Podróże po Imperium Liczb

Część 02. Cyfry Liczb Naturalnych

Rozdział 6

6. Początkowe cyfry

Andrzej Nowicki 7 grudnia 2011, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

6 Początkowe cyfry

Rozpatrzmy system numeracji o podstawie $q \geqslant 2$. Załóżmy, że dana liczba naturalna m ma s cyfr w tym systemie. Mówić będziemy, że liczba naturalna a jest (m,q)*-liczbą*, jeśli liczba utworzona z s początkowych cyfr (w systemie numeracji o podstawie q) liczby a jest równa m.

Jeśli system numeracji jest dziesiętny, to $(m,10)$-liczby nazywać będziemy m*-liczbami.* Dla przykładu jeśli $m = 123$, to każda z liczb 123, 12345, 1235555, jest m-liczbą. Liczba 54321 jest 5-liczbą, 54-liczbą, 543-liczbą, itd.

Przypuśćmy, że dany jest ciąg (a_n) liczb naturalnych i dana jest liczba naturalna m. Interesować nas będą głównie następujące pytania.

1. *Czy w ciągu (a_n) istnieje m-liczba?*

2. *Czy w ciągu (a_n) istnieje nieskończenie wiele m-liczb?*

3. *Analogiczne pytania dla dowolnego systemu numeracji.*

W szczególności interesować nas będą odpowiedzi na następujące pytania. Czy istnieje liczba kwadratowa rozpoczynająca się cyframi $1,2,3,4,5$? Czy istnieje liczba pierwsza (lub liczba postaci $n!$ lub postaci 2^n) rozpoczynająca się tymi cyframi?

6.1 Ogólne fakty o (m,q)-liczbach

6.1.1. *Niech $m, q, a \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Liczba a jest (m,q)-liczbą.*

(2) *Istnieje nieujemna liczba całkowita k taka, że $mq^k \leqslant a < (m+1)q^k$.*

D. Niech $m = m_r q^r + m_{r-1}q^{r-1} + \cdots + m_1 q^1 + m_0$, gdzie $m_0, \dots, m_r \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że a jest (m,q)-liczbą. Wtedy

$$a = m_r q^{r+k} + m_{r-1}q^{r-1+k} + \cdots + m_1 q^{1+k} + m_0 q^k + a_{k-1}q^{k-1} + \cdots + a_1 q^1 + a_0,$$

gdzie $k \geqslant 0$ i jeśli $k > 0$, to $a_0, \dots, a_{k-1} \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Jeśli $k = 0$, to $a = m$ i wtedy oczywiście $mq^0 \leqslant a < (m+1)q^0$. Załóżmy, że $k > 0$. i oznaczmy $b := a_{k-1}q^{k-1} + \cdots + a_1 q^1 + a_0$. Wtedy $0 \leqslant b < q^k$ oraz $a = mq^k + b$. Mamy więc: $mq^k \leqslant a < mq^k + q^k = (m+1)q^k$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $mq^k \leqslant a < (m+1)q^k$. Wtedy $a = mq^k + b$, gdzie $0 \leqslant b < q^k$. Liczba b jest postaci $a_{k-1}q^{k-1} + \cdots + a_1 q^1 + a_0$, gdzie $a_0, \dots, a_{k-1} \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Zatem $a = m_r q^{r+k} + \cdots + m_1 q^{1+k} + m_0 q^k + a_{k-1}q^{k-1} + \cdots + a_1 q^1 + a_0$, czyli a jest (m,q)-liczbą. ⊠

W szczególności dla $q = 10$ mamy:

6.1.2. *Niech $m, a \in \mathbb{N}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Liczba a jest m-liczbą.*

(2) *Istnieje nieujemna liczba całkowita k taka, że $m10^k \leqslant a < (m+1)10^k$.*

Drobne modyfikacje dowodu faktu 6.1.1 pozwalają wykazać następującą wersję tego faktu dla liczb rzeczywistych.

6.1.3. *Niech $m, q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Początkowe cyfry rozwinięcia w systemie numeracji o podstawie q liczby a są odpowiednio równe cyfrom liczby m zapisanej w tym systemie numeracji.*

(2) *Istnieje nieujemna liczba całkowita k taka, że $mq^k \leqslant a < (m+1)q^k$.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.2 Twierdzenia o granicach

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.2.1 (W. Pompe)**.** *Dany jest rosnący ciąg (a_n) liczb dodatnich rozbieżny do nieskończoności oraz dane są liczby naturalne m i q, przy czym $q \geqslant 2$. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \tfrac{1}{m},$$

to ciąg (a_n) zawiera nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia w systemie o podstawie q są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia w systemie o podstawie q liczby m. ([Dlt] 3/1998).

