Podróże po Imperium Liczb

Część 02. Cyfry Liczb Naturalnych

Rozdział 3

3. Suma cyfr

Andrzej Nowicki 7 grudnia 2011, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

3 Suma cyfr

Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez $s(n)$ oznaczamy sumę jej cyfr. Przykłady:

$$s(1234) = 10, \quad s(25571) = 20, \quad s(20082009) = 21.$$

3.1 Przykłady i własności

3.1.1. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$s(n) = n - 9\Big(\left[\tfrac{n}{10^1}\right] + \left[\tfrac{n}{10^2}\right] + \left[\tfrac{n}{10^3}\right] + \cdots \Big).$$

([Miss] z.23).

D. Niech $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0$, gdzie $a_0, \ldots, a_m$ są cyframi. Wtedy:

$$\begin{aligned}
\left[\tfrac{n}{10^1}\right] &= a_m 10^{m-1} + a_{m-1}10^{m-2} + \cdots + a_3 10^2 + a_2 10^1 + a_1, \\
\left[\tfrac{n}{10^2}\right] &= a_m 10^{m-2} + a_{m-1}10^{m-3} + \cdots + a_3 10^1 + a_2, \\
&\ \vdots \\
\left[\tfrac{n}{10^m}\right] &= a_m.
\end{aligned}$$

Dodajemy te równości stronami i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i\geqslant 1} \left[\tfrac{n}{10^i}\right] &= a_m \left(10^{m-1} + 10^{m-2} + \cdots + 1\right) + a_{m-1}\left(10^{m-2} + \cdots + 1\right) + \cdots + a_2(10^1 + 1) + a_1 \\
&= a_m \tfrac{10^m - 1}{10-1} + a_{m-1}\tfrac{10^{m-1}-1}{10-1} + \cdots + a_2 \tfrac{10^2-1}{10-1} + a_1 \tfrac{10^1 - 1}{10-1} \\
&= \tfrac{1}{9}\Big(\left(a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0\right) - \left(a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0\right)\Big) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(n - s(n)\right).
\end{aligned}$$

Zatem $n - s(n) = 9\sum_{i\geqslant 1}\left[\frac{n}{10^i}\right]$ i stąd otrzymujemy tezę. ⊠

3.1.2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10^n - 1} s(k) = 45n10^{n-1}$. ([AuP] 2005, [SPom] 55 s.140).

3.1.3. *Niech $a = 9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \cdots \cdot \underbrace{99\ldots9}_{2^{2002}}$. Liczba a ma $2^{2003} - 1$ cyfr oraz $s(a) = 9 \cdot 2^{2002}$.*

([Kw] 2/2003 s.54, 63).

3.1.4. *Niech $a = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{99}$. Wtedy $s(a) = 99$.* ([Uiuc] 2003).

3.1.5. *Liczba b powstała z liczby naturalnej a przez permutację cyfr. Wykazać, że:*

(1) $s(2a) = s(2b)$,

(2) $s(a/2) = s(b/2)$ (*gdy liczby a, b są parzyste*),

(3) $s(5a) = s(5b)$. ([TTss] 1983, [Kw] 11/1983 39).

3.1.6. *Niech a będzie liczbą naturalną i niech $s(a) = n$. Istnieje wtedy liczba naturalna b taka, że $a < b < 10a$ oraz $s(b) = n + 5$.* ([OM] Rosja 1997/1998).

D. Niech p będzie ostatnią cyfrą liczby a. Jeśli $p < 5$, to liczba $b = a + 5$ spełnia tezę. Jeśli $p \geqslant 5$, to liczba $b = 10a - 4$ spełnia tezę. ⊠

3.1.7. *Niech $a < b$ będą liczbami naturalnymi takimi, że $s(b) = 100 + s(a)$. Istnieje wtedy liczba naturalna c taka, że $a < c < b$ oraz $s(c) = 43 + s(a)$.* ([OM] Rosja 1997/1998).

3.1.8. *Opisać wszystkie liczby naturalne n takie, że $s(2n) = 2s(n)$.*

3.1.9. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba pierwsza p taka, że $s(p) > n$.* ([S64] 99).

W. Wykorzystać twierdzenie Dirichleta o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym. ⊠

3.1.10. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba złożona m, która jest względnie pierwsza z 10 i spełnia równość $s(m) = n$.* ([OM] ZSRR 1979).

3.1.11. *Nie istnieje 19 parami różnych liczb naturalnych posiadających tę samą sumę cyfr, których suma jest równa 1999.* ([OM] Rosja 1999).

3.1.12. *Najmniejszą liczbą naturalną n taką, że $sss(n) = 10$ jest $n = 1\underbrace{99\dots9}_{22}$.* ([Jedr] B.59).

3.1.13. *Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $11 \mid n$ oraz $s(n) = 13$.* Odp. $n = 319$. ([OM] Leningrad 1991).

3.1.14. *Niech $a_n = 3n^2 + n + 1$.*

(1) *Znaleźć najmniejszą liczbę postaci $s(a_n)$.* Odp. $s(a_8) = s(201) = 3$.

(2) *Znaleźć n takie, że $s(a_n) = 1999$.* Odp. $n = 10^{222} - 1$. ([OM] Anglia 1999).

3.1.15. *Jeśli n jest dwucyfrową liczbą naturalną, to $s(109 - n) = 19 - s(n)$.*

D. Niech $n = 10a+b$, $1 \leqslant a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$. Wtedy $109-n = 109-(10a+b) = 10(10-a)+(9-b)$ oraz $1 \leqslant 10 - a \leqslant 9$, $0 \leqslant 9 - b \leqslant 9$. Liczba $109 - n$ jest dwucyfrowa. Mamy więc: $s(109 - n) = (10 - a) + (9 - b) = 19 - (a + b) = 19 - s(n)$. ⊠

3.1.16. *Jeśli n jest trzycyfrową liczbą naturalną, to $s(1099 - n) = 28 - s(n)$.*

Powyższe fakty są szczególnymi przypadkami następującego stwierdzenia.

3.1.17. *Jeśli n jest k-cyfrową liczbą naturalną, gdzie $k \geqslant 2$, to*

$$s\Big((10^k + 10^{k-1} - 1) - n\Big) = (9k+1) - s(n).$$

D. Niech n będzie k-cyfrową liczbą naturalną. Liczba ta jest postaci

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + a_{k-1}10^{k-1},$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_{k-2} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a_{k-1} \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Zachodzi równość

$$\big(10^k + 10^{k-1} - 1\big) - n = (9 - a_0) + 10^1(9 - a_1) + \cdots + 10^{k-2}(9 - a_{k-2}) + 10^{k-1}(10 - a_{k-1}),$$

z której wynika, że $s\left((10^k + 10^{k-1} - 1) - n\right) = (10 - a_{k-1}) + (9 - a_{k-2}) + \cdots + (9 - a_1) + (9 - a_0) = (9k+1) - (a_{k_1} + a_{k-2} + \cdots + a_0) = (9k+1) - s(n)$. ⊠

3.1.18. *Niech $n > 1$, $n \neq 10$. Istnieje dokładnie jedna liczba naturalna a taka, że*

$$s(k) + s(a - k) = n$$

dla wszystkich $1 \leqslant k < a$. ([OM] Szwecja 1997).

D. Niech $n = 9q + r$, gdzie $q \geqslant 0$ i $0 \leqslant r < 9$. Wtedy liczba $a = r99\ldots9$ (q dziewiątek) ma żądaną własność. ⊠

★ E. Goodstein, *On sums of digits*, [MG] 25(265)(1941) 156-159.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.2 Suma cyfr i liczby potęgowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.2.1. *Niech $a = 4444^{4444}$. Znaleźć $sss(a)$.* Odp. 7. ([IMO] 1975, [Br83] 2).

3.2.2. *Oznaczmy: $a_n = n \cdot 1111$, $b_n = a_n^{a_n}$, $c_n = sss(b_n)$. Mamy wtedy: $c_1 = 4$, $c_2 = 10$, $c_3 = 9$, $c_4 = 7$, $c_5 = 5$, $c_6 = 9$, $c_7 = 10$, $c_8 = 7$, $c_9 = 9$.* (Maple).

3.2.3. *Niech $a = 11111^{11111}$. Wtedy $sss(a) = 2$.* (Maple).

3.2.4. *Niech $a = 1989^{1989}$. Znaleźć $sssss(a)$.* Odp. 9. ([OM] Kanada 1989, [Crux] 1989 s.198).

3.2.5. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, liczba $s(4^n) + s(25^n)$ jest nieparzysta.* ([OM] Austria 1999).

3.2.6. *Jeśli $s(5^n) = 2^n$, to $n = 3$.* ([OM] Rosja 1992, [Pa97]).

