

Podróże po Imperium Liczb  
**05 Funkcje Arytmetyczne**

**Andrzej Nowicki**

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Wersja poprawiona i uzupełniona  
10 maja 2012

<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>1 Funkcje arytmetyczne i splot Dirichleta</b>	<b>5</b>
1.1 Splot Dirichleta . . . . .	6
1.2 Funkcje moltiplikatywne . . . . .	10
1.3 Funkcje w pełni moltiplikatywne . . . . .	13
1.4 Funkcje postaci $f^{(m)}$ . . . . .	15
1.5 Pewne algebraiczne własności pierścienia funkcji arytmetycznych . . . . .	17
1.6 Różne fakty i zadania o funkcjach arytmetycznych . . . . .	19
1.7 Splot Dirichleta i klasyczne funkcje arytmetyczne . . . . .	21
1.8 Inne sploty . . . . .	21
<b>2 Funkcja Möbiusa</b>	<b>23</b>
2.1 Definicja i podstawowe własności . . . . .	23
2.2 Własności splotowe funkcji Möbiusa . . . . .	25
2.3 Funkcja Möbiusa i funkcje z warunkiem $n \mid f(n)$ . . . . .	28
2.4 Funkcja Möbiusa i część całkowita . . . . .	29
2.5 Funkcja Möbiusa i kolejne liczby naturalne . . . . .	31
2.6 Funkcja Möbiusa i liczby nierozkładalnych wielomianów . . . . .	31
<b>3 Funkcja Eulera</b>	<b>35</b>
3.1 Wzór na obliczanie wartości funkcji $\varphi$ i moltiplikatywność . . . . .	36
3.2 Funkcja $\varphi$ i splot Dirichleta . . . . .	38
3.3 Własności funkcji $\varphi$ . . . . .	41
3.4 Funkcja $\varphi$ i cyfry . . . . .	44
3.5 Równanie $\varphi(x) = m$ . . . . .	44
3.6 Równania z funkcją $\varphi$ . . . . .	49
3.7 Podzielność $n - 1$ przez $\varphi(n)$ . . . . .	51
3.8 Funkcja $\varphi$ i podzielność . . . . .	52
3.9 Nierówności z funkcją $\varphi$ . . . . .	54
3.10 Iteracje funkcji $\varphi$ . . . . .	55
3.11 Liczby postaci $\varphi(n)/n$ lub $n/\varphi(n)$ . . . . .	56
3.12 Różne fakty i zadania z funkcją $\varphi$ . . . . .	56
3.13 Funkcja $\psi$ . . . . .	57

<b>4</b>	<b>Liczba dzielników naturalnych</b>	<b>59</b>
4.1	Podstawowe fakty o funkcji $\tau$	60
4.2	Przykłady i własności	60
4.3	Funkcja $\tau$ i splot Dirichleta	62
4.4	Liczby $\tau(n^2)$	64
4.5	Liczby $\tau(n^s)$	66
4.6	Liczby $\tau(n)^s$	66
4.7	Kolejne liczby naturalne	66
4.8	Nierówności i funkcja $\tau$	68
4.9	Iteracje funkcji $\tau$	69
4.10	Ciągi rekurencyjne z funkcją $\tau$	70
4.11	Suma sześciąt i kwadrat sumy	72
4.12	Liczba dzielników i szeregi	74
4.13	Różne fakty i zadania dotyczące funkcji $\tau$	75
<b>5</b>	<b>Liczby dzielników szczególnej postaci</b>	<b>77</b>
5.1	Funkcje $d_{4,1}$ i $d_{4,3}$	77
5.2	Funkcje $d_{3,1}$ i $d_{3,2}$	79
5.3	Funkcje $d_{6,1}$ i $d_{6,5}$	80
5.4	Liczba dzielników pierwszych	81
5.5	Inne liczby dzielników szczególnej postaci	84
<b>6</b>	<b>Suma dzielników naturalnych</b>	<b>85</b>
6.1	Własności funkcji $\sigma$	86
6.2	Funkcja $\sigma$ i splot Dirichleta	87
6.3	Równanie $\sigma(x) = k$	88
6.4	Nierówności z funkcją $\sigma$	92
6.5	Liczby postaci $\sigma(n) - n$	93
6.6	Równanie $\sigma(n + k) = \sigma(n) + k$	95
6.7	Funkcja $\sigma$ i kolejne liczby naturalne	97
6.8	Funkcja $\sigma$ i podzielność	98
6.9	Liczby potęgowe postaci $\sigma(n)$	100
6.10	Liczby postaci $\sigma(n)/n$	101
6.11	Różne fakty i zadania o sumie dzielników naturalnych	102
6.12	Funkcja $\sigma_s$	103
<b>7</b>	<b>Liczby doskonałe, nadmierne, deficytowe i inne</b>	<b>105</b>
7.1	Liczby doskonałe	105
7.2	Liczby nadmierne i deficytowe	107
7.3	Równość $\sigma(n) = sn$	108
7.4	Równość $\sigma(n) = sn \pm r$	109
7.5	Równości postaci $a\sigma(n) = bn$	111
7.6	Liczby zaprzyjaźnione	111
7.7	Liczby praktyczne	113