D. (W. Pompe [Dlt] 3/1998). Na mocy ciągłości i monotoniczności funkcji logarytmicznej dana nierówność jest równoważna nierówności

$$\lim_{n\to\infty} (\log_q a_{n+1} - \log_q a_n) < log_q(m+1) - \log_q m.$$

Istnieje więc liczba naturalna n_0 taka, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ zachodzi nierówność $\log_q a_{n+1} - \log_q a_n < \log_q(m+1) - \log_q m$, czyli

$$\log_q a_{n+1} < \log_q a_n + \log_q(m+1) - \log_q m.$$

Niech $s := \left[\log_q a_{n_0+1} - \log_q m\right] + 1$. Wtedy dla wszystkich n większych od pewnego n_1 (większego od n_0) zachodzi nierówność $s + \log_q m \leqslant \log_q a_{n+1}$. Spośród wszystkich takich n wybierzmy n najmniejsze. Wówczas $\log_q a_n < s + \log_q m$. Mamy zatem $s + \log_q m < \log_q a_{n+1} < \log_q a_n + \log_q(m+1) - \log_q m < s + \log_q m + \log_q(m+1) - \log_q m = s + \log_q(m+1)$, czyli

$$s + \log_q m < \log_q a_{n+1} < s + \log_q(m+1).$$

Zatem $mq^s < a_{n+1} < (m+1)q^s$ i stąd wynika, że początkowe cyfry (w systemie o podstawie q) wyrazu $u := a_{n+1}$ są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia w systemie o podstawie q liczby m.

Ponieważ ciąg (a_n) jest rosnący, więc rozpatrując podciąg tego ciągu składający się z wszystkich wyrazów większych od u otrzymamy - na mocy powyższego rozumowania - następny wyraz ciągu posiadający żądaną własność. Powtarzając ten proces stwierdzamy, że takich wyrazów istnieje nieskończenie wiele. ⊠

W powyższym twierdzeniu wyrazami danego ciągu (a_n) mogą być dowolne dodatnie liczby rzeczywiste. Stosując to dla ciągów o wyrazach naturalnych otrzymujemy:

6.2.2. *Dany jest rosnący ciąg (a_n) liczb naturalnych oraz dane są liczby naturalne m i q, przy czym $q \geqslant 2$. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \tfrac{1}{m},$$

to w ciągu (a_n) istnieje nieskończenie wiele (m, q)-liczb.

W szczególności dla $q = 10$ twierdzenie to ma następującą postać.

6.2.3. *Dany jest rosnący ciąg* (a_n) *liczb naturalnych oraz dana jest liczba naturalna* m. *Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \tfrac{1}{m},$$

to w ciągu (a_n) *istnieje nieskończenie wiele* m*-liczb.*

W pewnych dowodach następnych faktów wykorzystamy różne warianty znanego twierdzenia Kroneckera o zbiorach gęstych (patrz na przykład: [HW4] 375; [Kw] 12(1974) 28, 72; [Kw] 7(1986) 6; [Dlt] 6(2001)).

6.2.4 (Twierdzenie Kroneckera). *Jeśli* γ *jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{a\gamma + b;\ \ a, b \in \mathbb{Z}\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

Dowód dokładnie takiego twierdzenia Kroneckera znajduje się w [N15], w rozdziale "*Gęste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych*". Przypomnijmy, że dany podzbiór A zbioru $\mathbb{R}$ jest *gęsty*, jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$ istnieje liczba rzeczywista u taka, że $u \in A$ oraz $x < u < y$.

Następne cztery twierdzenia, które przedstawiamy bez dowodów, są pewnymi wariantami powyższego twierdzenia Kroneckera.

6.2.5. *Niech* γ *będzie dodatnią liczbą niewymierną i niech* $a < b$. *Istnieje wówczas liczba naturalna* p *posiadająca następującą własność. Dla każdej liczby rzeczywistej* $x > a$ *istnieje takie* $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, *że liczba* $x + j\gamma$ *leży w jednym z przedziałów* (a, b), $(1 + a, 1 + b)$, $(2 + a, 2 + b), \cdots$. ([Dlt] 3(1998) 11).

6.2.6. *Niech* $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ *będą dodatnimi liczbami niewymiernymi i niech* $a < b$. *Istnieją wtedy liczby naturalne* n *oraz* $m_1, \dots, m_t$ *takie, że* $a < n\gamma_j - m_j < b$ *dla wszystkich* $j = 1, 2, \dots, t$.

6.2.7. *Niech* $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ *będą dodatnimi liczbami niewymiernymi i niech* $a < b$. *Istnieje wówczas liczba naturalna* p *posiadająca następującą własność. Dla każdej liczby rzeczywistej* $x > a$ *i dla każdego* $i \in \{1, \dots, t\}$ *istnieje* $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ *takie, że liczba* $x + j\gamma_i$ *leży w jednym z przedziałów* (a, b), $(1 + a, 1 + b)$, $(2 + a, 2 + b), \cdots$.

6.2.8. *Niech* γ *będzie liczbą niewymierną,* δ *liczbą rzeczywistą oraz niech* u, v *będą liczbami rzeczywistymi takimi, że* $0 \leqslant u < v \leqslant 1$. *Dla każdej liczby naturalnej* n *niech* a_n *będzie liczbą tych wszystkich wyrazów ciągu*

$$\gamma + \delta,\ 2\gamma + \delta,\ 3\gamma + \delta,\ \dots,\ n\gamma + \delta,$$

których część ułamkowa należy do przedziału $[u, v]$. *Wtedy ciąg* $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ *posiada granicę i granica ta jest równa* $v - u$. ([Kw] 5(1978) 2-7).