3.2.7. $s(54^6) = 54$, $s(54^8) = 54$, $s(54^9) = 54$, $s(54^7) \neq 54$, $s(53^7) = 53$. ([Dlt] 6/1980, [Szu87] 60).

3.2.8. $s(37^n) \neq 37$ *dla $n \in \mathbb{N}$.* ([Szu87] 61).

3.2.9. $s(37^{12}) = 73$. ([Szu87] 61).

3.2.10. *Jeżeli a jest liczbą naturalną parzystą niepodzielną przez* 5, *to* $\lim s(a^n) = \infty$.
([Mat] 4/1964 191, [S64] s.160, [Br80] 33, [B-rs] 238).

3.2.11. *Jeżeli b jest liczbą naturalną nieparzystą podzielną przez* 5, *to* $\lim s(b^n) = \infty$.
([Br80] 34).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.3 Nierówności z sumą cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.3.1. *Dla dowolnych liczb naturalnych n, m zachodzi nierówność*

$$s(n+m) \leqslant s(n) + s(m).$$

([Kw] 5/1972 31, [GaT] s.236, [ME] 7(4)(2002) z.157).

D. Korzystamy z równości podanej w 3.1.1:

$$\begin{aligned} s(n)+s(m)-s(n+m) &= n - 9\sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{n}{10^i}\right] + m - 9\sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{m}{10^i}\right] - (n+m) + 9\sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{n+m}{10^i}\right] \\ &= 9\Big(\sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{n+m}{10^i}\right] - \sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{n}{10^i}\right] - \sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{m}{10^i}\right]\Big) \\ &= 9\sum_{i\geqslant 1}\Big(\left[\tfrac{n}{10^i} + \tfrac{m}{10^i}\right] - \left[\tfrac{n}{10^i}\right] - \left[\tfrac{m}{10^i}\right]\Big). \end{aligned}$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi oczywista nierówność $[x+y] \geqslant [x] + [y]$. Każda więc liczba $\left[\frac{n}{10^i} + \frac{m}{10^i}\right] - \left[\frac{n}{10^i}\right] - \left[\frac{m}{10^i}\right]$ jest nieujemna. Zatem $s(n)+s(m)-s(n+m) \geqslant 0$. ⊠

3.3.2. *Dla dowolnych liczb naturalnych n, m zachodzi nierówność*

$$s(nm) \leqslant s(n)s(m).$$

([Kw] 5/1972 31, [GaT] s.236).

D. Sprawdzamy najpierw, że jeśli a, b są cyframi, to $s(ab) \leqslant ab$. Następnie, wykorzystując nierówność 3.3.1 oraz fakt, że $s(10^k n) = s(n)$ dla $k, n \in \mathbb{N}$, wykazujemy to jak następuje. Niech $n = \sum a_i 10^i$, $m = \sum b_j 10^j$, gdzie a_i, b_j są cyframi. Wtedy $nm = \left(\sum a_i 10^i\right)\left(\sum b_j 10^j\right) = \sum\sum a_i b_j 10^{i+j}$ i na mocy 3.3.1 otrzymujemy:

$$s(nm) \leqslant \sum\sum s(a_i b_j 10^{i+j}) = \sum\sum s(a_i b_j) \leqslant \sum\sum a_i b_j = \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right) = s(n)s(m),$$

czyli $s(nm) \leqslant s(n)s(m)$. ⊠

3.3.3. $s(n^2) \leqslant s(n)^2$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([OM] Rosja 1996, wynika z 3.3.2).

3.3.4. *Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności*

$$s(2n) \leqslant 2s(n) \leqslant 10s(2n).$$

([OM] Irlandia 1996).

D. Wykorzystujemy poprzednie nierówności. Z 3.3.1 mamy: $s(2n) = s(n+n) \leqslant s(n) + s(n) = 2s(n)$. Natomiast z 3.3.2: $2s(n) = 2s(10n) = 2s(5\cdot 2n) \leqslant 2s(5)s(2n) = 10s(2n)$. ⊠

3.3.5. $s(11n+7) \neq s(2n+5)$. ([Andz] 256).

3.3.6. $s(n(n-1)) \neq s((n+1)^2)$. ([OM] St Petersburg 1992, [Fom] 3/92).

3.3.7. $s(1981^n) \geqslant 19$. ([Kw] 12/1981 26).

3.3.8. *Jeśli* $41 \mid n$, *to* $s(n) \geqslant 5$. ([Miss] 1994(3) z.74).

3.3.9. *Jeśli n jest 6-cyfrową liczbą podzielną przez 8, to* $s(n) \leqslant 51$. ([Ko02]).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.4 Ciąg s(n)/s(kn)

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.4.1. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzą następujące nierówności.*

(1) $\frac{s(n)}{s(2n)} \leqslant 5$, ([AnAF] 83).

(2) $\frac{s(n)}{s(4n)} \leqslant 7$, ([M-sj] 553).

(3) $\frac{s(n)}{s(5n)} \leqslant 2$.

(4) $\frac{s(n)}{s(8n)} \leqslant 8$, ([Kw] 5/1972 31, [GaT] 23/71, [Dlt] 11/1984 4).

(5) $\frac{s(n)}{s(16n)} \leqslant 13$.

(6) $\frac{s(n)}{s(25n)} \leqslant 4$.

(7) $\frac{s(n)}{s(5^5n)} \leqslant 5$, ([Kw] 5/1972 31, [GaT] 35/71).

D. Wykorzystujemy równość $s(10^m n) = s(n)$ i nierówność 3.3.2.

(1) $s(n) = s(10n) = s(5 \cdot 2n) \leqslant s(5)s(2n) = 5s(2n)$.

(2) $s(n) = s(100n) = s(25 \cdot 4n) \leqslant s(25)s(4n) = 7s(2n)$.

(3) $s(n) = s(10n) = s(2 \cdot 5n) \leqslant s(2)s(5n) = 2s(5n)$.

(4) $s(n) = s(1000n) = s(125 \cdot 8n) \leqslant s(125)s(8n) = 8s(8n)$.

(5) $s(n) = s(10000n) = s(625 \cdot 16n) \leqslant s(625)s(16n) = 13s(16n)$.

(6) $s(n) = s(100n) = s(4 \cdot 25n) \leqslant s(4)s(25n) = 4s(25n)$.

(7) $s(n) = s(10^5n) = s(2^5 \cdot 5^5n) \leqslant s(32)s(5^5n) = 5s(5^5n)$. ⊠

3.4.2. *Ciąg* $\left(\frac{s(n)}{s(3n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest nieograniczony.* ([AnAF] 83).

D. ([AnAF] 132). Rozpatrzmy liczby

$$a_n = \underbrace{33\ldots3}_{n}4, \quad b_n = 1\underbrace{00\cdots0}_{n}2$$

i zauważmy, że $b_n = 3a_n$. Ponieważ $s(a_n) = 3n+4$, $s(b_n) = 3$, więc $\frac{s(a_n)}{s(3a_n)} = \frac{s(a_n)}{s(b_n)} = \frac{3n+4}{3} = n + \frac{4}{3}$. ⊠

3.4.3. *Następujące ciągi:* $\left(\frac{s(n)}{s(6n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{s(n)}{s(7n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{s(n)}{s(11n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *są nieograniczone*

D. Wynika to odpowiednio z równości: $166\dots667\cdot 6 = 100\dots002$, $142857\dots142857\,143\cdot 7 = 100\dots001$, $9090\dots906091\cdot 11 = 100\dots001$. ⊠

Przypomnijmy, że $s(2n) \leqslant 2s(n) \leqslant 10s(2n)$ (patrz 3.3.4). Jest ponadto oczywiste, że

$$s(n) = s(10n).$$

Mamy zatem następujące nierówności zachodzące dla każdej liczby naturalnej n.

3.4.4. $\frac{1}{2} \leqslant \frac{s(n)}{s(2n)} \leqslant 5,\ \ \frac{1}{5} \leqslant \frac{s(2n)}{s(n)} \leqslant 2.$

3.4.5. $\frac{1}{5} \leqslant \frac{s(n)}{s(5n)} \leqslant 2,\ \ \frac{1}{2} \leqslant \frac{s(5n)}{s(n)} \leqslant 5.$

Oznaczmy przez B zbiór tych wszystkich liczb naturalnych k, dla których ciąg

$$\left(\frac{s(n)}{s(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

jest ograniczony. Oczywiście $1 \in B$. Z powyższych faktów wynika, że liczby $2, 4, 5, 8, 16, 25$ i 5^5 należą do zbioru B. Natomiast liczby $3, 6, 7, 11$ do niego nie należą. Podamy dokładny opis wszystkich liczb należących do B. W tym celu udowodnimy najpierw dwa lematy.