<b>8</b>	<b>Różne funkcje arytmetyczne</b>	<b>115</b>
8.1	Funkcje arytmetyczne zerowe od pewnego miejsca . . . . .	115
8.2	Funkcja odwrotna do funkcji $T_a$ . . . . .	116
8.3	Funkcja odwrotna do funkcji $g(n) = (-1)^{n-1}$ . . . . .	117
8.4	Funkcja $\Lambda$ . . . . .	118
8.5	Funkcje masywne stowarzyszone z nwd i nww . . . . .	120
8.6	Funkcje masywne stowarzyszone z wielomianami . . . . .	122
8.7	Iloczyn dzielników pierwszych . . . . .	124
8.8	Iloczyn naturalnych dzielników . . . . .	124
<b>9</b>	<b>Unitarne dzielniki i unitarny spłot</b>	<b>127</b>
9.1	Dzielniki unitarne . . . . .	127
9.2	Największy wspólny unitarny dzielnik . . . . .	128
9.3	Najmniejsza wspólna unitarna wielokrotność . . . . .	129
9.4	Spłot unitarny . . . . .	130
9.5	Spłot unitarny i funkcje masywne . . . . .	132
9.6	Unitarny odpowiednik funkcji Möbiusa . . . . .	134
9.7	Unitarny odpowiednik funkcji $\tau$ . . . . .	136
9.8	Unitarny odpowiednik funkcji $\sigma$ . . . . .	137
9.9	Unitarny odpowiednik funkcji $\varphi$ . . . . .	138
<b>10</b>	<b>Formalne szeregi potęgowe</b>	<b>139</b>
10.1	Spłot Abela . . . . .	139
10.2	Pierścień $A_0(\mathbb{R})$ jako przestrzeń metryczna . . . . .	141
10.3	Pierścień szeregów formalnych . . . . .	144
10.4	Zbieżne i sumowalne ciągi szeregów formalnych . . . . .	147
10.5	Pochodna szeregów formalnych . . . . .	151
10.6	Funkcje Log i Exp . . . . .	152
10.7	Początkowe przykłady . . . . .	153
10.8	Elementarne ciągi liczbowe i ich formalne szeregi generujące . . . . .	155
10.9	Ciągi rekurencyjne i ich formalne szeregi generujące . . . . .	157
10.10	Pierwiastkowanie szeregów formalnych . . . . .	159
10.11	Iloczyny szeregów formalnych . . . . .	161
10.12	Szeregi formalne i funkcje arytmetyczne . . . . .	165
	<b>Spis cytowanej literatury</b>	<b>168</b>
	<b>Skorowidz nazwisk</b>	<b>174</b>
	<b>Skorowidz</b>	<b>177</b>

