Podróże po Imperium Liczb

Część 05. Funkcje Arytmetyczne

Rozdział 1

1. Funkcje arytmetyczne i splot Dirichleta

Andrzej Nowicki 10 maja 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

1 Funkcje arytmetyczne i splot Dirichleta

Wspominaliśmy już we Wstępie, że we wszystkich książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb" stosujemy jednolite oznaczenia. Zakładamy, że zero nie jest liczbą naturalną i zbiór $\{1, 2, 3, \dots\}$, wszystkich liczb naturalnych, oznaczamy przez $\mathbb{N}$. Przez $\mathbb{N}_0$ oznaczamy zbiór wszystkich nieujemnych liczb całkowitych, czyli zbiór $\mathbb{N}$ wzbogacony o zero. Zbiory liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych oznaczamy odpowiednio przez $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$. Zbiór wszystkich liczb pierwszych oznaczamy przez $\mathbb{P}$.

Każdą funkcję ze zbioru liczb naturalnych do zbioru liczb zespolonych nazywać będziemy *funkcją arytmetyczną*. Przykładów takich funkcji jest bardzo dużo. Mamy, na przykład, funkcje T, g, h, M określone odpowiednio równościami

$$T(n) = n, \quad g(n) = n^2, \quad h(n) = \log\left(1 + \sqrt{n}\right), \quad M(n) = 2^n - 1,$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Są to funkcje arytmetyczne. Innymi słowy, funkcja arytmetyczna, to nic innego jak zwykły ciąg nieskończony o wyrazach będących liczbami, najogólniej mówiąc, zespolonymi. Ciągi arytmetyczne, ciągi geometryczne, ciąg Fibonacciego $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$, ciąg stały $(a, a, a, \dots)$, ciąg liczb trójkątnych $(1, 3, 6, 10, 15, \dots)$ itp., wszystkie te ciągi są funkcjami arytmetycznymi.

Zbiór wszystkich funkcji arytmetycznych oznaczać będziemy przez $\mathbb{A}$. Zapis "$f \in \mathbb{A}$" oznacza więc tylko to, że $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ czyli, że f jest funkcją ze zbioru $\mathbb{N}$ do zbioru $\mathbb{C}$. Do zbioru $\mathbb{A}$ należy w szczególności funkcja zerowa czyli funkcja stała $(0, 0, 0, \dots)$, którą oznaczać będziemy przez 0. Funkcję stałą $(1, 1, 1, \dots)$, która też oczywiście należy do $\mathbb{A}$, oznaczać będziemy przez I. Jeśli $f \in \mathbb{A}$, to przez $-f$ oznaczać będziemy funkcję *przeciwną* do f, tzn. funkcję arytmeryczną określoną wzorem $(-f)(n) = -f(n)$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli f i g są funkcjami arytmetycznymi, to przez $f + g$ oznaczamy funkcję arytmetyczną określoną wzorem

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n),$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Nazywamy ją *sumą* funkcji arytmetycznych f i g. W zbiorze $\mathbb{A}$ można więc dodawać i jest oczywiste, że to dodawanie jest przemienne i łączne (tzn. $f + g = g + f$ oraz $(f+g)+h = f+(g+h)$, dla wszystkich $f, g, h \in \mathbb{A}$). Ponadto, $f+0 = f$ oraz $f+(-f) = 0$, dla wszystkich $f \in \mathbb{A}$. Powyższe zdania wysławia się krótko jednym zdaniem: *zbiór* $\mathbb{A}$ *jest grupą abelową ze względu na dodawanie.*

W zbiorze $\mathbb{A}$ mamy również drugie działanie, które nazywamy *mnożeniem* i które oznacza się przez kropkę przy czym tej kropki się często nie pisze. Jeśli f i g są funkcjami arytmetycznymi, to fg lub $f \cdot g$ jest funkcją arytmetyczną, zwaną *iloczynem* funkcji f i g, określoną wzorem

$$(fg)(n) = f(n)g(n),$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. To mnożenie jest działaniem łącznym, przemiennym oraz jest rozdzielność mnożenia względem dodawania (tzn. $(f + g)h = fh + gh$ dla wszystkich $f, g, h \in \mathbb{A}$). Ponadto, $f \cdot I = f$ dla $f \in \mathbb{A}$. Te z kolei wszystkie zdania, włącznie ze zdaniami o dodawaniu, wysławia się krótko jednym zdaniem: *zbiór $\mathbb{A}$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką* ze względu na powyższe dodawanie i mnożenie. Jedynką jest funkcja stała I.

To mnożenie ma jednak pewien defekt. Może się tak zdarzyć, że iloczyn dwóch niezerowych funkcji jest funkcją zerową. Jeśli, dla przykładu,

$$f = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \quad \text{i} \quad g = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots),$$

to f i g są funkcjami niezerowymi, natomiast fg jest funkcją zerową. Tę sytuację wysławia się krótko: *pierścień $\mathbb{A}$ ma dzielniki zera.*

W zbiorze $\mathbb{A}$ istnieje jeszcze inne mnożenie, które zwykle oznacza się przez $*$ i nazywa splotem Dirichleta. Wyjaśnimy to dokładniej w niniejszym rozdziale. Wspomnijmy tylko, że zbiór $\mathbb{A}$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką ze względu na dodawanie, to samo co poprzednio, oraz to nowe mnożenie $*$. Ten nowy pierścień nie ma dzielników zera, (tzn. jeśli $f, g \in \mathbb{A}$ oraz $f \neq 0$ i $g \neq 0$, to $f * g \neq 0$). Jego jedynką jest funkcja $e : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, określona wzorem

$$e(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 1, \\ 0, & \text{dla } n \neq 1. \end{cases},$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

Podstawowymi funkcjami arytmetycznymi rozpatrywanymi w tej książce są następujące funkcje: I, T, e, φ, τ, σ oraz funkcja Möbiusa μ. Przypomnijmy, że jeśli n jest liczbą naturalną, to $I(n) = 1$, $T(n) = n$, $e(1) = 0$ i $e(n) = 0$ dla $n \geqslant 2$. Ponadto, $\tau(n)$ jest liczbą wszystkich dzielników naturalnych liczby n, $\sigma(n)$ jest sumą wszystkich dzielników naturalnych liczby n oraz $\varphi(n)$ jest liczbą wszystkich tych liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które są względnie pierwsze z liczbą n.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.1 Splot Dirichleta

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeśli f i g są funkcjami arytmetycznymi (czyli elementami zbioru $\mathbb{A}$), to przez $f * g$ oznaczamy funkcję, należącą do $\mathbb{A}$, określoną wzorem:

$$\boxed{(f * g)(n) = \sum_{k|n} f(k)g(n/k) = \sum_{ab=n} f(a)g(b)},$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Symbol $\sum\limits_{k|n}$ informuje, że sumowanie przebiega wszystkie naturalne dzielniki liczby n. Natomiast symbol $\sum\limits_{ab=n}$ oznajmia, że sumowanie przebiega wszystkie pary (a, b) takie, że a i b są liczbami naturalnymi spełniającymi równość $ab = n$.