6.2.9 (W. Pompe)**.** *Dany jest ciąg (a_n) liczb dodatnich. Jeśli istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$$

i $\log r$ jest liczbą niewymierną, to dla dowolnej liczby naturalnej m w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby m. ([Dlt] 3(1998) 10).

D. ([Dlt] 3/1998). Niech $m \in \mathbb{N}$ i niech $\gamma := \log r$. Przyjmijmy

$$a := \tfrac{2}{3}\log m + \tfrac{1}{3}\log(m+1), \quad b := \tfrac{1}{3}\log m + \tfrac{2}{3}\log(m+1).$$

Wtedy $b > a$ (gdyż $b - a = \frac{1}{3}(\log(m+1) - \log m)$). Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}(\log a_{n+1} - \log a_n) = \log r = \gamma > 0, \tag{1}$$

ciąg $(\log a_n)$ jest rozbieżny do nieskończoności. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\log a_n > a$. Wykorzystamy twierdzenie 6.2.5. Niech p będzie liczbą naturalną taką, jak w tym twierdzeniu. Z (1) wynika, że istnieje liczba naturalna s taka, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant s$ zachodzi nierówność:

$$|\log a_{n+1} - \log a_n - \gamma| < \tfrac{b-a}{p}.$$

Niech $x = \log a_s$. Wtedy $x > a$. Zatem z twierdzenia 6.2.5 wynika, że istnieją liczby $k \in \mathbb{N}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ takie, że

$$k + a < \log a_s + j\gamma < k + b. \tag{2}$$

Z drugiej zaś strony, z nierówności trójkąta otrzymujemy: $|\log a_{s+j} - \log a_s - j\gamma| \leqslant |\log a_{s+j} - \log a_{s+j-1} - \gamma| + |\log a_{s+j-1} - \log a_{s+j-2} - \gamma| + \dots + |\log a_{s+1} - \log a_s - \gamma| < j\frac{b-a}{p} \leqslant b - a$, czyli

$$-b + a < \log a_{s+j} - \log a_s - j\gamma < b - a. \tag{3}$$

Dodając stronami nierówności (2) i (3) otrzymujemy: $k + \log m < \log a_{s+j} < k + \log(m+1)$, czyli $m10^k < a_{s+j} < (m+1)10^k$. To oznacza, na mocy 6.1.3, że początkowe cyfry liczby a_{s+j} odpowiednio się pokrywają z cyframi liczby m.

Wykazaliśmy więc, że w ciągu (a_n) istnieje liczba o żądanej własności. Jest jasne, że takich liczb jest nieskończenie wiele. ⊠

Zamieniając w powyższym dowodzie wszystkie liczby 10 liczbą naturalną $q \geqslant 2$ oraz wszystkie logarytmy na logarytmy o podstawie q, otrzymujemy następującą wersję tego twierdzenia dla systemów numeracji o podstawie q.

6.2.10. *Niech $q \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Dany jest ciąg (a_n) liczb dodatnich. Jeśli istnieje granica*

$$\lim \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$$

i $\log_q r$ jest liczbą niewymierną, to dla dowolnej liczby naturalnej m w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia w systemie o podstawie q są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia o podstawie q liczby m.

Korzystając z faktu 6.2.7 i powtarzając ideę dowodu twierdzenia 6.2.9 otrzymujemy:

6.2.11. *Dane są ciągi* $\left(a_n^{(1)}\right)$, $\left(a_n^{(2)}\right), \dots, \left(a_n^{(t)}\right)$ *liczb dodatnich. Jeśli istnieją granice*

$$\lim \frac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} = r_1 > 1, \quad \dots, \quad \lim \frac{a_{n+1}^{(t)}}{a_n^{(t)}} = r_t > 1$$

i wszystkie liczby $\log r_1, \dots, \log r_t$ *są niewymierne, to dla dowolnej liczby naturalnej* m *istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego każdej z liczb* $a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(t)}$ *są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby* m.

Zamieniając wszystkie logarytmy na logarytmy o podstawie $q \geqslant 2$, otrzymujemy następującą wersję tego twierdzenia dla systemów numeracji o podstawie q.

6.2.12. *Niech* $q \geqslant 2$ *będzie liczbą naturalną. Dane są ciągi* $\left(a_n^{(1)}\right)$, $\left(a_n^{(2)}\right), \dots, \left(a_n^{(t)}\right)$ *liczb dodatnich. Jeśli istnieją granice*

$$\lim \frac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} = r_1 > 1, \quad \dots, \quad \lim \frac{a_{n+1}^{(t)}}{a_n^{(t)}} = r_t > 1$$

i wszystkie liczby $\log_q r_1, \dots, \log_q r_t$ *są niewymierne, to dla dowolnej liczby naturalnej* m *istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że początkowe cyfry rozwinięcia w systemie numeracji o podstawie* q *każdej z liczb* $a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(t)}$ *są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia w systemie numeracji o podstawie* q *liczby* m.