---

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń  
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

---

## Skorowidz

- Akbary A., 102  
Aldaz J.M., 54  
Alder H.L., 57, 168  
Alter R., 52  
Andreescu T., 168  
Andrews G.E., 165, 168  
Andrica D., 168  
Annapurna U., 92  
Apostol T.M., 14, 33  
Atiyah M.F., 168
- Bach E., 168  
Balcerzyk S., 168  
Bang A.S., 100  
Bell E.T., 11  
Berberian S.K., 168  
Bernik V.I., 168  
Betcher J.T., 109  
Beumer M.G., 48, 62  
Bravo A., 54  
Browkin J., 43, 125, 168  
Brown K., 53, 100  
Brown P.G., 9, 18  
Bryński M., 168  
Buchsztab A.A., 37, 168  
Buschman R.G., 167, 168
- Carlitz L., 22  
Carmichael R.D., 46  
Cashwell E.D., 168  
Cel J., 125  
Cesaro E., 9, 166  
Chebolu S.K., 33  
Cieślak A., 112  
Cohen E., 57, 130, 132, 137  
Cohen H., 9, 169  
Coppel W.A., 165, 169  
Cramer G.F., 109, 110  
Cross J.T., 57, 110  
Czakyrjan K., 169
- Davenport H., 169  
Davison T.M.K., 22  
Daykin D.E., 33  
Delany J.F., 169  
Depman I.J., 107  
Descartes, 106, 108, 109  
Dickson L.E., 27, 43, 57, 60, 63, 86, 87, 101, 107–  
109, 112, 169  
Dirichlet P.G.L., 40, 169
- Djukić D., 169  
Doduniekow S., 169  
Donnelly H., 46, 49  
Duncan R.L., 83  
Dzyr A., 98
- Erdős P., 45, 47, 49, 74, 94, 102  
Erickson M., 9, 27, 125, 165, 169  
Eriksson K., 165, 168  
Euler, 162–164, 167  
Everett C.J., 168
- Farkas, 66  
Feng Z., 168  
Fermat, 109  
Filaseta M., 169  
Flowers J., 107  
Fomin D.V., 169  
Ford K., 47  
Foster, 46  
Fredman M.I., 22  
Friggstad Z., 102
- Galoczkin A.I., 169  
Galpieri G.A., 169  
Gandhi J.M., 103  
Gauss, 31  
Gegenbauer L., 29  
Genkin S.A., 169  
Gioia A.A., 20, 169  
Graham R.L., 165, 169  
Gribanow W.U., 170  
Griffin H., 170  
Grost M.E., 62  
Gutierrez S., 54  
Guy R.K., 49, 52, 55, 57, 67, 95, 98, 103, 107, 110,  
112, 125, 138, 170
- Hagis P., 138  
Hansen R.T., 170  
Hardy G.H., 170  
Harris V.C., 103, 167  
Haukkanen P., 95, 97  
Helenius F., 109  
Hodi E., 112, 170  
Holdener J.A., 107  
Horadam E.M., 20, 137, 138
- Ireland K., 170  
Isaacs I.M., 170