W szczególności:

$$(f * g)(12) = f(1)g(12) + f(2)g(6) + f(3)g(4) + f(4)g(3) + f(6)g(2) + f(12)g(1).$$

Jeśli p jest liczbą pierwszą, to $(f * g)(p) = f(1)g(p) + f(p)g(1)$ i ogólniej:

1.1.1. $(f * g)(p^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(p^k)g(p^{n-k})$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Działanie $*$ nazywa się *splotem Dirichleta*. Jest to działanie łączne:

1.1.2. *$(f*g)*h = f*(g*h)$. Dokładniej, jeśli $f, g, h \in \mathbb{A}$, to dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości*

$$((f*g)*h)(n) = (f*(g*h))(n) = \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c).$$

Symbol $\sum\limits_{abc=n}$ oznajmia, że sumowanie przebiega wszystkie trójki (a, b, c) takie, że a, b, c są liczbami naturalnymi spełniającymi równość $abc = n$.

Powyższa łączność jest łatwa do sprawdzenia. Z łatwością sprawdzamy również następne stwierdzenie.

1.1.3. *Dla dowolnych funkcji arytmetycznych f, g, h zachodzą równości:*

$$\begin{aligned} f*g &= g*f, \\ (f+g)*h &= (f*h)+(g*h), \\ f*e &= f. \end{aligned}$$

1.1.4. *Niech $f, g \in \mathbb{A}$. Jeśli $f*g = 0$, to $f = 0$ lub $g = 0$.*

D. Przypuśćmy, że $f \neq 0$ i $g \neq 0$. Niech a, b będą najmniejszymi liczbami naturalnymi takimi, że $f(a) \neq 0$ i $g(b) \neq 0$. Wtedy mamy sprzeczność:

$$0 = (f*g)(ab) = f(a)g(b) \neq 0. \quad \boxtimes$$

1.1.5. *Niech $f \in \mathbb{A}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Istnieje $g \in \mathbb{A}$ takie, że $f*g = e$.*

(2) *$f(1) \neq 0$.*

D. (1) $\Rightarrow$ (2). $1 = e(1) = (f*g)(1) = f(1)g(1)$, więc $f(1) \neq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Niech $f(1) \neq 0$. Oznaczmy: $t = f(1)^{-1}$. Definiujemy $g \in \mathbb{A}$ w następujący indukcyjny sposób: $g(1) = t$ i jeśli $n > 1$, to

$$g(n) = -t \sum f(a)g(b),$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich parach (a, b) takich, że $ab = n$ oraz $a \neq 1$. Funkcja g oczywiście spełnia równość $f*g = e$. $\boxtimes$

Z powyższych faktów otrzymujemy następujące stwierdzenie.

1.1.6. *Zbiór $\mathbb{A}$ jest pierścieniem przemiennym ze względu na zwykłe dodawanie funkcji i mnożenie będące splotem Dirichleta. Jedynką tego pierścienia jest funkcja e. Jest to pierścień bez dzielników zera. Element $f \in \mathbb{A}$ jest odwracalny w $\mathbb{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(1) \neq 0$.*

Spójrzmy jeszcze raz na fakt 1.1.5. Załóżmy, że f jest funkcją arytmetyczną spełniającą warunek $f(1) \neq 0$. Istnieje wtedy funkcja arytmetyczna g taka, że

$$f * g = e.$$

Taka funkcja g istnieje oczywiście tylko jedna. Będziemy ją w dalszym ciągu oznaczać przez f^{-1} i nazywać funkcją *odwrotną* do funkcji f względem splotu Dirichleta. Mamy więc równość

$$f * f^{-1} = e.$$

W szczególności, jeśli $f(1) = 1$, to $f^{-1}(1) = 1$ oraz

$$f^{-1}(p) = -f(p),$$

gdy p jest liczbą pierwszą.

1.1.7. *Niech $f \in \mathbb{A}$, $f(1) \neq 1$, $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy*

$$f^{-1}(p^n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{k=0}^{n-1} f^{-1}(p^k) f(p^{n-k}).$$

1.1.8. *Niech $f \in \mathbb{A}$. Załóżmy, że wszystkie liczby $f(n)$, dla $n \in \mathbb{N}$, są całkowite i $f(1) = \pm 1$. Wtedy istnieje funkcja odwrotna f^{-1} (względem splotu Dirichleta) i jej wszystkie liczby $f^{-1}(n)$, dla $n \in \mathbb{N}$, są całkowite.*

D. Dowodzimy to dokładnie tak samo jak 1.1.5. ⊠

Jeśli $f \in \mathbb{A}$, $z \in \mathbb{C}$, to przez zf oznaczamy funkcję arytmetyczną taką, że

$$(zf)(n) = z \cdot f(n), \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

1.1.9. *Jeśli $z \in \mathbb{C}$ oraz $f, g \in \mathbb{A}$, to $z(f * g) = zf * g = f * zg$.*

1.1.10. *Niech $f \in \mathbb{A}$, $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Jeśli f^{-1} istnieje, to istnieje $(zf)^{-1}$ oraz $(zf)^{-1} = z^{-1} f^{-1}$.*

Przypomnijmy, że przez I oznaczamy funkcję stałą $(1, 1, 1, \dots)$, tzn. $I(n) = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.