3.4.6. $k \in B \iff 2k \in B.$

D. Z nierówności podanych w 3.4.4 wynika, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k mamy:

$$\frac{s(n)}{s(kn)} = \frac{s(2(kn))}{s(kn)}\cdot\frac{s(n)}{s((2k)n)} \leqslant 2\frac{s(n)}{s((2k)n)},\qquad \frac{s(n)}{s((2k)n)} = \frac{s(kn)}{s((2k)n)}\cdot\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant 5\frac{s(n)}{s(kn)}.$$

Niech $k \in B$. Istnieje wtedy liczba $u > 0$ taka, że $\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant u$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{s(n)}{s((2k)n)} \leqslant 5u$; zatem $2k \in B$. Jeśli natomiast $2k \in B$ oraz $\frac{s(n)}{s((2k)n)} \leqslant v$ dla $v > 0$, $n \in \mathbb{N}$, to $\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant 2v$, więc $k \in B$. ⊠

3.4.7. $k \in B \iff 5k \in B.$

D. Z nierówności podanych w 3.4.5 wynika, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k mamy:

$$\frac{s(n)}{s(kn)} = \frac{s(5(kn))}{s(kn)}\cdot\frac{s(n)}{s((5k)n)} \leqslant 5\frac{s(n)}{s((5k)n)},\qquad \frac{s(n)}{s((5k)n)} = \frac{s(kn)}{s(5(kn))}\cdot\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant 2\frac{s(n)}{s(kn)}.$$

Niech $k \in B$. Istnieje wtedy liczba $u > 0$ taka, że $\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant u$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{s(n)}{s((5k)n)} \leqslant 2u$; zatem $5k \in B$. Jeśli natomiast $5k \in B$ oraz $\frac{s(n)}{s((5k)n)} \leqslant v$ dla $v > 0$, $n \in \mathbb{N}$, to $\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant 5v$, więc $k \in B$. ⊠

Z tych dwóch lematów wynika następujące stwierdzenie.

3.4.8. *Niech $k = 2^\alpha 5^\beta a$, gdzie $a \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. Wtedy:*

$$k \in B \iff a \in B.$$

W szczególności, każda liczba naturalna postaci $2^\alpha 5^\beta$ należy do zbioru B.

Teraz możemy udowodnić następujące główne twierdzenie tego podrozdziału.

3.4.9. *Dla danej liczby naturalnej k następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Ciąg* $\left(\frac{s(n)}{s(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ograniczony.*

(2) *Liczba k jest postaci* $2^{\alpha}5^{\beta}$, *gdzie* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. ([OM] Rosja 1999).

D. (P. Bornsztein, [Crux] 2004 s.32-33). Implikację (2) $\Rightarrow$ (1) już wykazaliśmy (patrz 3.4.8). Wystarczy zatem udowodnić, że jeśli $\text{nwd}(k, 10) = 1$ i $k \geqslant 2$, to ciąg $\left(\frac{s(n)}{s(kn)}\right)$ jest nieograniczony. Załóżmy więc, że $k \geqslant 2$ i $\text{nwd}(k, 10) = 1$.

Oznaczmy przez a liczbę $\frac{10^{\varphi(k)}-1}{k}$. Z twierdzenia Eulera wiemy, że $10^{\varphi(k)} \equiv 1 \,(\text{mod}\ k)$. Zatem a jest liczbą naturalną. Ponadto, $a + 1 < 10^{\varphi(k)}$. Liczba $a + 1$ ma więc co najwyżej $\varphi(k)$ cyfr.

Niech q będzie dowolną liczbą naturalną taką, że $10^{q\varphi(k)} > k - 1$. Oczywiście $10^{q\varphi(k)} \equiv 1 \,(\text{mod}\ k)$. Mamy więc następną liczbę naturalną $b_q := \frac{10^{q\varphi(k)}-1}{k}$. Niech $n_q := b_q+1$. Wtedy $10^{q\varphi(k)}+(k-1) = kn_q$. Istnieje więc liczba naturalna n_q taka, że $10^{q\varphi(k)} + (k - 1) = kn_q$. Stąd wynika, że

$$s\,(kn_q) = 1 + s(k - 1).$$

Ale $n_q = 1 + \frac{10^{q\varphi(k)}-1}{k} = 1 + \frac{10^{\varphi(k)}-1}{k}\left(1 + 10^{\varphi(k)} + 10^{2\varphi(k)} + \cdots + 10^{(q-1)\varphi(k)}\right)$, więc $n_q = 1 + a + a10^{\varphi(k)} + a10^{2\varphi(k)} + \cdots + a10^{(q-1)\varphi(k)}$ i stąd

$$s\,(n_q) = s(1 + a) + (q - 1)s(a) \geqslant (q - 1)s(a).$$

Zatem

$$\frac{s(n_q)}{s(kn_q)} \geqslant \frac{(q-1)s(a)}{s(kn_q)} = (q - 1)\frac{s(a)}{1+s(k-1)}.$$

Ponieważ ułamek $\frac{s(a)}{1+s(k-1)}$ nie zależy od q, więc $\frac{s(n_q)}{s(kn_q)} \to +\infty$, gdy $q \to +\infty$. Rozważany ciąg $\left(\frac{s(n)}{s(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest więc ograniczony. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.5 Wielokrotności dziewiątki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.5.1. *Niech a będzie liczbą naturalną* 1959-*cyfrową podzielną przez* 9. *Znaleźć* $sss(a)$.
Odp. 9. ([WyKM] 299-59).

3.5.2. *Niech a będzie liczbą naturalną* 1962-*cyfrową podzielną przez* 9. *Znaleźć* $sss(a)$.
Odp. 9. ([WaJ] 21(62)).

3.5.3. $s(n + m) = s(n) \Rightarrow 9 \mid m$.

D. Ponieważ $9 \mid s(n) - n$, $9 \mid s(n+m) - (n+m)$, więc $9 \mid s(n) - n - (s(n+m) - n - m) = m$. ⊠

3.5.4. *Niech* $a, k \in \mathbb{N}$. *Jeśli* $s(a + 1 \cdot 9) = s(a + 2 \cdot 9) = \cdots = s(a + k \cdot 9)$, *to* $k \leqslant 9$.

D. Jest oczywiste, że jeśli $10 \mid a$, to $s(a + 9) = s(a) + 9$. W tym przypadku $k = 1 < 9$. Jeśli $10 \nmid a$, to jedna z liczb $a + 1 \cdot 9$, $a + 2 \cdot 9$, $\ldots$, $a + 9 \cdot 9$ jest podzielna przez 10 (gdyż ostatnie cyfry liczb $1 \cdot 9$, $2 \cdot 9$, $\ldots$, $9 \cdot 9$ są równe odpowiednio $9, 8, \ldots, 1$). Załóżmy, że tą liczbą jest $a + p \cdot 9$. Wtedy $s(a + (p + 1) \cdot 9) = s((a + p \cdot 9) + 9) \neq s(a + p \cdot 9)$. Zatem $k \leqslant p \leqslant 9$. ⊠

3.5.5.

(1) 31 *jest najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że* $s(9n) = s(9(n+1)) = s(9(n+2)) = 18$.

(2) 441 *jest najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że* $s(9n) = s(9(n+1)) = s(9(n+2)) = s(9(n+3)) = 27$.

(3) 3331 *jest najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że* $s(9n) = s(9(n+1)) = s(9(n+2)) = 36$. ([Mat] 1/1969 139).

3.5.6. *Niech* $a_n = 19\dots98$, *gdzie cyfra* 9 *występuje* n *razy. Jeśli* $m < 2^n 5^{n+1}$, *to* $s(ma_n) = 9(n+1)$. ([Mat] 1/1990 26).

3.5.7. *Ciąg* (x_n) *określony jest następująco:* $x_1 = 1989^{1989}$, $x_{n+1} = s(x_n)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Znaleźć* x_5. Odp. 9. ([OM] Kanada 1989, [Pa97]).

Spójrzmy na równości:

$$s(99) = 18,\ s(2\cdot 99) = s(198) = 18,\ s(3\cdot 99) = s(297) = 18,\ s(4\cdot 99) = s(396) = 18.$$

Sumy cyfr liczb $99n$, dla $n = 1,2,3,4$, są jednakowe i wynoszą 18. Wykażemy, że tak jest dla wszystkich n mniejszych lub równych 100.

3.5.8. $s(99n) = 18$ *dla* $1 \leqslant n \leqslant 100$.

D. Załóżmy najpierw, że $n \in \{1,2,\dots.9\}$ i zauważmy, że $99n = 100n - n = 100(n-1) + 100 - n = 100(n-1) + 10\cdot 9 + (10-n)$. Mamy więc równość $99n = 100(n-1) + 10\cdot 9 + (10-n)$ i z tej równości wynika, że $s(99n) = (n-1) + 9 + 10 - n = 18$.