- Itenberg I.W., 169
- Janković V., 169
- Jaroma J.H., 109
- Jędrzejewicz P., 173
- Jeleński S., 107, 170
- Jerrard R.P., 110
- Józefiak T., 168
- Kaliszук I., 134, 138
- Kaplansky I., 170
- Karpińska M., 9
- Kiryłłow A., 57
- Kisacanın B., 170
- Klee Jr. V.L., 46, 48, 49, 57
- Knuth D.E., 165, 169
- Koninck De J.-M., 20, 103, 170
- Koshy T., 170
- Kostykin A.I., 170
- Krośnicka K., 93
- Kułagin A.G., 165
- Kurlandczyk L., 170
- Kurschak J., 170
- Lachutta K., 97
- Lal M., 138
- Lambek J., 13, 14
- Lambert J.H., 74, 166
- Landau E., 39
- Lang S., 170
- Lehmer D.H., 22, 51, 52, 167, 170
- Lerch, 60
- Lidl R., 170
- Lieuvens E., 51, 52
- Liouville, 72
- Lubawski W., 147
- Mąkowski A., 51, 93, 95, 98
- Macdonald I.G., 168 88–91, 94–97, 100–102, 110, 111, 114, 135
- Martin G., 54
- Marzantowicz W., 20, 171
- Mason J., 74
- Matić I., 169
- Matuszewicz Z., 112
- McCarthy P.J., 20, 57
- McCranie, 67
- Meissel E., 29
- Melfi G., 171
- Melnikow O.W., 168
- Mendelsohn N.S., 49
- Mercier A., 20, 103, 170
- Michałek M., 147
- Mills W.H., 55
- Minac J., 33
- Möbius A.F., 24
- Mollin R.A., 27, 125, 165, 171
- Montgomery H.L., 165, 172
- Morgado J., 138
- Moser L., 50, 51, 86
- Motose K., 24
- Nagell T., 171
- Narkiewicz W., 22, 107, 171
- Nasir A.R., 104
- Nathanson M.B., 9, 171
- Nesterenko Y.V., 169
- Newman D.J., 54
- Niederreiter H., 14, 170
- Niven I., 165, 172
- Nowicki A., 152, 171, 172
- Pagni D., 74
- Parnami J.C., 55
- Patashnik O., 165, 169
- Pawłowski H., 172
- Pennisi L.L., 49
- Petrović N., 169
- Piegat E., 172
- Pillai, 47
- Pollack P., 107
- Putnam T.M., 107
- Rademacher H., 107, 172
- Ramowicz Z., 172
- Rosen M., 170
- Routledge N., 40
- Rutkowski J., 9
- Sandor J., 65, 75, 103, 108, 138, 172
- Santos D.A., 172
- Sastry K.R.S., 74, 137
- Satyanarayana U.V., 27
- Schinzel A., 43, 46, 47, 49, 56
- Scholomiti N.C., 62
- Schuh F., 51
- Schwab E.D., 18
- Shallit J., 168
- Shanks D., 172
- Shapiro H.N., 18
- Sierpiński W., 172
- Silberberg G., 18
- Silverman J.H., 172
- Simons G.J., 33
- Sivaramakrishnan R., 172
- Snellman J., 172

Somayajulu A., 20  
Sorli R., 109  
Srinivasan A.K., 113  
Sterneck, 22  
Subbarao M.V., 134, 138  
Swanson L.G., 170  
Swetharanyam S., 24  
Szneperman L.B., 173  
Szydłowski A.B., 169

Tattersall J.J., 12, 43, 112, 173  
Temperley N., 110  
Titow P.I., 170  
Tołpygo A.K., 169  
Toeplitz O., 107, 172  
Tomalczyk W., 172  
Touchard, 106  
Trost E., 173

Ubis A., 54

Vaidya A.M., 54  
Vaidyanathaswamy R., 173  
Vandemergel, 67  
Vazzana A., 9, 27, 125, 165, 169  
Venkataraman C.S., 46

Wall Ch.R., 137, 138  
Wang E.T.H., 93  
Warpachowskij A.S., 107  
Warren L.J., 103  
Winogradow I., 173  
Woltman G., 109  
Woronin S.M., 165  
Wright E.M., 170

Yan S.Y., 20, 112, 173

Zakrzewska K., 84  
Zarzycki P., 20, 171  
Zhang Ming-Zhi, 49  
Zuckerman H.S., 165, 172  
Żuk I.K., 168  
Żurek A., 173

## Skorowidz

- abundant number, 107
- aliquot sequence, 93
- almost perfect, 109
- amicable numbers, 111
  