1.1.11. *Dla każdej funkcji arytmetycznej f zachodzi równość:*

$$\sum_{i=1}^{n} (f * I)(i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] f(i),$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$. ([Nagl] 43 z.21).

D. Skorzystamy z następującego oczywistego faktu zachodzącego dla $n, k \in \mathbb{N}$.

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 1, & \text{gdy } k \mid n, \\ 0, & \text{gdy } k \nmid n. \end{cases}$$

Niech $F(n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] f(i)$ oraz $G(n) = (f * I)(n) = \sum_{k|n} f(k)$. Wtedy

$$\begin{aligned} F(n) - F(n-1) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] f(i) - \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{n-1}{i}\right] f(i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] f(i) - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n-1}{i}\right] f(i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{n}{i}\right] - \left[\frac{n-1}{i}\right] \right) f(i) = \sum_{k|n} f(k) = G(n), \end{aligned}$$

czyli $G(n) = F(n) - F(n-1)$. Zatem $\sum_{i=1}^{n} (f * I)(i) = \sum_{i=1}^{n} G(i) = G(1) + G(2) + \cdots + G(n) = F(1) + (F(2) - F(1)) + (F(3) - F(2)) + \cdots + (F(n) - F(n-1)) = F(n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] f(i)$. ⊠

1.1.12 (Cesáro)**.** *Jeśli $f \in \mathbb{A}$, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n,$$

gdzie $F = f * I$. ([Dic1] 127, dowód patrz **??**).

1.1.13. *Niech $f \in \mathbb{A}$. Definiujemy ciąg (f_n), funkcji arytmetycznych, przyjmując $f_1 = f$ oraz*

$$f_{n+1} = f_n * I.$$

Jeśli $f_m = f_1$ dla pewnego $m \geqslant 2$, to $f = 0$. ([Mon] 93(10)(1986) E2957).

★ J. D. Baum, *A number-theoretic sum*, [MM] 55(2)(1982) 111-113.
P. G. Brown, *Some comments on inverse arithmetic functions*, [MG] 89(516)(2005) 403-408.
H. Cohen, *Arithmetic functions and Dirichlet series*, [Coh2] 151-162.
M. Erickson, A. Vazzana, *The group of arithmetic functions*, [ErV] 169-177.
M. Karpińska, *Splot Dirichleta w pierścieniu funkcji arytmetycznych*, [Pmgr] 2001.
M. B. Nathanson, *The ring of arithmetic functions*, [Nath] 301-302.
J. Rutkowski, *O funkcjach arytmetycznych i splocie Dirichleta*, [Dlt] 3/89 10-11.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2 Funkcje multyplikatywne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że funkcja arytmetyczna f jest *multyplikatywna*, jeśli $f \neq 0$ oraz

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

dla wszystkich $a, b \in \mathbb{N}$ takich, że $(a, b) = 1$. Funkcje I, T, e są multyplikatywne. Zanotujmy dwa oczywiste stwierdzenia.

1.2.1. *Jeśli $f \in \mathbb{A}$ jest funkcją multyplikatywną, to $f(1) = 1$.*

1.2.2. *Niezerowa funkcja arytmetyczna f jest multyplikatywna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych, parami różnych liczb pierwszych $p_1, \dots, p_s$ i dowolnych nieujemnych liczb całkowitych $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, zachodzi równość*

$$f\Big(p_1^{\alpha_1} \cdots p^{\alpha_s}\Big) = f\Big(p_1^{\alpha_1}\Big) \cdots f\Big(p_s^{\alpha_s}\Big).$$

1.2.3. *Splot Dirichleta funkcji multyplikatywnych jest funkcją multyplikatywną.*

D. Niech $f, g \in \mathbb{A}$ będą funkcjami multyplikatywnymi i niech $h = f * g$. Oczywiście $h \neq 0$. Multyplikatywność funkcji h wykażemy przy pomocy równości 1.2.2. Załóżmy, że $p_1, \dots, p_s$ są parami różnymi liczbami pierwszymi i $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
h\left(p_1^{\alpha_1} \cdots p^{\alpha_s}\right) &= (f * g)\left(p_1^{\alpha_1} \cdots p^{\alpha_s}\right) \\
&= \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \sum_{i_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{i_s=0}^{\alpha_s} f\left(p_1^{i_1} \cdots p_s^{i_s}\right) \cdot g\left(p_1^{\alpha_1 - i_1} \cdots p_s^{\alpha_s - i_s}\right) \\
&= \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \sum_{i_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{i_s=0}^{\alpha_s} f\left(p_1^{i_1}\right) \cdots f\left(p_s^{i_s}\right) \cdot g\left(p_1^{\alpha_1 - i_1}\right) \cdots g\left(p_s^{\alpha_s - i_s}\right) \\
&= \left(\sum_{i_1=0}^{\alpha_1} f\left(p_1^{i_1}\right) g\left(p_1^{\alpha_1 - i_1}\right)\right) \left(\sum_{i_2=0}^{\alpha_2} f\left(p_2^{i_2}\right) g\left(p_2^{\alpha_2 - i_2}\right)\right) \cdots \left(\sum_{i_s=0}^{\alpha_s} f\left(p_s^{i_s}\right) g\left(p_s^{\alpha_s - i_s}\right)\right) \\
&= (f * g)\left(p_1^{\alpha_1}\right) (f * g)\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots (f * g)\left(p_s^{\alpha_s}\right) \\
&= h\left(p_1^{\alpha_1}\right) h\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots h\left(p_s^{\alpha_s}\right).
\end{aligned}$$

Zatem $h\left(p_1^{\alpha_1} \cdots p^{\alpha_s}\right) = h\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdots h\left(p_s^{\alpha_s}\right)$. Stąd wynika, na mocy 1.2.2, że funkcja $h = f * g$ jest multyplikatywna. ⊠

U. Inne dowody powyższego faktu znajdziemy na przykład w: [Nar77], [Berb], [Gio] 18. ⊠

1.2.4. *Niech f będzie funkcją arytmetyczną posiadającą funkcję odwrotną f^{-1} względem splotu Dirichleta. Jeśli funkcja f jest multyplikatywna, to funkcja f^{-1} również jest multyplikatywna.*