Załóżmy teraz, że $n \in \{10, 11, \dots, 99\}$. Niech $n = 10a + b$, gdzie $a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}$ oraz $a \neq 0$. Jeśli $b = 0$, to $s(99n) = s(99a\cdot 10) = s(99a) = 18$ (na mocy pierwszej części tego dowodu). Możemy więc dalej założyć, że $b \geqslant 1$. Rozpatrzmy równości:

$$\begin{aligned} 99n &= (100-1)(10a+b) = 1000a + 100b - 10a - b \\ &= 1000a + 100(b-1) + (90+10) - 10a - b \\ &= 1000a + 100(b-1) + 10(9-a) + (10-b). \end{aligned}$$

Kolejnymi cyframi liczby $99n$ są więc: $a, (b-1), (9-a)$ oraz $(10-b)$ Zatem $s(99n) = a + (b-1) + (9-a) + (10-b) = 18$. ⊠

Powyższe stwierdzenie jest szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia.

3.5.9. *Niech* u *będzie* k*-cyfrową liczbą naturalną, której cyframi są same dziewiątki. Wtedy*

$$s(un) = 9k$$

dla wszystkich n *mniejszych lub równych* 10^k. ([Mon] 43(1)(1936) s.46, [Crux] 2001 s.232).

D. Załóżmy najpierw, że $n \in \{1,2,\dots.9\}$. W tym przypadku mamy:

$$\begin{aligned} un &= \left(10^k - 1\right) n = 10^k n - n = (n-1)10^k + 10^k - n \\ &= (n-1)10^k + 9\cdot 10^{k-1} + 9\cdot 10^{k-2} + \dots + 9\cdot 10 + (10-n) \end{aligned}$$

i stąd wynika, że $s(un) = (n-1) + 9 + 9 + \dots + 9 + (10-n) = 9k$.

Załóżmy teraz, że $n = a_p 10^p + a_{p-1}10^{p-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$, gdzie $p \leqslant k-1$, $a_0, \dots, a_p \in \{0, 1, \dots, 9\}$ oraz $a_p \neq 0$. Wykażemy, że $s(un) = 9k$. W tym celu zastosujemy indukcję matematyczną względem liczby p. Dla $p = 0$ wykazaliśmy już to na początku tego dowodu. Niech teraz $p \geqslant 1$.

Jeśli $a_0 = 0$, to $n = 10m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ i wtedy teza wynika z założenia indukcyjnego oraz z tego, że dla każdej liczby naturalnej v zachodzi równość $s(10v) = s(v)$.

Możemy więc dalej założyć, że $a_0 \neq 0$. Z tego założenia wynika, że $n < 10^k$ oraz

$$n = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0,$$

gdzie $a_0, \dots, a_{k-1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a_0 \neq 0$ (nie zakładamy, że a_{k-1} jest różne od zera). Mamy teraz:

$$\begin{aligned}
un &= \big(10^k - 1\big)\big(a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0\big)\\
&= \big(a_{k-1}10^{2k-1} + a_{k-2}10^{2k-2} + \cdots + a_1 10^{k+1} + a_0 10^k\big) - \big(a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_0\big)\\
&= \big(a_{k-1}10^{2k-1} + \cdots + a_1 10^{k+1} + (a_0 - 1)10^k\big) + 10^k - \big(a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_0\big)\\
&= \big(a_{k-1}10^{2k-1} + \cdots + a_1 10^{k+1} + (a_0 - 1)10^k\big) + \big(9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 9 \cdot 10 + 10\big)\\
&\quad - \big(a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_0\big)\\
&= a_{k-1}10^{2k-1} + \cdots + a_1 10^{k+1} + (a_0 - 1)10^k + (9 - a_{k-1})10^{k-1} + (9 - a_{k-2})10^{k-2}\\
&\quad + \cdots + (9 - a_1)10 + (10 - a_0)
\end{aligned}$$

Kolejnymi cyframi liczby $99n$ są więc:

$$a_{k-1},\ a_{k-2},\ \dots,\ a_1,\ (a_0 - 1),\ (9 - a_{k-1}),\ (9 - a_{k-2}),\ \dots,\ (9 - a_1),\ (10 - a_0).$$

Sumą tych wszystkich cyfr jest $9k$, a zatem $s(un) = 9k$. ⊠

Z tego twierdzenia wynika:

3.5.10. *Jeśli u jest k-cyfrową liczbą, której cyframi są same dziewiątki, to $s(u^2) = s(u) = 9k$.*

3.5.11. *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje liczba naturalna m taka, że*

$$s(m) = s(2m) = \cdots = s(m^2) = 9k.$$

Dowód. *Taką liczbą jest na przykład $m = 10^k - 1$.* ([OM] Polska 2001/2002).

3.5.12. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $s(n) = s(2n) = s(3n) = \cdots = s(n^2)$, to $n = 1$ lub $n = 10^m - 1$.* ([OM] Czechy-Słowacja 1991/1992).

3.5.13. *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje liczba naturalna m taka, że*

$$s_2(m) = s_2(2m) = \cdots = s_2(m^2) = k,$$

gdzie $s_2(u)$ oznacza sumę cyfr liczby u w systemie dwójkowym. Dowód. *Taką liczbą jest na przykład $m = 2^k - 1$.* ([OM] Polska 2001/2002).

---

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.6 Liczby postaci s(an)

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.6.1. *Dla każdego $a \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele bezzerowych liczb $n \in \mathbb{N}$ takich, że $s(n) = s(an)$.* ([WaJ] 139(70), [Kw] 7/1971 M 44).

D. ([WaJ] s.157). Niech $a = a_r 10^r + \cdots + a_1 10 + a_0$, gdzie $a_0, a_1, \dots, a_r$ są cyframi. Bez straty ogólności rozwiązania możemy założyć, że $a_0 > 0$. Rozpatrzmy liczbę n postaci $10^m - 1 = 99\dots9$ dla $m > r$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned} an &= a_r 10^{r+m} + a_{r-1} 10^{r-1+m} + \cdots + a_1 10^{1+m} + (a_0 - 1)10^m \\ &\quad + 9 \cdot 10^{m-1} + 9 \cdot 10^{m-2} + \cdots + 9 \cdot 10^{r+1} \\ &\quad + (9 - a_r)10^r + (9 - a_{r-1})10^{r-1} + \cdots + (9 - a_1)10^1 + (10 - a_0). \end{aligned}$$

Wtedy $s(an) = 9m = s(n)$. Takich liczb n oczywiście jest nieskończenie wiele. ⊠

3.6.2.

(1) $s(n) = s(2n) \Rightarrow 9 \mid n$. [GaT] 4/62.

(2) $s(n) = s(3n) \Rightarrow 9 \mid n$. [Andz] 39.

(3) $s(n) = s(5n) \Rightarrow 9 \mid n$. [Kw] 5/1970 33.

D. Wynika to z 3.5.3. ⊠

3.6.3. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna a taka, że wszystkie liczby $s(a), s(2a), s(3a), \dots, s(na)$ są parzyste.* ([OM] Rosja 1997).

D. Zachodzi to np. dla $a = 10^p + 1$, gdzie $n < 10^p$. ⊠

3.6.4. *Nie istnieje żadna liczba naturalna a taka, że wszystkie liczby postaci $s(na)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są parzyste.* ([Nord] 1993, [OM] Rosja 1997).

3.6.5. *Czy prawdziwy jest analog zdania* 3.6.3 *dla liczb nieparzystych?*

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.7 Suma cyfr i podzielność

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.7.1. $n \equiv s(n) \pmod 9$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

3.7.2. $s(a) + s(b) \equiv s(a + b) \pmod 9$ *dla* $a, b \in \mathbb{N}$.

D. $s(a + b) \equiv a + b \equiv s(a) + s(b) \pmod 9$. ⊠

3.7.3. *Jeśli $a_1, \dots, a_n$ są liczbami naturalnymi, to*

$$s(a_1) + \cdots + s(a_n) \equiv s(a_1 + \cdots + a_n) \pmod 9.$$

3.7.4. *Jeśli* $k, n \in \mathbb{N}$, *to* $s(kn) \equiv ks(n) \pmod 9$.

3.7.5. *Jeśli* $n, k \in \mathbb{N}$, *to* $s(kn) = ks(n) - 9 \sum_{t \geqslant 1} \left[k\left\{\frac{n}{10^t}\right\}\right]$. ([Miss] z.23).

3.7.6. *Niech* $k, n \in \mathbb{N}$, $3 \nmid n$, $k \geqslant n$. *Istnieje wtedy liczba naturalna* m *taka, że* $n \mid m$ *oraz* $s(m) = k$. ([IMO] Shortlist 1999, [Djmp] 303(647)).