★ K. G. Bankow, *O pewnym twierdzeniu Kroneckera*, [Kw] 7/1986 5-7.
G. H. Hardy, E. M. Wright, *Kronecker's Theorem*, [HW4] 375-393.
K. Pióro, *Twierdzenie Kroneckera*, [Dlt] 6/2001, 12-13.
Waldemar Pompe, *O początkowych cyfrach symboli Newtona*, [Dlt] 3(1998) 10-11.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.3 Początkowe cyfry ciągów wielomianowych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.3.1. *Niech* $f(x)$ *będzie wielomianem należącym do* $\mathbb{Z}[x] \setminus \mathbb{Z}$, *którego wiodący współczynnik jest dodatni. Niech* $m \in \mathbb{N}$. *Wówczas w ciągu* $(f(n))$ *istnieje nieskończenie wiele* m*-liczb. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Z założeń wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Ciąg $(f(n))$ jest więc, począwszy od pewnego miejsca, ściśle rosnący i oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1 < 1 + \frac{1}{m}$. Teza wynika zatem z 6.2.2. ⊠

6.3.2. *Niech* $f(x)$ *będzie wielomianem o dodatnim wiodącym współczynniku, należącym do* $\mathbb{Q}[x] \setminus \mathbb{Q}$, *takim, że* $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$. *Niech* $m \in \mathbb{N}$. *Wówczas w ciągu* $(f(n))$ *istnieje nieskończenie wiele* m*-liczb. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Z założeń wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Ciąg $(f(n))$ jest więc począwszy od pewnego miejsca ściśle rosnący i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1 < 1 + \frac{1}{m}$. Teza wynika zatem z 6.2.1. ⊠

6.3.3. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb kwadratowych. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.* ([S64] z.163, [S70] z.212).

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.1 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = x^2$. ⊠

6.3.4. *Czy zapis dziesiętny liczby kwadratowej może rozpoczynać się od 1983 dziewiątek?* ([GaT] 8/83).

O. Może. Niech $n = 99\dots995$ (1983 dziewiątki). Wtedy $n^2 = 99\dots9900\dots0025$ (1983 dziewiątki i 1983 zera). Uwaga. Wynika to również z 6.3.3. ⊠

6.3.5. *Istnieje 199-cyfrowa liczba kwadratowa posiadająca na początku 99 dziewiątek.* ([Fom] 33/72, [WyKM] 587-72).

6.3.6. *Nie istnieje liczba kwadratowa 20-cyfrowa posiadająca na początku 11 jedynek.* ([Fom] 25/74).

6.3.7. *Nie istnieje liczba naturalna $n > 1$ niepodzielna przez 10, której zapis dziesiętny jest początkowym fragmentem zapisu dziesiętnego liczby n^2.* ([Zw] 2003).

6.3.8. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb postaci n^3. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.1 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = x^3$. ⊠

6.3.9. *Czy sześcian może się rozpoczynać cyframi $1, 9, 9, 8$?* Odp. *Tak. Przykłady:* $12596^3 = 1998471484736$, $12597^3 = 199847500173$. *Liczba* 12596 *jest najmniejsza o tej własności.* ([Kw] 3/1999).

6.3.10. *Czy sześcian może się rozpoczynać cyframi $2, 0, 0, 2$?* ([KoM] 2002 B3557).

6.3.11. *Istnieją liczby naturalne a, niepodzielne przez 10 takie, że początkowe cyfry liczby a^3 tworzą liczbę a. Przykłady:* $32^3 = 32\,768$, $31623^3 = 31623\,446801367$. *Jeśli $(p+1)$-sza cyfra po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{10}$ jest większa od 5, to liczba $a = \left[10^p \cdot \sqrt{10}\right] + 1$ ma tę własność.* ([Crux] 1995 z.1932 s.94, [Ko02]).

6.3.12. *Niech $s \geqslant 1$. Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb postaci n^s. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.1 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = x^s$. ⊠

6.3.13. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb trójkątnych. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.* ([S62] 41).

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.2 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$. ⊠

6.3.14. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb tetraedralnych. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.* ([S62] 57).

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.2 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$. ⊠

6.3.15. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb wielokątnych ustalonej postaci. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Wynika z twierdzenia 6.3.2. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.4 Początkowe cyfry postępów arytmetycznych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.4.1. *Niech $m, q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$. W każdym rosnącym postępie arytmetycznym liczb naturalnych istnieje nieskończenie wiele (m, q)-liczb.*

D. Sposób I ([S64] z.55, [S70] z.63). Niech $a_n = an + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$. Niech $b = at + r$, $t, r \in \mathbb{Z}$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant r < a$. Wtedy $a_n = a(n + t) + r$. Niech k będzie liczbą naturalną taką, że $q^k > 2a(t + 1)$. Wtedy $q^k > 2a$ oraz $\frac{mq^k}{a} > 2m(t + 1) = 2mt + 2m > t + 1$, czyli liczba $\frac{mq^k}{a} - t$ jest dodatnia. Niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną większą od $\frac{mq^k}{a} - t$. Wtedy $n \geqslant 1$ oraz $n - 1 < \frac{mq^k}{a} - t$ i stąd $n + 1 < \frac{mq^k}{a} + 2 - t = \frac{mq^k+2a}{a} - t < \frac{mq^k+q^k}{a} - t = \frac{(m+1)q^k}{a} - t$, czyli $n+1 < \frac{(m+1)q^k}{a} - t$. Mamy zatem: $mq^k = a\left(\frac{mq^k}{a} - t\right) + at < an+at \leqslant an+at+r = a_n < an+at+a = a(n + 1) + at < a\left(\frac{(m+1)q^k}{a} - t\right) + at = (m + 1)q^t$. Wykazaliśmy więc, że $mq^k < a_n < (m + 1)q^k$. To oznacza, na mocy 6.1.1, że a_n jest (m, q)-liczbą.