D. ([Berb]). Rozpatrzmy funkcję $h \in \mathbb{A}$ zdefiniowaną następująco: $h(1) = 1$ i jeśli $n \geqslant 2$, to

$$h(n) = f^{-1}\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdots f^{-1}\left(p_s^{\alpha_s}\right),$$

gdzie $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ jest rozkładem kanonicznym liczby n. Jest oczywiste, że funkcja h jest multyplikatywna. Pokażemy, że $h * f = e$. Ponieważ funkcje f i h są multyplikatywne więc, na mocy 1.2.3, funkcja $h * f$ jest również multyplikatywna. Dla wykazania równości $h * f = e$ wystarczy więc sprawdzić, że $(h * f)(p^n) = 0$ dla $p \in \mathbb{P}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Sprawdzamy:

$$(h * f)(p^n) = \sum_{k=0}^{n} h(p^k) f(p^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} f^{-1}(p^k) f(p^{n-k}) = (f^{-1} * f)(p^n) = e(p^n) = 0.$$

Zatem istotnie $h * f = e$. Mamy teraz równość $h * f = f^{-1} * f$, z której wynika, że $f^{-1} = h$ i stąd wynika, że funkcja f^{-1} jest multyplikatywna. ⊠

Konsekwencją powyższych faktów jest następujące stwierdzenie.

1.2.5. *Zbiór wszystkich funkcji multyplikatywnych jest grupą abelową ze względu na splot Dirichleta.*

1.2.6. *Niech $f, g, h \in \mathbb{A}$. Załóżmy, że $h = f * g$. Jeśli dwie spośród funkcji f, g, h są multyplikatywne, to trzecia również.*

D. Jeśli funkcje f i g są multyplikatywne, to funkcja $h = f * g$ jest multyplikatywna na mocy 1.2.3. Założmy, że funkcje h, f są multyplikatywne. Wtedy z twierdzeń 1.2.4 i 1.2.3 wynika, że funkcja g jest multyplikatywna, gdyż $g = h * f^{-1}$. Podobnie postępujemy w przypadku, gdy funkcje h i g są multyplikatywne. ⊠

1.2.7 (Bell 1933)**.** *Niech $f, g \in \mathbb{A}$. Jeśli funkcja $h = f * g$ jest multyplikatywna, to obie funkcje f, g są multyplikatywne lub też żadna z niech.* ([Nar03] 109).

D. Założmy, że funkcja f jest multyplikatywna. Wtedy z 1.2.4 i 1.2.3 wynika, że funkcja g jest multyplikatywna, gdyż $g = h * f^{-1}$. Jeśli funkcja f nie jest multyplikatywna, to funkcja g również nie jest multyplikatywna, gdyż w przeciwnym wypadku z równości $f = h * g^{-1}$ wynikałaby multyplikatywność funkcji f. ⊠

1.2.8. *Niech*

$$F(n) = \sum_{k|n} f(k).$$

Funkcja f jest multyplikatywna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja F jest multyplikatywna. ([Wino] 36, [DoC] 339, 340).

D. Wynika to z 1.2.6, gdyż $F = f * I$. ⊠

1.2.9. *Jeśli f, g są funkcjami multyplikatywnymi, to funkcja h zdefiniowana wzorem*

$$h(n) = \sum_{k|n} f(k) g(k)$$

też jest multyplikatywna.

D. Wynika to z 1.2.6, gdyż $h = (f \cdot g) * I$. Funkcja $f \cdot g$ jest oczywiście multyplikatywna. ⊠

1.2.10. *Jeśli f jest funkcją multyplikatywną, to*

$$f\Big([a,b]\Big)f\Big((a,b)\Big) = f(a)f(b)$$

dla wszystkich $a, b \in \mathbb{N}$. ([Nath] 308).

D. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Niech $a = p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$ i $b = p_1^{\beta_1}\cdots p_n^{\beta_n}$, gdzie $p_1, \dots, p_n$ są parami różnymi liczbami pierwszymi oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wtedy $(a,b) = p_1^{\gamma_1}\cdots p_n^{\gamma_n}$ i $[a,b] = p_1^{\delta_1}\cdots p_n^{\delta_n}$, gdzie $\gamma_i = \min\Big(\alpha_i, \beta_i\Big)$ oraz $\delta_i = \max\Big(\alpha_i, \beta_i\Big)$ dla $i = 1, \dots, n$.

Wystarczy zatem sprawdzić, że jeśli p jest liczbą pierwszą oraz s, t są nieujemnymi liczbami całkowitymi, to

$$f\Big(p^s\Big)f\Big(p^t\Big) = f\Big(p^{\min(s,t)}\Big)f\Big(p^{\max(s,t)}\Big),$$

ale to jest oczywiste. ⊠

1.2.11. *Jeśli f jest funkcją multyplikatywną oraz d jest liczbą naturalną taką, że $f(d) \neq 0$, to funkcja*

$$g(n) = \frac{f(dn)}{f(d)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

również jest multyplikatywna. ([K-Me] z.464).

D. Niech $a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Wtedy $dab = d[a,b] = [da, db]$, $(da, db) = d$ i mamy:

$$g(ab) = \frac{f(dab)}{f(b)} = \frac{f([da,db])}{f(d)} = \frac{f(ad)f(bd)}{f((a,b))f(d)} = \frac{f(da}{f(d)} \cdot \frac{f(db)}{f(d)} = g(a)g(b).$$

Wykorzystaliśmy fakt 1.2.10. ⊠

1.2.12. *Niech $f \in \mathbb{A}$ będzie funkcją multyplikatywną. Wtedy dla każdej liczby pierwszej p zachodzi równość*

$$f^{-1}(p^2) = f(p)^2 - f(p^2).$$

([Mon] 78(3)(1971) 267).

1.2.13. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją multyplikatywną ściśle rosnącą. Jeśli $f(2) = 2$, to $f(n) = n$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.* ([DoC] 337, [Fom] D41).

1.2.14. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją multyplikatywną taką, że $f(2) > 2$. Znaleźć możliwie najmniejszą wartość $f(3)$.* Odp. $f(3) = 9$, *dla* $f(n) = n^2$. ([Zw] 2005).