- bikwadrat, 66, 74, 100, 125
  
- całka, 103
- ciąg
  - arytmetyczny, 5, 53, 75, 124, 156
  - Cauchy'ego, 142
  - Fibonacciego, 5, 157
  - fundamentalny, 142, 143, 149
  - geometryczny, 5, 156
  - nierosnący, 162
  - ograniczony, 93
  - okresowy, 70, 71
  - rekurencyjny, 69–71, 157–159
  - sum początkowych, 149
  - sumowalny, 147, 149, 150, 152, 153, 165, 166
  - zbieżny, 142, 143, 145, 147–150, 152, 153, 161, 162, 165
- ciało, 31, 33
- cyfry, 44, 60, 102
- część całkowita, 2, 6, 8, 12, 29–31, 39, 40, 43, 55, 63, 66, 78–80, 87, 92, 103, 118, 119, 164
- część ułamkowa, 30, 42, 119
  
- deficient number, 107
- dzielnik unitarny, 72, 127–137
- dzielniki zera, 6, 7, 22, 131, 140, 141, 146
  
- element
  - odwracalny, 7, 22, 140, 146, 151, 153, 155, 165
  - trójkątny, 123
  
- funkcja
  - $I$ , 3, 5, 6, 8–10, 13, 21, 24, 25, 27, 29, 38, 39, 62, 63, 72, 83, 87, 103, 116–119, 133, 134, 166
  - $T$ , 3, 6, 10, 21, 25, 27–29, 36, 38, 39, 87, 103, 116, 124
  - $\Lambda$ , 118, 119
  - $\varphi$ , 6, 21, 27, 29, 35–58, 68, 75, 87, 92, 99, 102, 137, 167
  - $\mu$  Möbiusa, 3, 6, 13, 21, 23–26, 28–31, 33, 36, 39, 40, 62–64, 87, 116–118, 121, 124, 134
  - $\mu^*$ , 134–136
  - $\omega$ , 26, 63, 64, 66, 81, 83, 136
  - $\psi$ , 41, 57, 58
  - $\sigma$ , 3, 6, 21, 52, 85–88, 92, 93, 95, 97–103, 105, 107–111, 113, 167
  - $\sigma^*$ , 137
  - $\sigma_k$ , 3, 21, 103, 104
  - $\tau$ , 3, 6, 13, 20, 21, 59–72, 74, 75, 78–80, 83, 87, 92, 93, 99, 102–105, 117, 124, 136, 166
  - $\tau^*$ , 136
  - $e$ , 3, 6
  - arytmetyczna, 3, 5, 6, 8–10, 13, 17, 19, 21, 22, 28, 38, 115, 131–133
  - bijekcja, 20, 163
  - Carmichaela, 57
  - Eulera, 3, 35
  - Eulera-Gaussa, 35
  - Exp, 152
  - Jordana, 27
  - Mangoldta, 118
  - multiplikatywna, 3, 10–13, 15, 22, 24, 26, 27, 36, 37, 39, 57, 58, 60, 72, 77–80, 84, 86, 103, 120–124, 132–137
  - odwrotna, 8, 10, 12, 13, 21, 24–27, 29, 38, 39, 62, 87, 115–118, 120, 124, 131, 133–136, 138
  - przeciwna, 5, 139
  - rosnąca, 12, 19
  - różnowartościowa, 19, 41, 86, 93
  - surjekcja, 20
  - w pełni multiplikatywna, 13, 14, 17, 26, 36, 38, 116
  - zerowa, 5, 139
  
- granica, 18, 102, 142, 145, 147, 148, 162
- grupa, 5, 11, 16, 19, 133, 139
  
- hipoteza
  - Carmichaela, 46
  - Erdösa, 49
  - Erdösa i Sierpińskiego, 43
  - Lehmera, 51
  - Riemanna, 102
  - Subbarao, 138
  
- homomorfizm
  - grup, 16
  - pierścieni, 144, 150
  
- ideał, 17, 132, 141, 143, 145, 146, 148, 150, 152, 159, 165
  - maksymalny, 17, 132, 147
- iloczyn, 5, 6, 26, 37, 51, 62, 75, 78–80, 100, 108, 113, 128, 145, 148, 150, 159, 164