W ciągu arytmetycznym (a_n) istnieje więc (m, q)-liczba. Oznaczmy ją przez u. Rozważając teraz podciąg ciągu (a_n) składający się z wszystkich wyrazów większych od u, otrzymujemy rosnący ciąg arytmetyczny, który - na mocy powyższego rozumowania - również posiada (m, q)-liczbę. Powtarzając ten proces stwierdzamy, że takich (m, q)-liczb w ciągu (a_n) istnieje nieskończenie wiele. ⊠

D. Sposób II. Teza wynika natychmiast z twierdzenia 6.3.1 zastosowanego dla wielomianu $f(x)$ postaci $ax + b$. ⊠

6.4.2. *Niech $m \in \mathbb{N}$. W każdym rosnącym postępie arytmetycznym liczb naturalnych istnieje nieskończenie wiele m-liczb.* (6.4.1 dla $q = 10$, [Mat] 3/1962 129, [S64] 55).

6.4.3. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Dla każdej liczby naturalnej a istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że początkowe cyfry liczby na tworzą liczbę m.* (Wynika z 6.4.2).

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.5 Początkowe cyfry liczb potęgowych

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.5.1. *Niech $a, m, q \in \mathbb{N}$, przy czym $q \geqslant 2$. Jeśli $\log_q a$ jest liczbą niewymierną, to w ciągu (a^n) istnieje nieskończenie wiele (m, q)-liczb.*

D. Sposób I. Załóżmy, że $\gamma := \log_q a$ jest liczbą niewymierną. Wystarczy oczywiście udowodnić, że w ciągu (a^n) istnieje co najmniej jedna (m, q)-liczba. Na mocy 6.1.1 sprowadza się to do udowodnienia, że istnieją liczby naturalne k, n takie, że $mq^k \leqslant a^n < (m+1)q^k$. To jest natomiast równoważne temu, że istnieją liczby naturalne k, n takie, że $k + \log_q m \leqslant n \log_q a < k + \log_q(m + 1)$ czyli, że $\log_q m \leqslant n\gamma - k < \log_q(m + 1)$. Istnienie takich liczb naturalnych wynika z twierdzenia 6.2.5.

Sposób II. Wynika to natychmiast z twierdzenia 6.2.9. ⊠

Z powyższych faktów, zastosowanych dla $q = 10$, otrzymujemy następujące wnioski.

6.5.2. *Niech $a, m \in \mathbb{N}$. Jeśli a nie jest potęgą dziesiątki, to w ciągu (a^n) istnieje nieskończenie wiele liczb, których początkowe cyfry są odpowiednio równe cyfrom liczby m.*

6.5.3. *Niech $m, q \in \mathbb{N}$, przy czym $q \geqslant 2$. Niech $a_1, \dots, a_t$ będą liczbami naturalnymi, z których żadna nie jest potęgą dziesiątki. Istnieje wówczas taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry w systemie numeracji o podstawie q wszystkich liczb $a_1^n, a_2^n, \dots, a_t^n$ są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom w systemie numeracji o podstawie q liczby m.*

D. Sposób I. Na mocy 6.1.1 sprowadza się to do udowodnienia, że istnieje liczba naturalna n oraz istnieją liczby naturalne $k_1, \dots, k_t$ takie, że $mq^{k_i} \leqslant a_i^n < (m + 1)q^{k_i}$ dla wszystkich $i = 1, \dots, t$. To jest natomiast równoważne temu, że $k_i + \log_q m \leqslant n \log_q a_i < k_i + \log_q(m + 1)$ czyli, że $\log_q m \leqslant n \log a_i - k_i < \log_q(m + 1)$ dla $i = 1, \dots, t$. Istnienie takich liczb naturalnych wynika z twierdzenia 6.2.6.

Sposób II. Wynika to natychmiast z twierdzenia 6.2.12. ⊠

W szczególności dla $q = 10$ otrzymujemy:

6.5.4. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Niech $a_1, \dots, a_t$ będą liczbami naturalnymi takimi, że wszystkie liczby $\log a_1, \dots, \log a_t$ są niewymierne. Istnieje wówczas taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego wszystkich liczb $a_1^n, a_2^n, \dots, a_t^n$ są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby m.*

6.5.5. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry liczb 2^n i 5^n są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom liczby m.* ([Dlt] 3/1998, wynika z 6.5.4).

6.5.6. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry liczb 2^n, 3^n, 5^n i 7^n są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom liczby m.* (Wynika z 6.5.4).