1.2.15. *Funkcja $f(n) = \left[\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n-1}\right]$ jest multyplikatywna.* ([K-Me] z.456).

D. Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$f(n) = \left[\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n-1}\right] = \begin{cases} 1, & \text{gdy n jest liczbą kwadratową,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Stąd już łatwo wynika multyplikatywność funkcji f. ⊠

★ J. J. Tattersall, *Multiplicative functions*, [Tatt] 103-108.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3 Funkcje w pełni multyplikatywne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ jest *w pełni multyplikatywna* jeśli $f(1) = 1$ oraz

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

dla wszystkich $a, b \in \mathbb{N}$. Przypominamy, że przez $\mathbb{P}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb pierwszych.

1.3.1. *Dla każdej funkcji $\gamma : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ istnieje dokładnie jedna funkcja w pełni multyplikatywna $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ taka, że $f(p) = \gamma(p)$ dla wszystkich $p \in \mathbb{P}$. Ta jedyna funkcja f jest określona następująco: $f(1) = 1$, jeśli $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ jest rozkładem kanonicznym liczby naturalnej $n \geqslant 2$, to*

$$f(n) = \gamma(p_1)^{\alpha_1} \cdots \gamma(p_s)^{\alpha_s}.$$

1.3.2. *Z oczywistego faktu* 1.3.1 *otrzymujemy liczne przykłady funkcji w pełni multyplikatywnych. Dla przykładu, jeśli $\gamma(2) = 2$ oraz $\gamma(p) = 0$ dla wszystkich nieparzystych liczb pierwszych p, to funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest określona równościami*

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{gdy } n \text{ jest potęgą dwójki,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja f jest w pełni multyplikatywna.

1.3.3. *Splot Dirichleta funkcji w pełni multyplikatywnych nie musi być funkcją w pełni multyplikatywną. Dla przykładu, $I * I = \tau$, I jest funkcją w pełni multyplikatywną, natomiast τ taką funkcją nie jest. Przypomnijmy, że $\tau(n)$ jest liczbą wszystkich naturalnych dzielników liczby n.*

1.3.4. *Funkcja odwrotna (względem splotu Dirichleta) do funkcji w pełni multyplikatywnej nie musi być funkcją w pełni multyplikatywną. Mamy na przykład: $I^{-1} = \mu$, I jest funkcją w pełni multyplikatywną, a μ taką funkcją nie jest. Tutaj μ oznacza funkcję Möbiusa, którą będziemy się zajmować w jednym z następnych rozdziałów.*

1.3.5. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Funkcja f jest w pełni multyplikatywna.*

(2) (Lambek) $f \cdot (g * h) = (f \cdot g) * (f \cdot h)$, *dla wszystkich funkcji arytmetycznych g, h.*

(3) $(f * f) = f \cdot \tau$ *(gdzie $\tau(n)$ oznacza liczbę dzielników naturalnych liczby n).*

([Mon] 73(1966) 969-973, [Mon] 78(10)(1971) E2268, [Nar03] s.121).

D. Implikacje (1) $\Rightarrow$ (2) i (1) $\Rightarrow$ (3) są oczywiste.

(2) $\Rightarrow$ (1). Dla danej liczy naturalnej a oznaczmy przez e_a funkcję z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{C}$ taką, że $e_a(n) = 1$ dla $n = a$ oraz $e_a(n) = 0$ dla $n \neq a$. Zauważmy, że $e_a * e_b = e_{ab}$ dla $a, b \in \mathbb{N}$. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} f(ab) &= f(ab)\cdot 1 = f(ab)e_{ab}(ab) = f(ab)(e_a * e_b)(ab) = (f\cdot(e_a * e_b))(ab) \\ &= ((f\cdot e_a) * (f\cdot e_b))(ab) = (f\cdot e_a)(a)(f\cdot e_b)(b) = f(a)e_a(a)f(b)e_b(b) \\ &= f(a)f(b). \end{aligned}$$

Funkcja f jest więc w pełni multyplikatywna.

(3) $\Rightarrow$ (1) (H. Niederreiter, [Mon] 78(10)(1971) s.1140). Załóżmy, że $(f * f)(n) = f(n)\tau(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Podstawiając $n = 1$ widzimy, że $f(1) = 0$ lub $f(1) = 0$. Niech $n \geqslant 2$ i niech $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ będzie rozkładem kanonicznym liczby n. Oznaczmy: $\gamma(n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$. Wystarczy udowodnić, że

$$f(n) = f(1)f(p_1)^{\alpha_1}\cdots f(p_s)^{\alpha_s}, \qquad (*)$$

dla wszystkich $n \geqslant 2$. Wykażemy to metodą indukcji matematycznej ze względu na $\gamma(n)$. Jeśli $\gamma(n) = 1$, to $n = p$ jest liczbą pierwszą i mamy:

$$2f(p) = \tau(p)f(p) = (f * f)(p) = f(1)f(p) + f(p)f(1) = 2f(1)f(p);$$

więc $f(p) = f(1)f(p)$. Załóżmy teraz, że równość $(*)$ zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych n takich, że $\gamma(n) \leqslant k$, gdzie $k \geqslant 1$. Rozpatrzmy liczbę naturalną n spełniającą równość $\gamma(n) = k + 1$. Wtedy

$$\tau(n)f(n) = 2f(1)f(n) + \sum f(a)f(b),$$

gdzie sumowanie przebiega wszystkie pary liczb naturalnych (a, b) takie, że $ab = n$, $1 < a$, $b < n$. Dla każdej takiej pary mamy: $\gamma(a) \leqslant k$, $\gamma(b) \leqslant k$. Z założenia indukcyjnego wynika zatem, że

$$\tau(n)f(n) = 2f(1)f(n) + (\tau(n) - 2)f(1)^2 f(p_1)^{\alpha_1}\cdots f(p_s)^{\alpha_s}.$$

Oczywiście n nie jest liczbą pierwszą. Zatem $\tau(n) > 2$ i w każdym z dwóch przypadków, gdy $f(1) = 0$ i gdy $f(1) = 1$, otrzymujemy równość $(*)$. ⊠

1.3.6. *Jeśli $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ jest taką funkcją w pełni multyplikatywną, że funkcja F, określona wzorem*

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

też jest w pełni multyplikatywna, to $f = I$ lub $f = e$. Przypomnijmy, że $e(1) = 1$ i $e(n) = 0$ dla $n > 1$. ([Mon] 108(8)(2001) z.10760).