3.7.7. *Nie istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $1998 \mid n$ *i* $s(n) < 27$. ([Kw] 4/1998 s.50,59).

3.7.8. *Niech* $m \in \mathbb{N}$. *Nie istnieje liczba naturalna* n *podzielna przez* $11\dots11$ (m *jedynek*) *taka, że* $s(n) < m$. ([WaJ] 329(82)).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.8 Sumy cyfr i liczby przeniesień do "pamięci" w dodawaniu

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Spójrzmy na dodawanie liczb $a = 789$ i $b = 425$:

$$\begin{array}{r} 789 \\ 425 \\ \hline 1214 \end{array}$$

Najpierw dodajemy cyfry jedności: $9 + 5 = 14$. Piszemy 4 oraz 1 przenosimy do "pamięci". Następnie dodajemy cyfry dziesiątek i do tego dodajemy to co było w "pamięci". Mamy: $8+2+1 = 11$. Piszemy 1 i 1 przenosimy do "pamięci". Podobnie: $7+4+1 = 12$, piszemy 2 i 1 przenosimy do "pamięci". Następnie spisujemy to co było w "pamięci". W tym dodawaniu aż trzy razy przenosiliśmy liczbę 1 do "pamięci". Suma wszystkich liczb umieszczonych w tej "pamięci" jest równa 3.

Dla rozważanych liczb a i b mamy:

$$\frac{s(a)+s(b)-s(a+b)}{9} = \frac{s(789)+s(425)-s(1214)}{9} = \frac{24+11-8}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

Tutaj w wyniku otrzymaliśmy 3 i suma liczb przeniesionych do "pamięci" też jest równa 3. To nie jest przypadek. Poniższe twierdzenie mówi, że tak jest zawsze.

3.8.1. *Niech* $a, b \in \mathbb{N}$. *Oznaczmy:*

$$t(a,b) = \frac{s(a) + s(b) - s(a+b)}{9}.$$

Z 3.7.2 *wiemy, że* $t(a,b)$ *jest liczbą całkowitą. Natomiast z* 3.3.1 *wiemy, że jest to liczba nieujemna. Liczba* $t(a,b)$ *jest sumą liczb przeniesionych do "pamięci" podczas dodawania w układzie dziesiętnym liczb* a *i* b.

D. Dopisując na początek jednej z liczb a lub b zera możemy założyć, że liczby te mają jednakową liczbę cyfr. Niech

$$a = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0, \quad b = b_n 10^n + \cdots + b_1 10 + b_0,$$

gdzie $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ są liczbami należącymi do zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Tworzymy liczby $c_0, c_1, \dots, c_{n+1}$ oraz $r_0, r_1, \dots, r_n$ w następujący sposób. Przyjmujemy, że $c_0 = 0$ oraz, że

$$c_{i+1} = \left[\frac{a_i + b_i + c_i}{10}\right], \quad r_i = (a_i + b_i + c_i) - 10c_{i+1},$$

dla $i = 0, 1, \dots, n$. Mamy wówczas

$$a_i + b_i + c_i = 10c_{i+1} + r_i, \quad 0 \leqslant r_i < 10$$

dla $i = 0, 1, \dots, n$. Ponadto, wszystkie liczby $c_0, c_1, \dots, c_{n+1}$ są nieujemne. Zauważmy, że

$$a + b = c_{n+1}10^{n+1} + r_n 10^n + r_{n-1}10^{n-1} + \dots + r_1 10 + r_0.$$

Zatem $s(a+b) = c_{n+1} + r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$ i ponadto $s(a) = a_n + \dots + a_0$, $s(b) = b_n + \dots + b_0$.

Rozważana tu liczba przeniesień do "pamięci" jest z definicji równa liczbie $c_1 + c_2 + \dots + c_{n+1}$. Należy zatem pokazać, że $t(a,b) = c_1 + \dots + c_{n+1}$. Sprawdzamy:

$$\begin{aligned}
t(a,b) &= \tfrac{1}{9}(s(a) + s(b) - s(a+b)) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n b_i - c_{n+1} - \sum_{i=0}^n r_i\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\sum_{i=0}^n (a_i + b_i - r_i) - c_{n+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\sum_{i=0}^n (10c_{i+1} - c_i) - c_{n+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{n+1} 10c_i - \sum_{i=0}^n c_i - c_{n+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(9\sum_{i=1}^{n+1} c_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} c_i. \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

3.8.2. *Niech $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Rozważmy liczbę*

$$\frac{s(a_1) + s(a_2) + \dots + s(a_n) - s(a_1 + \dots + a_n)}{9}.$$

Jest to nieujemna liczba całkowita będąca sumą wszystkich liczb przeniesionych do "pamięci" podczas dodawania w układzie dziesiętnym liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$. (Dowód taki jak 3.8.1).

3.8.3. *Dla danej liczby naturalnej n oznaczmy przez $s_q(n)$ sumę jej cyfr w układzie o podstawie $q \geqslant 2$. Mamy wówczas:*

(1) $s_q(n) \equiv n \pmod{q-1}$;

(2) $s_q(a) + s_q(b) \equiv s_q(a+b) \pmod{q-1}$ *dla* $a, b \in \mathbb{N}$;

(3) *Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Oznaczmy:*

$$t_q(a,b) = \frac{s_q(a) + s_q(b) - s_q(a+b)}{q-1}.$$

Liczba $t_q(a,b)$ jest całkowita. Jest oczywiste, że liczba ta jest nieujemna. Liczba $t_q(a,b)$ jest liczbą przeniesień do "pamięci" w dodawaniu w układzie o podstawie q liczb a i b.

D. Własności (1) i (2) są oczywiste. Własność (3) dowodzimy tak samo jak 3.8.1 zastępując liczbę 10 przez q. ☒

3.8.4. *Dla danej liczby naturalnej n oznaczmy przez $s_q(n)$ sumę jej cyfr w układzie o podstawie $q \geqslant 2$. Niech $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Rozważmy liczbę*

$$\frac{s_q(a_1) + s_q(a_2) + \cdots + s_q(a_n) - s_q(a_1 + \cdots + a_n)}{q-1}.$$

Jest to nieujemna liczba całkowita będąca sumą wszystkich liczb przeniesionych do "pamięci" w dodawaniu w układzie o podstawie q liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$. (Dowód taki jak 3.8.1).

3.8.5. *Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Równość $s(a+b) = s(a) + s(b)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy podczas dodawania liczb a i b nie ma żadnych przeniesień do pamięci.*
([Kw] 5/1972 31, [GaT] s.236, [ME] 7(4)(2002) z.157).

D. Wynika to z 3.8.1. ☒

3.8.6. *Jeśli $s(n) = 100$ i $s(44n) = 800$, to $s(3n) = 300$.* ([Kw] 2/2000 M1697).

D. ([ME] 7(4)(2002) z.157). Wiadomo (patrz 3.3.1), że dla dowolnych liczb naturalnych a i b zachodzi zawsze nierówność $s(a+b) \leqslant s(a) + s(b)$ i przy tym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy podczas dodawania liczb a i b nie ma żadnych "przeniesień do pamięci", tzn. jeśli $a = \sum_i a_i 10^i$, $b = \sum_i b_i 10^i$ (gdzie a_i, b_i są cyframi), to każda suma cyfr $a_i + b_i$ jest mniejsza od 10. W szczególności $s(ma) \leqslant ms(a)$, dla $a, m \in \mathbb{N}$.

W naszym przypadku mamy: $800 = s(44n) = s(40n + 4n) \leqslant s(40n) + s(4n) = 2s(4n) \leqslant 8s(n) = 800$ i stąd wynika, że $s(4n) = 400 = s(n)+s(n)+s(n)+s(n)$. Zatem w dodawaniu $n+n+n+n$ nie ma żadnych "przeniesień do pamięci". Tym bardziej więc takich przeniesień nie ma podczas dodawania $n + n + n$. Oznacza to, że $s(3n) = 3s(n) = 300$. ☒

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.9 Sumy cyfr i kolejne liczby naturalne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.9.1. *Najmniejszą liczbą naturalną n taką, że $5 \mid s(n)$ i $5 \mid s(n+1)$ jest $49\,999$.*
([OM] Moskwa 1999/2000).

3.9.2. *Czy istnieje liczba naturalna n taka, że $7 \mid s(n)$ i $7 \mid s(n+1)$?* ([G-if] 77).

3.9.3. *Czy istnieje liczba naturalna n taka, że $125 \mid s(n)$ i $125 \mid s(n+1)$?* ([GaT] 1/67).

O. Istnieje. Najmniejsze n jest równe $-1 + 8999\dots99000\dots00$ (13 dziewiątek, 14 zer). ☒

3.9.4. *Wśród każdych 13 kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, której suma cyfr jest podzielna przez 7. Wśród 12 kolejnych liczb $994, 995, \dots, 1005$ nie ma liczby, której suma cyfr jest podzielna przez 7.* ([OM] Rosja 1998).

3.9.5. *Spośród* 39 *kolejnych liczb naturalnych zawsze można wybrać taką liczbę* a*, że liczba* $s(a)$ *jest podzielna przez* 11.

Najmniejszą liczbą naturalną n *taką, że wśród liczb* $s(n+1), s(n+2), \dots, s(n+38)$ *nie ma liczby podzielnej przez* 11 *jest* 999980. ([OM] ZSRR 1991, [WaJ] 3(61)).

3.9.6. *Spośród* $20n + 39$ *kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, której suma cyfr jest podzielna przez* $11 + n$. ([MOc] 2002 z.153).

3.9.7. *Spośród* 79 *kolejnych liczb naturalnych zawsze można wybrać taką liczbę* a*, że liczba* $s(a)$ *jest podzielna przez* 13. ([Balt] 1998).

3.9.8. *Niech* $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$. *Spośród* $20n - 1$ *kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, której suma cyfr jest podzielna przez* $n + 9$. ([MOc] 2002 z.153).

3.9.9. *Danych jest* 70 *kolejnych dziesięciocyfrowych liczb naturalnych. Wykazać, że suma cyfr początkowych* 20 *liczb jest większa od sumy cyfr dziesięciu ostatnich liczb.*
([OM] St Petersburg 2000).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.10 Suma cyfr i ciągi arytmetyczne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.10.1. *W każdym nieskończonym ciągu arytmetycznym o wyrazach naturalnych istnieją dwa wyrazy posiadające jednakowe sumy cyfr.* ([OM] Leningrad 1990, [Kw] 3/1991 19).

3.10.2. *Dla każdej liczby naturalnej* m *istnieje liczba naturalna* a *taka, że wszystkie liczby*

$$s(a), \ s(2a), \ \dots, \ s(ma)$$

są parami różne. Dowód. *Taką liczbą* a *jest na przykład* $10^t + 1$*, gdzie* $m < 10^t$. ([OM] Ukraina 1998).

3.10.3. *Dla każdej naturalnej liczby* a *istnieją dwie różne liczby naturalne* m *i* n *takie, że* $s(na) = s(ma)$. Dowód. *Wynika z* 3.10.1. ([OM] Ukraina 1998).

3.10.4. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje liczba naturalna* m *taka, że liczba* $s(nm)$ *jest nieparzysta.* ([TTta] 1992).

3.10.5. *Niech* $a = 2739726$. *Suma cyfr każdej z liczb* a, $2a$, $3a$, $\dots$, $72a$, *jest równa* 36. Uwaga. *Liczba* a *dzieli się przez* 9999. ([Szu87] 33).

3.10.6. *Dla każdej liczby rzeczywistej* M *istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny* (a_n) *liczb naturalnych, o różnicy niepodzielnej przez* 10 *taki, że* $s(a_n) > M$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$. ([IMO] Shortlist 1999, [Djmp] 303(648)).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.11 Liczba liczb k-cyfrowych o danej sumie cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przez $\gamma_k(m)$ oznaczać będziemy w tym podrozdziale liczbę wszystkich k-cyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa m. Dla przykładu, $\gamma_4(3) = 10$, gdyż istnieje dokładnie 10 liczb 4-cyfrowych, których suma cyfr jest równa 3; są to liczby; $1002, 1011, 1020, 1101, 1110, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000$.

Suma cyfr k-cyfrowej liczby naturalnej jest co najmniej równa 1 i co najwyżej równa $9k$. Jeśli więc $m > 19k$ lub $m < 1$, to $\gamma_k(m) = 0$. Jest oczywiste, że $\gamma_1(m) = 1$ dla $1 \leqslant m < 10$. Ponadto, dla każdego k zachodzą równości: $\gamma_k(1) = 1$, $\gamma_k(9k) = 1$.

3.11.1. *Liczby wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych o danej sumie cyfr:*

$\gamma_2(1) = 1,$	$\gamma_2(4) = 4,$	$\gamma_2(7) = 7,$	$\gamma_2(10) = 9,$	$\gamma_2(13) = 6,$	$\gamma_2(16) = 3,$
$\gamma_2(2) = 2,$	$\gamma_2(5) = 5,$	$\gamma_2(8) = 8,$	$\gamma_2(11) = 8,$	$\gamma_2(14) = 5,$	$\gamma_2(17) = 2,$
$\gamma_2(3) = 3,$	$\gamma_2(6) = 6,$	$\gamma_2(9) = 9,$	$\gamma_2(12) = 7,$	$\gamma_2(15) = 4,$	$\gamma_2(18) = 1.$

3.11.2. *Liczby wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych o danej sumie cyfr:*

$\gamma_3(1) = 1,$	$\gamma_3(10) = 54,$	$\gamma_3(19) = 45,$
$\gamma_3(2) = 3,$	$\gamma_3(11) = 61,$	$\gamma_3(20) = 36,$
$\gamma_3(3) = 6,$	$\gamma_3(12) = 66,$	$\gamma_3(21) = 28,$
$\gamma_3(4) = 10,$	$\gamma_3(13) = 69,$	$\gamma_3(22) = 21,$
$\gamma_3(5) = 15,$	$\gamma_3(14) = 70,$	$\gamma_3(23) = 15,$
$\gamma_3(6) = 21,$	$\gamma_3(15) = 69,$	$\gamma_3(24) = 10,$
$\gamma_3(7) = 28,$	$\gamma_3(16) = 66,$	$\gamma_3(25) = 6,$
$\gamma_3(8) = 36,$	$\gamma_3(17) = 61,$	$\gamma_3(26) = 3,$
$\gamma_3(9) = 45,$	$\gamma_3(18) = 54,$	$\gamma_3(27) = 1.$

3.11.3. *Liczby wszystkich czterocyfrowych liczb naturalnych o danej sumie cyfr:*

$\gamma_4(1) = 1,$	$\gamma_4(10) = 219,$	$\gamma_4(19) = 615,$	$\gamma_4(28) = 165,$
$\gamma_4(2) = 4,$	$\gamma_4(11) = 279,$	$\gamma_4(20) = 597,$	$\gamma_4(29) = 120,$
$\gamma_4(3) = 10,$	$\gamma_4(12) = 342,$	$\gamma_4(21) = 564,$	$\gamma_4(30) = 84,$
$\gamma_4(4) = 20,$	$\gamma_4(13) = 405,$	$\gamma_4(22) = 519,$	$\gamma_4(31) = 56,$
$\gamma_4(5) = 35,$	$\gamma_4(14) = 465,$	$\gamma_4(23) = 465,$	$\gamma_4(32) = 35,$
$\gamma_4(6) = 56,$	$\gamma_4(15) = 519,$	$\gamma_4(24) = 405,$	$\gamma_4(33) = 20,$
$\gamma_4(7) = 84,$	$\gamma_4(16) = 564,$	$\gamma_4(25) = 342,$	$\gamma_4(34) = 10,$
$\gamma_4(8) = 120,$	$\gamma_4(17) = 597,$	$\gamma_4(26) = 279,$	$\gamma_4(35) = 4,$
$\gamma_4(9) = 165,$	$\gamma_4(18) = 615,$	$\gamma_4(27) = 219,$	$\gamma_4(36) = 1.$

3.11.4. *Liczby wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych o danej sumie cyfr:*

$\gamma_5(1) = 1,$	$\gamma_5(10) = 714,$	$\gamma_5(19) = 4620,$	$\gamma_5(28) = 4170,$	$\gamma_5(37) = 495,$
$\gamma_5(2) = 5,$	$\gamma_5(11) = 992,$	$\gamma_5(20) = 4998,$	$\gamma_5(29) = 3675,$	$\gamma_5(38) = 330,$
$\gamma_5(3) = 15,$	$\gamma_5(12) = 1330,$	$\gamma_5(21) = 5283,$	$\gamma_5(30) = 3162,$	$\gamma_5(39) = 210,$
$\gamma_5(4) = 35,$	$\gamma_5(13) = 1725,$	$\gamma_5(22) = 5460,$	$\gamma_5(31) = 2654,$	$\gamma_5(40) = 126,$
$\gamma_5(5) = 70,$	$\gamma_5(14) = 2170,$	$\gamma_5(23) = 5520,$	$\gamma_5(32) = 2170,$	$\gamma_5(41) = 70,$
$\gamma_5(6) = 126,$	$\gamma_5(15) = 2654,$	$\gamma_5(24) = 5460,$	$\gamma_5(33) = 1725,$	$\gamma_5(42) = 35,$
$\gamma_5(7) = 210,$	$\gamma_5(16) = 3162,$	$\gamma_5(25) = 5283,$	$\gamma_5(34) = 1330,$	$\gamma_5(43) = 15,$
$\gamma_5(8) = 330,$	$\gamma_5(17) = 3675,$	$\gamma_5(26) = 4998,$	$\gamma_5(35) = 992,$	$\gamma_5(44) = 5,$
$\gamma_5(9) = 495,$	$\gamma_5(18) = 4170,$	$\gamma_5(27) = 4620,$	$\gamma_5(36) = 714,$	$\gamma_5(45) = 1.$