Z twierdzenia 6.5.2 wynika w szczególności, że jeśli a jest liczbą naturalną, to w ciągu (a^n) istnieje nieskończenie wiele wyrazów, których pierwszą cyfrą (w zapisie dziesiętnym) jest jedynka. Jeśli jeszcze dodatkowo a nie jest potęgą dziesiątki, to w ciągu (a^n) istnieje nieskończenie wiele takich wyrazów, których pierwszą cyfrą jest ustalona niezerowa cyfra c.

6.5.7. *Niech $a, n \in \mathbb{N}$ oraz $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Załóżmy, że a nie jest potęgą dziesiątki i $a^n \geqslant 10c$. Wtedy następujące dwa warunki są równoważne:*

(1) *pierwsza cyfra liczby a^n jest równa c;*

(2) *część ułamkowa liczby $n \log a - \log c$ jest ostro mniejsza od $\log \frac{c+1}{c}$.* ([Kw] 5(1978) 3-4).

D. Część ułamkową liczby rzeczywistej x oznaczamy przez $\{x\}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że c jest pierwszą cyfrą liczby a^n. Istnieje wtedy taka liczba naturalna m, że

$$c \cdot 10^m \leqslant a^n < (c+1) \cdot 10^m.$$

Nierówności te logarytmujemy i kolejno przekształcamy:

$$\begin{gathered} m + \log c \leqslant n \log a < m + \log(c+1), \\ 0 \leqslant n \log a - m - \log c < \log(c+1) - \log c, \\ 0 \leqslant (n \log a - \log c) - m < \log \tfrac{c+1}{c}. \end{gathered}$$

Ale $\frac{c+1}{c} = 1 + \frac{1}{c} \leqslant 2 < 10$, więc $\log \frac{c+1}{c} < 1$, a zatem $0 \leqslant (n \log a - \log c) - m < 1$ i stąd otrzymujemy nierówność $\{n \log a - \log c\} < \frac{c+1}{c}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy teraz, że $\{n \log a - \log c\} < \frac{c+1}{c}$. Ponieważ $a^n \geqslant 10c$, więc $n \log c \geqslant 1 + \log c$, a więc $n \log a - \log c \geqslant 1$. Istnieje zatem taka liczba naturalna m, że

$$0 \leqslant (n \log a - \log c) - m < \log \frac{c+1}{c}.$$

Z tych nierówności, po przekształceniach takich jak w pierwszej części tego dowodu tylko w odwrotnym kierunku, otrzymujemy nierówności $c \cdot 10^m \leqslant a^n < (c+1) \cdot 10^m$, z których wynika, że c jest pierwszą cyfrą liczby a^n. ⊠

Następne twierdzenie jest natychmiastową konsekwncją twierdzeń 6.5.7 i 6.2.8.

6.5.8. *Niech $a \in \mathbb{N}$ oraz $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Załóżmy, że a nie jest potęgą dziesiątki. Dla każdej liczby naturalnej n niech d_n będzie liczbą tych wszystkich wyrazów ciągu*

$$a^1, \ a^2, \ a^3, \ \dots, \ a^n,$$

których pierwszą cyfrą (w zapisie dziesiętnym) jest c. Wtedy ciąg $\left(\frac{d_n}{n}\right)$ posiada granicę i granica ta jest równa $\log(c+1) - \log c$. ([Kw] 5(1978), [Mon] 118(7)(2011)).

W języku stosowanym w teorii rachunku prawdopodobieństwa powyższe twierdzenie można wysłowić w następujący sposób. Prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo potęga ustalonej liczby naturalnej a ma na pierwszym miejscu cyfrę c, jest równe $\log(c+1) - \log c$. Zauważmy, że to prawdopodobieństwo nie zależy od liczby a. Zakłada się tylko, że a nie jest potęgą dziesiątki. Prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo potęga dwójki ma jedynkę na pierwszym miejscu, jest takie samo, jak prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo potęga trójki (lub piątki albo na przykład liczby 357) ma jedynkę na pierwszym miejscu.

Rozważaliśmy system dziesiętny. To samo można udowodnić dla dowolnego systemu numeracji o podstawie $q \geqslant 2$. W dowodach zamieniamy tylko liczbę 10 na liczbę q oraz logarytmy dziesiętne zamieniamy na logarytmy przy podstawie q. W szczególności mamy następujące twierdzenie.

6.5.9. *Niech* $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$ *oraz* $c \in \{1, 2, \dots, q-1\}$. *Załóżmy, że* $\log_q a$ *jest liczbą niewymierną. Dla każdej liczby naturalnej* n *niech* d_n *będzie liczbą tych wszystkich wyrazów ciągu*

$$a^1,\ a^2,\ a^3,\ \dots,\ a^n,$$

których pierwszą cyfrą w zapisie numeracji o podstawie q *jest* c. *Wtedy ciąg* $\left(\frac{d_n}{n}\right)$ *posiada granicę i granica ta jest równa* $\log_q(c+1) - \log_q c$.

Zauważmy, że w systemie dwójkowym powyższe twierdzenie jest oczywiste. Jeśli $q = 2$, to jedyną niezerową cyfrą jest $c = 1$ oraz każda potęga dowolnej liczby naturalnej ma, w dwójkowym systemie numeracji, pierwszą cyfrę równą 1. W tym przypadku dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi więc równość $d_n = n$, a zatem $\lim \frac{d_n}{n} = \lim \frac{n}{n} = 1$ i oczywiście $\log_2 2 - \log_2 1 = 1 - 0 = 1$.

★

W. Bołtiański, *Czy często potęgi dwójki rozpoczynają się jedynką?*, [Kw] 5/1978 2-7.

K. A. Ross, *Benford's law, a growth industry*, [Mon] 7(118) 571-583.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.6 Początkowe cyfry symboli Newtona

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przedstawiamy obszerne fragmenty artykułu *Początkowe cyfry symboli Newtona*, napisanego wspólnie z Grzegorzem Bartczakiem, opublikowanego w Delcie 9/1997, 14-15.

Spójrzmy na kilka przykładów.

$$\begin{aligned}
\binom{1997}{1} &= 1997 \\
\binom{1999}{2} &= 1997001 \\
\binom{494}{3} &= 19970444 \\
\binom{4681}{4} &= 19979587391790 \\
\binom{7517}{5} &= 199739353621084563 \\
\binom{1562}{6} &= 19979205577825494 \\
\binom{7207}{7} &= 1997953035872003993 19241 \\
\binom{4108}{8} &= 1997841430944510255346671 \\
\binom{9653}{9} &= 19979176557875313276158532371 50 \\
\binom{158}{10} &= 1997837760676615
\end{aligned}$$

Każda z wypisanych tu liczb rozpoczyna się cyframi $1, 9, 9, 7$. Nasuwa się pytanie:

Czy dla każdego k *istnieje* n *takie, że liczba* $\binom{n}{k}$ *jest postaci* $1997\dots$ *?*

Wykażemy, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Wykażemy więcej. Udowodnimy następujące twierdzenie.

6.6.1. *Niech* k *będzie liczbą naturalną i niech* $c_1 \neq 0, c_2, \dots, c_m$ *będzie dowolnym ciągiem cyfr układu dziesiętnego. Istnieje wtedy liczba naturalna* n *taka, że początkowe cyfry liczby* $\binom{n}{k}$ *są równe odpowiednio* $c_1, c_2, \dots, c_m$.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy dwa lematy.

6.6.2. *Załóżmy, że a, b, c są liczbami rzeczywistymi, $b > a$ oraz $c > 0$. Istnieje wtedy liczba naturalna s_0 taka, że dla wszystkich liczb naturalnych $s \geqslant s_0$ zachodzi nierówność $sb > sa + c$.*

D. Niech $s_0 = \left[\frac{c}{b-a}\right] + 1$ (przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby x). Wówczas s_0 jest liczbą naturalną i dla wszystkich $s \geqslant s_0$ mamy:

$$s \geqslant s_0 = \left[\frac{c}{b-a}\right] + 1 > \frac{c}{b-a}.$$

Zatem, jeśli $s \geqslant s_0$, to $s(b-a) > c$, czyli $sb > sa + c$. ⊠

6.6.3. *Niech u, v będą liczbami rzeczywistymi i niech k będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że $u - v > k > 1$. Istnieje wtedy liczba naturalna n taka, że $u > n > n - k + 1 > v$.*

D. Przyjmijmy $n = [v] + k$. Wtedy: $u > v + k \geqslant [v] + k = n > n - k + 1 = [v] + 1 > v$. ⊠

Teraz możemy już udowodnić zapowiedziane twierdzenie.

Dowód twierdzenia 6.6.1. Niech $a = \sqrt[k]{M}$, $b = \sqrt[k]{M+1}$, $c = \sqrt[k]{(k!)^{k-1}}$, gdzie

$$M = c_1 10^{m-1} + c_2 10^{m-2} + \cdots + c_{m-1} 10 + c_m.$$

Twierdzenie jest oczywiste dla $k = 1$. W tym przypadku wystarczy za n przyjąć liczbę M (gdyż $\binom{M}{1} = M$). Załóżmy więc dalej, że $k > 1$.

Z lematu 6.6.2 wynika, że istnieje liczba naturalna t spełniająca nierówność $10^t b > c + 10^t a$, czyli

$$10^t \sqrt[k]{M+1} > \sqrt[k]{(k!)^{k-1}} + 10^t \sqrt[k]{M}.$$

Mnożąc tę nierówność stronami przez $\sqrt[k]{k!}$ otrzymujemy:

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} > k! + 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!}$$

i stąd

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} - 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!} > k! \geqslant k > 1.$$

Z lematu 6.6.3 wynika teraz, że istnieje liczba naturalna n spełniająca nierówności:

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} > n > n - k + 1 > 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!}.$$

Podnosząc to do k-tej potęgi i dzieląc stronami przez $k!$ otrzymujemy:

$$10^{kt}(M+1) > \frac{n^k}{k!} > \frac{(n-k+1)^k}{k!} > 10^{kt} M$$

i stąd dalej

$$10^{kt}(M+1) > \frac{n^k}{k!} > \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} > \frac{(n-k+1)^k}{k!} > 10^{kt} M.$$

Wykazaliśmy zatem, że istnieje liczba naturalna n taka, że

$$10^{kt}(M+1) > \binom{n}{k} > 10^{kt} M.$$

Początkowe cyfry liczby $\binom{n}{k}$ są więc odpowiednio równe cyfrom liczby M czyli cyfrom $c_1, c_2, \ldots c_m$. To kończy dowód twierdzenia. ⊠