★ T. M. Apostol, *Some properties of completely multiplicat. functions*, [Mon] 78(1971) 266-271.
J. Lambek, *Arithmetical functions and distributivity*, [Mon] 73(1966) 969-973.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4 Funkcje postaci $\mathbf{f}^{(m)}$

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Dla dowolnej liczby naturalnej m przez $f^{(m)}$ oznaczamy m-tą potęgę funkcji arytmetycznej f, względem splotu Dirichleta, tzn.

$$f^{(m)} = \underbrace{f * f * \cdots * f}_{m}.$$

W szczególności, $f^{(1)} = f$, $f^{(2)} = f * f$ oraz

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} * f$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Przyjmujemy ponadto, że $f^{(0)} = e$. Przypomnijmy, że funkcja e (określona równościami $e(1) = 1$ i $e(n) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$) jest jedynką pierścienia $\mathbb{A}$. W przypadku gdy $f(1) \neq 0$, określamy ujemną potęgę:

$$f^{(-n)} = \left(f^{-1}\right)^{(n)}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli f jest funkcją multyplikatywną, to każda funkcja postaci $f^{(m)}$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, jest również multyplikatywna.

1.4.1. *Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ określoną wzorem*

$$f(n) = \begin{cases} -1 & \text{dla } n = 1, \\ 0 & \text{dla } n \neq 0. \end{cases}$$

Wtedy $f^{(2)} = e$, czyli funkcja $f^{(2)}$ jest multyplikatywna, natomiast funkcja f nie jest multyplikatywna.

1.4.2. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją taką, że $f(1) = 1$. Jeśli $f^{(2)}$ jest funkcją multyplikatywną, to funkcja f jest również multyplikatywna.* ([Mon] 74(10)(1967) E1891, 75(5)(1968) 543).

1.4.3. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją taką, że $f(1) = 1$. Czy prawdą jest, że jeśli $f^{(3)}$ jest funkcją multyplikatywną, to funkcja f jest również multyplikatywna ?*

1.4.4. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją taką, że $f(1) = 1$. Jeśli $f^{(4)}$ jest funkcją multyplikatywną, to funkcja f jest również multyplikatywna.*

D. Wynika z 1.4.2. ⊠

1.4.5. *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją taką, że $f(1) = 1$ i niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli funkcja $f^{(2^n)}$ jest multyplikatywna, to funkcja f jest również multyplikatywna.* (Wynika z 1.4.2).

1.4.6. *Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą i f jest funkcją arytmetyczną spełniającą równość $f(1) = 1$. Wtedy*

$$f^{(m)}(p) = mf(p),$$

dla każdej liczby całkowitej m. ([Berb]).

D. ([Berb]). Rozważmy funkcję $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ określoną wzorem

$$\lambda(m) = f^{(m)}(p)$$

dla $m \in \mathbb{Z}$. Mamy wtedy $\lambda(0) = f^{(0)}(p) = e(p) = 0$ oraz

$$\lambda(a+b) = f^{(a+b)}(p) = (f^{(a)} * f^{(b)})(p) = f^{(a)}(1)f^{(b)}(p) + f^{(a)}(p)f^{(b)}(1)f^{(b)}(p) + f^{(a)}(p) = \lambda(a) + \lambda(b),$$

dla wszystkich $a, b \in \mathbb{Z}$. Funkcja λ jest więc homomorfizmem grup abelowych. Zatem $\lambda(m) = m\lambda(1)$ (dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$) i stąd otrzymujemy żądaną równość. ⊠

Spójrzmy na funkcje arytmetyczne I i T. Przypomnijmy, że $I(n) = 1$ oraz $T(n) = n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez $\langle I, T\rangle$ podgrupę multyplikatywnej grupy pierścienia $\mathbb{A}$, generowaną przez te dwie funkcje. Jest oczywiste, że

$$\langle I, T\rangle = \left\{ I^{(a)} * T^{(b)};\ a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1.4.7. *Grupy $\langle I, T\rangle$ i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ są izomorficzne.* ([Berb]).

D. ([Berb]). Funkcja $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \langle I, T\rangle$,

$$(a, b) \mapsto I^{(a)} * T^{(b)}$$

jest surjekcją grup abelowych. Wystarczy pokazać, że jej jądro jest zerowe. W tym celu załóżmy, że $I^{(a)} * T^{(b)} = e$, dla pewnych liczb całkowitych a, b. Pokażemy, że $a = b = 0$.

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Mamy wtedy (patrz 1.4.6):

$$0 = e(p) = \left(I^{(a)} * T^{(b)}\right)(p) = I^{(a)}(p) + T^{(b)}(p) = aI(p) + bT(p) = a + bp.$$

Zatem dla każdej liczby pierwszej p mamy równość $a+bp = 0$. To jest oczywiście możliwe tylko wtedy, gdy $a = b = 0$. Rozważana surjekcja grup jest więc izomorfizmem. ⊠

Spójrzmy na funkcje postaci $I^{(m)}$, gdzie $m \in \mathbb{N}$. Ponieważ

$$I^{(m)}(n) = \sum_{d_1 d_2 \cdots d_m = n} I(d_1)I(d_2)\cdots I(d_s) = \sum_{d_1 d_2 \cdots d_m = n} 1,$$

więc:

1.4.8. *$I^{(m)}(n)$ jest liczbą wszystkich ciągów $(d_1, \dots, d_m)$, liczb naturalnych takich, że $d_1 d_2 \cdots d_m = n$.* ([Dela]).

Następne stwierdzenia są łatwymi do udowodnienia konsekwencjami faktu 1.4.8.

1.4.9. $I^{(m)}(p^k) = \binom{m+k-1}{k}$, *dla $p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N}_0$.* ([DoC] 347, [Dela]).

1.4.10. *Jeśli $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ jest rozkładem kanonicznym liczby naturalne $n \geqslant 2$, to*

$$I^{(m)}(n) = \binom{a_1+m-1}{a_1}\binom{a_2+m-1}{a_2}\cdots\binom{a_s+m-1}{a_s}.$$

([DoC] 347, [Dela]).