3.11.5. *Przykłady pewnych liczb postaci $\gamma_k(m)$.*

$\gamma_6(21) = 33787$,	$\gamma_7(24) = 275988$,	$\gamma_8(33) = 4016685$,
$\gamma_6(22) = 37917$,	$\gamma_7(25) = 312873$,	$\gamma_8(34) = 4194135$,
$\gamma_6(23) = 41712$,	$\gamma_7(26) = 348558$,	$\gamma_8(35) = 4316565$,
$\gamma_6(24) = 45002$,	$\gamma_7(27) = 381723$,	$\gamma_8(36) = 4379055$,
$\gamma_6(25) = 47631$,	$\gamma_7(28) = 411048$,	$\gamma_8(37) = 4379055$,
$\gamma_6(26) = 49467$,	$\gamma_7(29) = 435303$,	$\gamma_8(38) = 4316565$,
$\gamma_6(27) = 50412$,	$\gamma_7(30) = 453438$,	$\gamma_8(39) = 4194135$,
$\gamma_6(28) = 50412$,	$\gamma_7(31) = 464653$,	$\gamma_8(40) = 4016685$,
$\gamma_6(29) = 49467$,	$\gamma_7(32) = 468448$,	$\gamma_8(41) = 3791180$,
$\gamma_6(30) = 47631$,	$\gamma_7(33) = 464653$,	$\gamma_8(42) = 3526195$. (Maple).

3.11.6. *Zachodzą równości: $\gamma_2(19-m) = \gamma_2(m)$, $\gamma_3(28-m) = \gamma_3(m)$, $\gamma_4(37-m) = \gamma_4(m)$ i ogólnie*

$$\gamma_k\left((9k+1)-m\right) = \gamma_k(m),$$

dla wszystkich $k, m \in \mathbb{N}$.

D. Dla $k = 1$ jest to oczywiste. Załóżmy, że $k \geqslant 2$. Jeśli $m > 9k$, to $\gamma_k(m) = 0$ i wtedy również $\gamma_k((19k+1)-m) = 0$. Niech więc m będzie ustaloną liczbą naturalną taką, że $1 \leqslant m \leqslant 9k$. Wtedy $1 \leqslant (9k+1)-m \leqslant 9k$.

Niech A będzie zbiorem wszystkich k-cyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa m. Niech B będzie zbiorem wszystkich k-cyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa $(9k+1)-m$. Rozpatrzmy funkcję $f : A \to B$, określoną wzorem

$$f(n) = \left(10^k + 10^{k-1} - 1\right) - n,$$

dla $n \in A$. Z równości $s\left((10^k + 10^{k-1} - 1) - n\right) = (9k+1) - s(n)$ (patrz 3.1.17) wynika, że jeśli $n \in A$, to $f(n) \in B$. Zatem f jest dobrze określoną funkcją. Jest to oczywiście bijekcja. Mamy zatem: $\gamma_k\left((9k+1)-m\right) = |B| = |A| = \gamma_k(m)$. ⊠

3.11.7. $\gamma_k(2) = \gamma_k(9k-1) = k$, *dla $k \in \mathbb{N}$.*

3.11.8. $\gamma_k(3) = \gamma_k(9k-2) = \frac{k(k+1)}{2}$, *dla $k \in \mathbb{N}$.*

D. Równość $\gamma_k(3) = \gamma_k(9k-2)$ wynika z 3.11.6. Wystarczy więc wykazać, że $\gamma_k(3) = \frac{k(k+1)}{2}$. Początkową cyfrą k-cyfrowej liczby naturalnej o sumie cyfr równej 3 może być jedynie 3, 2 lub 1. Jeśli jest 3, to pozostałe cyfry są zerowe. Taka liczba jest tylko jedna. Jeśli początkową cyfrą jest 2, to dokładnie jedna z pozostałych cyfr jest równa 1 i wszystkie inne są zerowe. Takich liczb jest $k-1$.

Załóżmy, że początkową cyfrą jest 1. Wtedy albo wśród pozostałych cyfr jest jedna dwójka i same zera (takich liczb jest $k-1$), albo są dwie jedynki i same zera (takich liczb jest $\binom{k-1}{2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$). Mamy więc: $\gamma_k(3) = 1 + (k-1) + (k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$. ⊠

3.11.9. $\gamma_k(4) = \gamma_k(9k-3) = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$, *dla $k \in \mathbb{N}$.*

Powyższe fakty są szczególnymi przypadkami następującego stwierdzenia.

3.11.10. *Jeśli $1 \leqslant m \leqslant 9$, to dla wszystkich liczb naturalnych k zachodzi równość*

$$\gamma_k(m) = \gamma_k((9k+1)-m) = \binom{m+k-2}{m-1}.$$

Stąd w szczególności wynika:

3.11.11. *Jeśli $1 \leqslant k, m \leqslant 9$, to $\gamma_k(m) = \gamma_m(k)$.* ([KoMe] z.27).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
3.12 Liczby postaci n + s(n)
oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.12.1. *Wszystkie liczby naturalne mniejsze od* 200*, które nie są postaci* $m+s(m)$*:* $1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97, 108, 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198$. (Maple).

3.12.2. *Wszystkie liczby naturalne mniejsze od* 100*, które mają dokładnie jedno przedstawienie w postaci* $m+s(m)$*:* $2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99$. (Maple).

3.12.3. *Czy istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $n+s(n)=1984$ *?* ([WaJ] 294(80)).

O. Tak. $1962+s(1962)=1984$. ⊠

3.12.4. *Czy istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $n+s(n)=1999$ *?* ([OM] Moskwa 1999/2000).

O. Tak. Jedyną taką liczbą jest 1976. ⊠

3.12.5. *Z dwóch kolejnych liczb naturalnych co najmniej jedna jest postaci* $n+s(n)$*.* ([WaJ] 294(80)).

3.12.6. *Liczba* 101 *jest najmniejszą liczbą naturalną posiadającą dwa różne przedstawienia w postaci* $m+s(m)$*;* $101=100+s(100)=91+s(91)$.

3.12.7. *Wszystkie liczby naturalne mniejsze od* 1000*, które mają dokładnie dwa przedstawienia w postaci* $m+s(m)$*:* $101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216, 218, 303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 404, 406, 408, 410, 412, 414, 416, 418, 420, 505, 507, 509, 511, 513, 515, 517, 519, 521, 606, 608, 610, 612, 614, 616, 618, 620, 622, 707, 709, 711, 713, 715, 717, 719, 721, 723, 808, 810, 812, 814, 816, 818, 820, 822, 824, 909, 911, 913, 915, 917, 919, 921, 923, 925$. (Maple).

3.12.8. *Znaleźć trzy różne liczby naturalne* a, b, c *takie, że* $s(a)+a=s(b)+b=s(c)+c$. Odp. *Np.* $a=10^{15}+99$, $b=10^{15}+117$, $c=10^{15}-9$ *lub* $a=10^{13}+91$, $b=10^{13}+100$, $c=10^{13}-8$. ([Kw] 5/1994 M1426).

3.12.9. *Istnieją liczby naturalne* $n_1<n_2<\cdots<n_{50}$ *takie, że* $n_1+s(n_1)=n_2+s(n_2)=\cdots=n_{50}+s(n_{50})$. ([OM] Polska 1998/1999).

3.12.10. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje liczba naturalna* m *taka, że równanie* $x+s(x)=m$ *posiada dokładnie* n *rozwiązań.* ([OM] Rumunia 2003).

3.12.11. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, które nie są postaci* $n+s(n)$*.* ([Kw] 10/1972 40, [Zw] 1999).

R. Taką własność ma każda liczba postaci $\underbrace{11\dots11}_{n}20+n$, $n\in\mathbb{N}$. Na przykład liczba 121 jest taka. ⊠

3.12.12. *Niech $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+s(a_n)$. Czy liczba 123456 występuje w tym ciągu ?* ([TTts] 1985).

3.12.13. *Do danej liczby naturalnej dodajemy sumę jej cyfr stojących na parzystych miejscach. Powtarzamy to kilka razy. Wykazać, że proces ten się stabilizuje.*
([OM] St Petersburg 1993, [Fom] 48/93).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.13 Ciąg n, s(n), ss(n), sss(n), ...