Twierdzenie zachodzi dla cyfr dowolnego układu numeracji (niekoniecznie dziesiętnego). Chcąc się o tym przekonać wystarczy w przedstawionym dowodzie zastąpić wszystkie występujące w nim liczby 10 podstawą numeracji $q > 1$. Mamy zatem

6.6.4. *Niech $q \geqslant 2$, m, k będą liczbami naturalnymi. Istnieje wówczas liczba naturalna n taka, że początkowe cyfry rozwinięcia przy podstawie q liczby $\binom{n}{k}$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia przy podstawie q liczby m.*

Z dowodu wynika również, że liczb n, o których mowa w twierdzeniu, istnieje nieskończenie wiele.

Inny dowód twierdzenia 6.6.1. (W. Pompe [Dlt] 3/1998). Niech $f(x) = \frac{1}{k!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$. Wtedy $f(x)$ jest wielomianem należącym do $\mathbb{Q}[x] \smallsetminus \mathbb{Q}$ o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze i takim, że $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$. Ponadto, $f(n) = \binom{n}{k}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Teza wynika zatem z 6.3.2. ⊠

6.6.5. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje liczba naturalna n taka, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\binom{2n}{n}$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby m.* (W. Pompe [Dlt] 3(1998)).

D. Niech $a_n = \binom{2n}{n}$. Ponieważ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+2}{n+1}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$. Liczba $\log 4$ jest niewymierna. Teza wynika zatem z 6.2.9. ⊠

6.6.6. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje liczba naturalna n taka, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\binom{3n}{n}$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby m.* (W. Pompe [Dlt] 3(1998)).

D. Niech $a_n = \binom{3n}{n}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{27}{4}$ i liczba $\log \frac{27}{4}$ jest niewymierna, więc teza wynika z twierdzenia 6.2.9. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.7 Początkowe cyfry i różne ciągi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.7.1. *Istnieje liczba naturalna n taka, że liczba $n!$ rozpoczyna się cyframi:*

(1) $1, 9, 6, 6$; ([GaT] 15/66).

(2) $1, 9, 9, 3$; ([OM] Niemcy 1993).

(3) $1, 9, 9, 5$; ([ME] 1/1996).

6.7.2. *Nie istnieje liczba naturalna n taka, że dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ pierwszą cyfrą liczby $(n+k)!$ jest k.* ([IMO] Shortlist 2001).

6.7.3. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr (układu dziesiętnego) $c_1, c_2, \dots, c_n$ istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, których n początkowymi cyframi są kolejno $c_1, \dots, c_n$.* ([Trost] 51, [S59] 412).

6.7.4. *Niech (u_n) będzie ciągiem liczb Fibonacciego ($u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$). Wówczas dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele takich wyrazów ciągu (u_n), których początkowe cyfry są odpowiednio równe cyfrom liczby m.* ([Crux] 2000 485-486 z.A237).

D. Wiadomo, że $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, gdzie $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Korzystając z tego, łatwo wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha > 1$. Ponadto, $\log \alpha$ jest liczbą niewymierną. Teza wynika zatem z twierdzenia 6.2.9. ⊠

6.7.5. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry liczby 2^n i liczby Fibonacciego u_n są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom liczby m.*

D. Wiemy (patrz dowód 6.7.4), że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$, gdzie $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. Ponadto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ oraz liczby $\log \alpha$ i $\log 2$ są niewymierne. Teza wynika zatem z twierdzenia 6.2.11. ⊠

★ M. Dulnikowska, *Początkowe cyfry klasycznych ciągów*, [Pmgr] 2007.
R. E. Whitney, *Initial digits for the sequence of primes*, [Mon] 79(2)(1972) 150-152.

Literatura

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Fom] D. V. Fomin, *Sankt-Petersburskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Politechnika, Sankt-Petersburg, 1994.

[GaT] G. A. Galpierin, A. K. Tołpygo, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), 1935-1985, Moskwa, 1986.

[HW4] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1960.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[Ko02] L. Kourliandtchik, *Impresje Liczbowe*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń, 2001.

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2012.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[ME] Mathematical Excalibur, chińskie popularne czasopismo matematyczne, Hong Kong.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N15] A. Nowicki, *Liczby, Funkcje, Ciągi, Zbiory, Geometria*, Podróże po Imperium Liczb, cz.15, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[S62] W. Sierpiński, *Liczby Trójkątne*, Biblioteczka Matematyczna 12, PZWS, Warszawa, 1962.

[S64] W. Sierpiński, *200 Zadań z Elementarnej Teorii Liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa, 1964.

[S70] W. Sierpiński, 250 *Problems in Elementary Number Theory*, New York, Warszawa, 1970.

[Trost] E. Trost, *Primzahlen*, Verlag Birkhauser, Basel - Stuttgard. Tłumaczenie rosyjskie, Moskwa 1959.

[WyKM] W. A. Wyszenskij, I. W. Kartaszow, W. I. Michaiłowskij, M. I. Jadrenko, *Zbiór Zadań Kijowskich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), 1935-1983, Kijów, 1984.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.