1.4.11. *Jeśli $p_1, \dots, p_s$ są parami różnymi liczbami pierwszymi, to*

$$I^{(m)}\Big(p_1 \cdots p_s\Big) = m^s.$$

([Wino] 36).

Zanotujmy również:

1.4.12. *Jeśli $f \in \mathbb{A}$ jest funkcją w pełni multyplikatywną, to*

$$f^{(m)} = I^{(m)} f$$

dla $m \in \mathbb{N}$. ([Dela]).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5 Pewne algebraiczne własności pierścienia funkcji arytmetycznych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że dany pierścień R jest *noetherowski*, jeśli każdy jego ideał jest skończenie generowany.

1.5.1. *Pierścień $\mathbb{A}$ (ze splotem Dirichleta) nie jest noetherowski.* ([CasE]).

D. Niech (p_n) będzie ciągiem (nieskończonym!) kolejnych liczb pierwszych. Definiujemy funkcje arytmetyczne $f_1, f_2, \dots$, przyjmując

$$f_i(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \ n = p_i; \\ 0, & \text{gdy } \ n \neq p_i. \end{cases}$$

Niech B będzie ideałem w $\mathbb{A}$ generowanym przez zbiór $\{f_1, f_2, \dots\}$. Wykażemy, że ideał B nie jest skończenie generowany. Przypuśćmy, że jest. Istnieje wtedy $s \in \mathbb{N}$ takie, że $B = (f_1, f_2, \dots, f_s)$. Ponieważ $f_{s+1} \in B$, więc

$$f_{s+1} = g_1 * f_1 + \cdots + g_s * f_s$$

dla pewnych $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{A}$. Mamy wówczas sprzeczność:

$$1 = f_{s+1}(p_{s+1}) = (g_1 * f_1)(p_{s+1}) + \cdots + (g_s * f_s)(p_{s+1}) = 0. \quad \boxtimes$$

1.5.2. *Pierścień $\mathbb{A}$ (ze splotem Dirichleta) jest lokalny, tzn. ma tylko jeden ideał maksymalny. Tym jedynym ideałem maksymalnym jest*

$$M = \Big\{f \in \mathbb{A};\ f(a) = 0\Big\}.$$

1.5.3. *Pierścień $\mathbb{A}$ (ze splotem Dirichleta) jest pierścieniem z jednoznacznością rozkładu.* ([CasE]).

1.5.4. *Pierścień $\mathbb{A}$ (ze splotem Dirichleta) jest izomorficzny z pierścieniem szeregów nad $\mathbb{C}$ przeliczalnej liczby zmiennych.* ([CasE], [Nar77] 66 zad.6).

1.5.5. *Niech* $L : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *będzie funkcją taką, że*

$$L(ab) = L(a) + L(b)$$

dla $a, b \in \mathbb{N}$ *(na przykład* $L(n) = \log n$*). Niech* $D : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *będzie funkcją określoną wzorem* $D(f) = L \cdot f$ *dla* $f \in \mathbb{A}$*, to znaczy:*

$$D(f)(n) = L(n)f(n), \quad \text{dla } f \in \mathbb{A}, n \in \mathbb{N}.$$

Funkcja D *jest różniczkowaniem pierścienia* $\mathbb{A}$*, to znaczy:* $D(f+g) = D(f) + D(g)$ *oraz* $D(f * g) = D(f) * g + f * D(g)$ *dla wszystkich* $f, g \in \mathbb{A}$. ([Nath] 302, 329).

1.5.6. *Rozpatrzmy funkcję* $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ *określoną równościami:* $D(1) = 0$ *oraz*

$$D(n) = n \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{p_i},$$

gdy $n \geqslant 2$ *oraz* $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ *jest rozkładem kanonicznym.*

(1) *Funkcja ta spełnia własności:*
  (a) $D(1) = 0$,
  (b) $D(p) = 1$ *dla* $p \in \mathbb{P}$,
  (c) $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ *dla* $a, b \in \mathbb{N}$.

(2) *Jest to jedyna funkcja z* $\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{C}$ *spełniająca własności (a), (b) i (c).*

(3) $D(n) = n \iff n = p^p$*, gdzie* $p \in \mathbb{P}$.

(4) $\dfrac{D(ab)}{ab} = \dfrac{D(a)}{a} + \dfrac{D(b)}{b}$ *dla* $a, b \in \mathbb{N}$.

(5) $\lim_{n\to\infty} D^n(63) = \infty$.

(6) *Jeśli* $n > 4$ *i* $4 \mid n$*, to* $D(n) > n$ *i* $4 \mid D(n)$. ([Mon] 10(1950)).

★ P. G. Brown, *Some comments on inverse arithmetic functions*, [MG] 89(516)(2005) 403-408.
E. D. Schwab, G. Silberberg, *A note on some discrete valuation rings of arithmetical functions*, [Arch] 36(2000) 103-109.
E. D. Schwab, G. Silberberg, *The valued ring of the arithmetical functions as a power series ring*, [Arch] 37(1)(2001) 77-80.
H. N. Shapiro, *On the convolution ring of arithmetical functions*, [Cpam] 25(1972) 287-336.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6 Różne fakty i zadania o funkcjach arytmetycznych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6.1. *Funkcja rosnąca* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *spełnia warunek* $f(ab) = f(a)+f(b)$ *dla* $a, b \in \mathbb{N}$*. Istnieje wtedy liczba rzeczywista* $p > 1$ *taka, że*

$$f(n) = \log_p n$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$*.* ([Br83] 102).

1.6.2. *Znaleźć wszystkie funkcje* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *takie, że dla wszystkich* $a, b \in \mathbb{N}$ *zachodzi równość*

$$f(ab) = f(a) + f(b).$$

([S59] 358).