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Dla danej liczby naturalnej n ciąg

$$s(n),\ s(s(n)),\ s(s(s(n))),\dots$$

stabilizuje się zawsze na jednocyfrowej liczbie, którą oznaczać tu będziemy przez $c(n)$.

3.13.1. *Znaleźć $c(8^n)$.* ([G-if] 148).

R. $c(8^{2k})=1$, $c(8^{2k+1})=8$. Wynika to z kongruencji $n\equiv s(n)\ (\mathrm{mod}\ 9)$. ⊠

3.13.2. *Jeśli n jest liczbą kwadratową, to $c(n)$ jest jedną z liczb 1, 4, 7 lub 9.* ([Par] Q622).

3.13.3. *Niech $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$. Wtedy $c(a_n)=4$.* (K.Brown).

3.13.4. $c(n)=4 \iff c(n+9)=4$. (K.Brown).

3.13.5. *Niech $a,b\in\mathbb{N}$. Wtedy*

$$c(a)=c(b) \iff a\equiv b \pmod 9.$$

Podobna własność zachodzi dla liczb zapisanych w systemach o podstawach q i przystających do siebie modulo $q-1$. (K. Brown).

3.13.6 (C.M. Ingleby 1866). *Dla $a,b\in\mathbb{N}$ zachodzi równość:*

$$c(ab)=c(c(a)c(b)).$$

To samo zachodzi w dowolnych systemach numeracji. ([Dic1] 455).

3.13.7. *Jeśli A jest ciągiem $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ liczb naturalnych, to przez $s(A)$ oznaczamy ciąg $(s(a_1),\ s(a_2),\ \dots,\ s(a_n))$. Niech $n=10^9$ i niech $A=(1,2,\dots,n)$. Tworzymy ciągi*

$$s(A),\ ss(A),\ sss(A),\dots$$

tak długo, aż otrzymamy ciąg końcowy, tzn. taki ciąg, którego każdy wyraz jest liczbą jednocyfrową. Których liczb w ciągu końcowym będzie więcej: jedynek czy dwójek? ([WaJ] 43(64)).

O. Liczba jedynek będzie o 1 większa od liczby dwójek. ⊠

★ K. Brown, *Sum-of-digits iterations.*
R. Skurnick, *The digital representation ring*, [MG] 87(510)(2003), 505 - 510.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
3.14 Zadania różne
oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.14.1. *Istnieje nieskończony rosnący ciąg* (b_n) *liczb naturalnych taki, że* $s\left(b_{n+1}^5\right) = b_n^5$, *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$. ([OM] St Petersburg 1995).

R. Przykładem takiego ciągu jest ciąg (b_n) zdefiniowany rekurencyjnie tak: $b_1 = 9$, $b_{n+1} = 10^{b_n^5/27} - 1$. ⊠

3.14.2. *Niech* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *będzie wielomianem o nieujemnych współczynnikach i niech*

$$z_n = s(f(n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1) *Wykazać, że w ciągu* (z_n) *pewna liczba występuje nieskończenie wiele razy.*

(2) *Wykazać to samo dla dowolnego wielomianu* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *z dodatnim najwyższym współczynnikiem.* ([OM] ZSRR 1975, [OM] Polska 1997).

D. ([WaJ] s.196). (1). Wielomian $f(x)$ ma postać $f(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_r, \dots, a_1, a_0$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Niech $s = s(a_r) + s(a_{r-1}) + \cdots + s(a_1) + s(a_0)$. Niech n_0 będzie liczbą naturalną taką, że liczba 10^{n_0} jest większa od wszystkich liczb $a_r, \dots, a_1, a_0$. Wówczas dla wszystkich $n \geqslant n_0$ mamy $z_{10^n} = s(f(10^n)) = s$.

(2). Łatwo wykazać, że istnieje taka liczba naturalna d, że wszystkie współczynniki wielomianu $f(x+d)$ są liczbami naturalnymi. Wystarczy zatem zastosować (1) dla wielomianu $f(x+d)$. ⊠

3.14.3. *Niech* $v(n)$ *oznacza sumę* $s(1) + s(2) + \cdots + s(n)$. *Wtedy:*

(1) $v(1) = 1$, $v(2) = 3$, $v(3) = 6$, $v(9) = 45$, $v(10) = 46$, $v(11) = 48$, $v(12) = 51$.

(2) $v(100) = 901$, $v(1980) = 27558$.

(3) $v(10^n - 1) = 45n \cdot 10^{n-1}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

(4) $v(\overline{ab}) = a(5a + b + 41) + b(b+1)/2$.

(5) $v(\overline{abc}) = a(50a + \overline{bc} + 851) + b(5b + c + 41) + c(c+1)/2$. ([Kw] 1/1981 29).

3.14.4. *Niech* b_n *oznacza liczbę wszystkich takich liczb naturalnych* m, *że* $s(m) = n$ *oraz w zapisie dziesiętnym liczby* m *występują tylko cyfry należące do zbioru* $\{1, 3, 4\}$. *Jeśli* n *jest parzyste, to* b_n *jest liczbą kwadratową.* ([MOc] 2005 z.372).

U. Można udowodnić, że $b_{2k} = u_{k+1}^2$, $b_{2k-1} = u_{k+1}u_k$, gdzie (u_n) jest ciągiem liczb Fibonacciego $(u_1 = 1, u_2 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n)$. ⊠

3.14.5. *Niech* $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będzie funkcją określoną wzorem*

$$D(n) = s(n)^2, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Dla każdej liczby naturalnej n *istnieje liczba naturalna* k *taka, że* $D^k(n)$ *jest jedną z liczb* 1, 81 *lub* 169. ([Mon] 53(10)(1946) s.593).

Literatura

[AnAF] T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, 104 *Number Theory Problems. From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2007.

[Andz] A. Andžāns, *Mathematical Problems for Junior Students*, 91/92 - 92/93, Riga, 1993.

[AuP] Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne.

[B-rs] J. Browkin, J. Rempała, S. Straszewicz, *25 lat Olimpiady Matematycznej*, WSiP, Warszawa, 1975.

[Balt] Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich.

[Br80] J. Browkin, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom 5, 21-25, 69/70 - 73/74, WSiP, Warszawa, 1980.

[Br83] J. Browkin, *Zbiór Zadań z Olimpiad Matematycznych*, tom 6, 26-30, 74/75 - 78/79, WSiP, Warszawa, 1983.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Dic1] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. I. *Divisibility and primality*, Carnegie Institute of Washington, 1919. Reprinted by AMS Chelsea Publishing, New York, 1992.

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Fom] D. V. Fomin, *Sankt-Petersburskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Politechnika, Sankt-Petersburg, 1994.

[G-if] S. A. Genkin, I. W. Itenberg, D. V. Fomin, *Leningradzkie Kółka Matematyczne* (po rosyjsku), Kirow, ASA, 1994.

[GaT] G. A. Galpierin, A. K. Tołpygo, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), 1935-1985, Moskwa, 1986.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[Jedr] P. Jędrzejewicz, *Bukiety Matematyczne dla Gimnazjum*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2002.

[Ko02] L. Kourliandtchik, *Impresje Liczbowe*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń, 2001.

[KoMe] J.-M. De Koninck, A. Mercier, 1001 *Problémes en Théorie Classique des Nombres*, Ellipses, 2004.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[M-sj] The Mathematics Student Journal.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[ME] Mathematical Excalibur, chińskie popularne czasopismo matematyczne, Hong Kong.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[Miss] Missouri Journal of Mathematical Sciences.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2012.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[Nord] Nordic Mathematical Competition.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pa97] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata*, Tutor, Toruń, 1997.

[Par] Parabola, australijskie czasopismo matematyczne.

[S64] W. Sierpiński, *200 Zadań z Elementarnej Teorii Liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa, 1964.

[SPom] Sprwozdanie Komitetu Głównego Polskiej Olimpiady Matematycznej.

[Szu87] M. Szurek, *Opowieści Matematyczne*, WSiP, Warszawa, 1987.

[TTss] Tournament of the Towns, Senior, Spring.

[TTta] Tournament of the Towns, Training, Autumn.

[TTts] Tournament of the Towns, Training, Spring.

[Uiuc] UIUC Undergraduate Math Contest, University of Illinois at Urbana-Champaign.

[WaJ] N. B. Wasilev, A. A. Jegorow, *Zadania Olimpiad Matematycznych Związku Radzieckiego* (po rosyjsku), 1961-1987, Moskwa, Nauka, 1988.

[WyKM] W. A. Wyszenskij, I. W. Kartaszow, W. I. Michaiłowskij, M. I. Jadrenko, *Zbiór Zadań Kijowskich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), 1935-1983, Kijów, 1984.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.