- dzielników naturalnych, 124  
dzielników pierwszych, 124  
nieskończony, 161–163
- IMO, 1  
Longlist, 61, 83, 101  
Shortlist, 56, 65, 66, 68, 92, 102
- indukcja matematyczna, 7, 14, 69–71, 124, 131, 140, 159, 160
- izomorfizm grup, 16  
izomorfizm pierścieni, 17, 123
- kolejne liczby naturalne, 31, 66, 83, 89–91, 97, 107  
kolejne liczby pierwsze, 17, 83, 132
- liczba  
 $\delta$ -liczba, 89  
 $\pi$ , 24, 74, 92, 103  
 $\sigma$ -liczba, 91  
bezkwadratowa, 26, 51, 52, 106, 128  
Catalana, 160  
deficytowa, 107, 108  
doskonała, 105–108  
Fermata, 41, 50  
Fibonacciego, 157  
Gaussa, 157  
kwadratowa, 12, 26, 40–42, 51, 60, 64–66, 68, 69, 72, 78–80, 98, 100, 103, 106, 125, 136, 137  
Lucasa, 159  
Mersenne’a, 5, 106, 157  
nadmierna, 107, 108  
nieparzystych dzielników, 84  
niewymierna, 74  
palindromiczna, 44, 102  
pierwsza, 15, 50, 69, 93, 95, 96, 99  
praktyczna, 113, 114  
prawie doskonała, 109  
quasi doskonała, 109  
tetraedralna, 157  
trójkątna, 5, 39, 106, 123, 157  
unitarnie doskonała, 137  
wymierna, 66  
złożona, 92, 93, 95, 96
- liczby  
pierwsze bliźniacze, 54, 95  
unitarnie względnie pierwsze, 129  
względnie pierwsze, 57, 81, 127  
zaprzyjaźnione, 111
- logarytm, 5, 18, 19, 55, 101, 118, 119, 153
- Maple, 1, 31, 32, 44–49, 55, 60, 61, 69, 71–73, 77, 82,
- metryka, 141, 145  
min, 128  
mnożenie funkcji arytmetycznych, 5
- nieparzysty dzielnik, 84, 103  
nierówność, 18, 19, 30, 33, 42, 54, 55, 64, 67, 68, 73, 75, 78–80, 83, 84, 92, 93, 97, 98, 101, 102, 104  
noncototiens, 43  
nontotiens, 48  
nwd, 2, 12, 22, 41, 42, 52, 54, 108, 120, 121, 129, 167  
nwd\*, 128  
nww, 2, 12, 22, 57, 64, 120, 122  
nww\*, 129
- Olimpiada Matematyczna  
Australia, 95  
Białoruś, 61, 93  
Czechy-Słowacja, 64, 65  
Hiszpania, 65  
Indie, 29, 53, 138  
Irlandia, 66  
Kanada, 66, 113  
Mołdawia, 65  
Mongolia, 52, 124  
Polska, 62, 70, 113  
Rosja, 62, 74, 81, 106  
St Petersburg, 68, 75, 84  
Tajwan, 54  
Węgry, 84  
Włochy, 83, 121  
Wietnam, 84
- para liczb naturalnych, 6, 7, 44, 51, 52, 54, 60, 64, 97, 102, 111, 130, 131, 139
- partycja, 162–165
- pierścień, 6, 7, 17, 18, 22, 32, 33, 115, 123, 131, 139–143, 146  
liczb całkowitych modulo  $m$ , 31, 32, 123  
lokalny, 17, 132, 147  
noetherowski, 17, 116, 132, 147  
szeregów formalnych, 144–151, 153, 155, 159, 161, 162, 165  
z jednoznacznością rozkładu, 17  
zupełny, 143
- pierwiastek z jedynki, 24  
pochodna, 151, 152, 154, 155  
podzielność, 20, 23, 28, 29, 41, 42, 46, 50–53, 57, 65, 75, 99, 122–124  
przez 3, 50–53, 66, 108  
przez 4, 18, 53



- przez 5, 61  
przez 12, 61  
przez 18, 61  
przez 24, 99  
przez potęgę liczby pierwszej, 28
- potęga  
dwójki, 5, 13, 26, 29, 41, 46, 50, 52, 53, 55–57, 61, 64, 66, 68, 74, 83, 92, 100, 106, 109, 113, 115–118, 136, 137  
liczby pierwszej, 12, 18, 24, 26–28, 31, 33, 37, 39, 52, 53, 57, 60, 72, 75, 78–80, 92, 100, 105, 108, 118, 119, 124, 128, 131  
piątki, 54  
trójki, 46, 50, 113
- practical number, 113  
przestrzeń metryczna, 141–145, 149, 161  
pytanie, 15, 79, 82, 89–91, 97, 100, 109, 112
- quasi perfect, 109
- równanie, 19, 43, 44, 49, 58, 62–64, 72, 88, 93, 95, 100, 121  
diofantyczne  
liniowe, 163
- rozkład kanoniczny, 2, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 25–28, 36, 37, 39, 40, 57, 60, 63, 64, 82, 86, 98, 99, 109, 118, 122, 124, 127, 128, 133, 135–137
- różniczkowanie pierścienia, 18, 151
- rząd, 141, 146
- silnia, 45, 46, 55, 60, 62, 92, 102, 118, 119, 153
- splot, 21  
Abela, 22, 139–142, 144–146  
Cauchy’ego, 139  
Dirichleta, 3, 6–11, 13, 15, 17, 18, 21, 22, 24–26, 28–30, 38, 39, 62, 83, 87, 103, 115–119, 122, 124, 134, 166  
unitarny, 4, 21, 130–138
- suma funkcji arytmetycznych, 5, 139
- superabundant numbers, 102
- symbol Newtona, 16, 25, 55, 57, 119, 137, 160
- system numeracji, 162
- sześcian liczby naturalnej, 41, 42, 55, 66, 72, 74, 100, 106, 122, 123, 125, 137
- szereg, 9, 17, 57, 74, 164, 166  
formalny, 144–167  
generujący, 155  
tworzący, 155
- trójka liczb naturalnych, 7, 42, 130, 140
- twierdzenie  
chińskie o resztach, 31, 37, 53, 83, 123  
Descartesa, 106, 108, 109  
Dirichleta, 53  
Eulera, 28, 52, 58, 163, 164, 167  
Gaussa, 41  
Liouville’a, 72, 136
- unitarna podzielność, 127, 129  
unitary perfect, 137  
untouchable numbers, 94
- warunki równoważne, 7, 11, 13, 18, 20, 25, 30, 41, 50, 52, 53, 56, 60, 65, 69, 78–80, 92, 98–100, 105, 106, 109, 113, 131, 133, 135
- wielomian, 20, 31–33, 68, 122, 123  
wzór Bineta, 158  
wzór Möbiusa, 25
- zbiór  
 $\mathbb{A}$ , 3, 5–12, 17, 18, 22, 25, 26, 28, 115, 117, 118, 130–133, 135  
 $\mathbb{A}(R)$ , 22  
 $\mathbb{A}_0(R)$ , 139–145  
 $\mathbb{B}$ , 115, 116  
 $\mathbb{N}_0$ , 1, 5, 22, 139  
 $\mathbb{W}$ , 28, 29  
gęsty, 56, 102  
liczb całkowitych, 1, 5  
liczb naturalnych, 1, 5  
liczb pierwszych, 1, 5, 13, 18, 20, 26, 27, 39, 42, 43, 52, 99, 100, 136  
liczb rzeczywistych, 1, 5, 19, 118  
liczb wymiernych, 1, 5, 123, 152, 159, 160  
liczb zespolonych, 1, 3, 5, 8, 13–15, 17, 18, 22, 25, 26, 36, 115, 119, 131, 133, 135, 137