R. Dowolną funkcję $g : \mathbb{P} \to \mathbb{Z}$ można jednoznacznie przedłużyć do funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ spełniającej podany warunek. Mamy wtedy: $f(1) = 0$ oraz

$$f\left(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}\right) = a_1 g(p_1) + \cdots + a_r g(p_r).$$

Uwaga. W ten sam sposób opisujemy wszystkie funkcje z $\mathbb{N}$ do G, spełniające podany warunek, gdzie G jest dowolną grupą abelową. ⊠

1.6.3. *Nie istnieje ściśle rosnąca funkcja* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ *taka, że*

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

dla $a, b \in \mathbb{N}$*.* ([Kw] 5/77 25).

1.6.4. *Niech* B_a*, gdzie* $a \in \mathbb{Z}$*, będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych większych lub równych* a*. Wyznaczyć wszystkie funkcje* $f : B_a \to \mathbb{R}$ *spełniające równanie funkcyjne*

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

([Bryn] 6.5).

O. Jeśli $a < 0$, to jedynymi takimi funkcjami są funkcje stałe 0 i 1. Jeśli $a > 0$, to jedynymi takimi funkcjami są funkcje postaci $f(x) = c^x$, gdzie $c \geqslant 0$. Jeśli $a = 0$, to oprócz funkcji wymienionych wyżej mamy także funkcję: $f(x) = 1$ dla $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ⊠

1.6.5. *Niech* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będzie funkcją taką, że*

$$f(n + 1) > f(f(n))$$

dla $n \in \mathbb{N}$*. Wtedy* f *jest funkcją tożsamościową.* ([Br83] 93).

1.6.6. *Jeśli funkcja* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *jest taka, że*

$$f(f(n)) = f(n + 1) + f(n)$$

dla $n \in \mathbb{N}$*, to jest różnowartościowa.* ([Berk] 3c/93).

1.6.7. *Nie istnieje funkcja* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *taka, że*

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$$

dla $n \in \mathbb{N}$. ([Berk] 2b/93).

1.6.8. *Jeśli* $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ *jest rozkładem kanonicznym liczby naturalnej* $n > 1$, *to definiujemy:*

$$f(n) := 1 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_s p_s.$$

Wykazać, że jeśli $n > 6$, *to w ciągu* $n, f(n), ff(n), fff(n), \ldots$ *od pewnego miejsca mamy* $8, 7, 8, 7, 8, 7, \ldots$. ([B-zm] 72, [GaT] 11/73, [ME] 2/1 1996).

1.6.9. ([Zw] 1999). *Znaleźć wszystkie surjekcje* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *spełniające warunek*

$$\underset{n,m\in\mathbb{N}}{\forall} \; n \mid m \iff f(m) \mid f(n).$$

R. Z równości $f(n) = f(m)$ wynika, że $n \mid m$ i $m \mid n$ i stąd, że $n = m$. Badane funkcje są więc bijekcjami. Stąd wynika, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\tau(n) = \tau(f(n)).$$

W szczególności $f(1) = 1$ i $f(p)$ jest liczbą pierwszą dokładnie wtedy, gdy p jest liczbą pierwszą.

Każda szukana funkcja jest jednoznacznie wyznaczona przez dowolną bijekcję $g : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, gdzie $\mathbb{P}$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych. Jeśli g jest taką bijekcją, to określamy $f(n)$ jako

$$f\left(p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}\right) = g(p_1)^{\alpha_1} \cdots g(p_s)^{\alpha_s},$$

gdzie $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ jest rozkładem kanonicznym. ⊠

1.6.10. *Niech* $s_n(x) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} x^d$. *Niech* $p_0(x) = 1$ *oraz*

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k(n) p_{n-k}(x),$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Wszystkie współczynniki każdego wielomianu* $p_n(x)$ *są liczbami całkowitymi. Innymi słowy,* $p_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}_0$. ([KoM] 2003 A310).

★ A. A. Gioia, *Arithmetic functions*, [Gio] 13-30.
E. M. Horadam, *Arithmetical functions of generalized primes*, [Mon] 68(7)(1961) 626-629.
J.-M. De Koninck, A. Mercier, *Arithmetical Functions*, [K-Me] 53-77, 200-259.
W. Marzantowicz, P. Zarzycki, *Funkcje arytmetyczne*, [Maza] 79-97.
P. J. McCarthy, *On a certain family of arithmetic functions*, [Mon] 65(8)(1958) 586-590.
A. Somayajulu, *A property of arithmetic functions*, [Mon] 75(5)(1968) 509-511.
S. Y. Yan, *Funkcje arytmetyczne*, [Yan] 58-75.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7 Splot Dirichleta i klasyczne funkcje arytmetyczne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Zanotujmy podstawowe równości dotyczące splotu Dirichleta i klasycznych funkcji arytmetycznych. Wszystkie potrzebne dowody znajdziemy w dalszych rozdziałach tej książki. Przez klasyczne funkcje arytmetyczne rozumiemy następujące funkcje:

e,	$e(1) = 1,\ e(n) = 0$ dla $n \geqslant 2$;
I,	$I(n) = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$;
T,	$T(n) = n$ dla $n \in \mathbb{N}$;
μ,	funkcja Möbiusa;
φ,	funkcja Eulera;
τ,	$\tau(n) =$ liczba dzielników naturalnych liczby n;
σ,	$\sigma(n) =$ suma dzielników naturalnych liczby n.

1.7.1. *Zachodzą następujące równości.*

(1) $I^{-1} = \mu$;

(2) $T^{-1} = \mu T$;

(3) $\varphi^{-1} = I * \mu T = I * T^{-1}$;

(4) $\tau^{-1} = \mu * \mu$;

(5) $\sigma^{-1} = T^{-1} * \mu = \mu T * \mu = \varphi^{-1} * \tau^{-1}$.

(6) $\varphi * I = T$;

(7) $\tau = I * I$;

(8) $\sigma = T * I$;

(9) $\mu * \sigma = T$.

(10) $\varphi * \tau = \sigma$.

Z tych równości wynika, że wszystkie klasyczne funkcje arytmetyczne należą do wspomnianej wcześniej grupy $\langle I, T\rangle$ (patrz 1.4.7).

W książkach z teorii liczb i artykułach o funkcjach arytmetycznych omawiane funkcje oznacza się różnymi innymi symbolami. Funkcje φ, μ i σ oznaczane są zwykle tak jak tutaj. Pozostałe funkcje nie mają jednolitych oznaczeń. