 65

f-ciąg, 68–73

f-liczba, 71

### funkcja

$\varphi$ , 2, 9, 28, 30, 51, 101, 102  
bijekcja, 60  
logarytmiczna, 84, 86  
z  $\mathbb{N}$  do  $\mathbb{N}$ , 63, 72  
z  $\mathbb{N}$  do  $\mathbb{N}_0$ , 10

granica ciągu, 15, 48, 76, 77, 84–87, 91, 92, 94, 99, 100, 105, 120, 125, 131, 134

happy number, 65

hipoteza, 118

iloczyn, 6, 114

cyfr, 75

iloraz, 82

IMO, 1, 19, 37, 47, 75

Longlist, 21, 65, 121

Shortlist, 15, 42, 55, 58, 81, 94, 128

indukcja matematyczna, 16, 53, 102, 106

kolejne liczby naturalne, 5–7, 57, 58, 61, 65, 80, 137

kongruencja, 9, 12, 15, 21, 28, 30, 54–56, 62, 80, 101–104, 106, 114

### liczba

$\pi$ , 30  
 $\underline{n}$ , 35–42  
 $\widehat{n}$ , 34, 42  
 $n'$ , 21–24, 31–33  
 $n^{[s]}$ , 35, 36  
 $n_1$ , 10, 11  
 $n_2$ , 11  
 $n_3$ , 11  
 $n_o$ , 11  
bezogromowa, 7, 8, 13, 17, 67, 81, 106, 128  
brazylijska, 19  
Fibonacciego, 3, 63, 73, 81, 94, 95  
Harshada, 79  
jedynkowa  $e_n$ , 5, 7, 14, 16, 26, 27, 47, 55, 97  
kolistą, 42  
kwadratowa, 23, 62–65, 81, 88  
Lychrela, 31, 32  
Mersenne'a, 81  
naprzemienna, 19  
nieparzysta, 13, 14, 17, 22, 47, 48, 58, 65, 101, 106, 114, 120, 124, 134, 137  
niewymierna, 85–87, 90, 92, 94, 95, 98, 119, 125, 126, 131  
Nivena, 79  
palindromiczna, 24–34  
parzysta, 12, 14, 16, 18, 19, 22, 46, 48, 54, 63, 65, 103, 106, 120, 127, 137  
pierwsza, 8, 9, 14, 26, 46, 83, 94, 97, 112, 118, 135, 136  
postaci  $n + s(n)$ , 61  
SP, 78  
specjalna, 12  
szczęśliwa, 65  
tetraedralna, 60, 73, 89  
trójkątna, 60, 73, 81, 88  
wielokątna, 89  
wymierna, 37, 38  
złożona, 46, 137  
zero-jedynkowa, 7, 8, 14, 15, 18  
logarytm, 84, 86, 87, 90–92, 94, 95, 98–100, 104, 119, 120, 125, 126, 131, 134  
lustrzane odbicie, 21–27, 31–33, 97, 118  
m-liczba, 83  
macierz, 109, 111, 114

- Maple, 1, 24, 26, 29, 33, 36–41, 47, 60, 61, 65–67, 69–75, 77, 79–82, 97–101, 104, 105, 117–121, 124–128, 130–135
- max, 10, 30
- min, 114
- nierówność, 36, 46, 48, 49, 75, 76, 78, 93, 104, 105, 115, 120, 121, 137
- nwd, 2, 9, 28
- nww, 2
- okres
- ciągu, 22, 23, 69–71, 74, 75, 101, 102, 104, 120, 121, 127, 130, 132, 135–137
  - rozwinęcia dziesiętnego, 34, 36–38
- Olimpiada Matematyczna
- Anglia, 46
  - Armenia, 51
  - Australia, 6
  - Austria, 23, 47, 75
  - Brazylia, 14, 26
  - Bułgaria, 16
  - Chorwacja, 9
  - Czechosłowacja, 133
  - Czechy-Polska-Słowacja, 77
  - Czechy-Słowacja, 53
  - Holandia, 101
  - Indie, 80, 115
  - Iran, 111
  - Irlandia, 48, 78, 112
  - Japonia, 135
  - Kanada, 47, 52, 134
  - Kazachstan, 118
  - Leningrad, 7, 8, 46, 58
  - Litwa, 9
  - Mołdawia, 74
  - Moskwa, 31, 43, 57, 61, 114, 127
  - Niemcy, 15, 94
  - Nordic, 101
  - Polska, 26, 42, 53, 61, 63, 114
  - Rosja, 46–48, 54, 57, 80, 100, 120, 121
  - RPA, 34, 43
  - Rumunia, 61
  - Słowenia, 82
  - Singapur, 134
  - St Petersburg, 7, 10, 21, 31, 44, 49, 58, 62, 63, 80, 103, 128
  - Szwecja, 23, 47
  - Tajwan, 129
  - Ukraina, 58
  - USA, 124
  - W. Brytania, 16, 67
  - Węgry, 111
  - ZSRR, 46, 58, 63, 76, 106, 128
- ostatnie cyfry, 9, 10, 101, 120, 127, 130, 132–137
- otwarty problem, 32
- para liczb naturalnych, 13, 16, 26, 42, 65, 66, 103, 106
- permutacje cyfr, 43, 44, 46, 66, 67, 97
- początkowe cyfry, 8, 83, 98, 99, 119, 125, 131, 137
- podzbiór, 16, 17, 115
- podzielność, 7, 9–15, 19, 21, 22, 30, 42–44, 54–58, 78, 79, 101, 106, 114, 118, 124, 128, 129, 133, 135, 137
- przez 3, 8, 55, 67, 137
  - przez 5, 9, 48, 57, 134
  - przez 7, 42, 43, 57
  - przez 8, 49
  - przez 9, 21, 43, 44, 51, 54, 55, 62, 104, 121
  - przez 10, 11, 27, 29, 43, 51, 58, 88, 135
  - przez 11, 12, 14, 21, 22, 25, 46, 58
  - przez 13, 58
  - przez 16, 101
  - przez 17, 43
  - przez 19, 115
  - przez 27, 43, 44
  - przez 37, 42
  - przez 41, 42, 49
- potęga
- dwójki, 3, 6, 27, 28, 47, 81, 90, 91, 96, 101–103, 118, 126, 134
  - dziewiątki, 120, 121
  - jedenastki, 133
  - liczby pierwszej, 9, 112
  - ósemki, 62
  - piątki, 27, 28, 47, 81, 90, 91, 102, 103, 123, 126, 134
  - siódemki, 90, 131
  - szóstki, 130
  - trójki, 62, 81, 90, 91, 117
- prawdopodobieństwo, 91
- przenoszenie do pamięci, 3, 55–57
- pytanie, 7, 9, 12, 26, 32, 34, 54, 57, 62, 77, 81, 83, 88, 92, 97, 118, 124, 130, 131, 133
- ranga liczby naturalnej, 31
- reszta z dzielenia, 7, 9, 43, 101, 106, 114, 136
- równanie diofantyczne, 21, 35–42, 61
- różnica, 9, 25, 26, 44, 58, 102
- rozwinęcie dziesiętne, 19, 34, 36–38, 43, 86–88, 90, 97, 115, 118, 128, 130, 132, 133
- rząd liczby, 102

- silnia, 15, 75, 81, 83, 93, 94, 109, 110, 112, 114, 122, 129, 132
- suma, 15, 20, 43, 44, 63, 67, 74, 79, 115, 118, 137  
 bikwadratów, 67  
 cyfr, 21, 45–49, 51–58, 61–63, 79–82, 104, 105, 121, 124  
 kwadratów, 64, 65  
 liczb  $n$ -cyfrowych, 16–18  
 liczb palindromicznych, 26  
 reszt, 114  
 sześciątów, 66, 67  
 szeregu, 26, 124
- symbol Newtona, 19, 60, 92–94, 109, 110, 112, 122, 129, 132
- system numeracji  
 dowolny, 9, 17–19, 23, 26, 56, 57, 62, 64, 69, 76, 83, 84, 86–91, 94, 98, 119, 126, 131  
 dwójkowy, 15, 16, 53, 92  
 piątkowy, 129  
 siódmkowy, 69, 97  
 trójkowy, 13, 67, 69
- sześcian, 66, 67, 81, 88, 137
- szereg, 26, 124
- trójka liczb naturalnych, 65, 66
- twierdzenie  
 Dirichleta, 8, 46  
 Eulera, 7, 28, 30, 51, 102, 111, 113  
 Kroneckera, 85  
 Lagrange'a, 108, 109  
 o trzech ciągach, 100
- układ równań, 107, 109
- w-ciąg, 72–75
- warunki równoważne, 9, 19, 57, 78, 83, 84, 114
- wielomian, 63, 68, 87, 94, 108–113, 122, 129, 132, 133
- wielomianowy ciąg rekurencyjny, 112
- współczynnik wiodący, 109, 110, 112, 122, 129, 132
- wykładnik liczby, 102
- wyznacznik Vandermonde'a, 107, 109
- wzór interpolacyjny Lagrange'a, 108
- zasada szufladkowa Dirichleta, 7
- zbiór  
 $\mathbb{N}_0$ , 1, 10, 118  
 gęsty, 85  
 liczb całkowitych, 1, 22  
 liczb naturalnych, 1, 10, 15–17, 60, 63, 68, 72, 82  
 liczb pierwszych, 1
- liczb rzeczywistych, 1, 84
- liczb wymiernych, 1, 87, 94
- liczb zespolonych, 1
- nieskończony, 9, 15, 28, 29, 35, 36, 54, 61, 63, 75, 81, 84, 86, 88, 89, 94, 97, 103, 105, 117, 118, 121, 128, 137
- pusty, 82, 118
- skończony, 69, 74, 78, 82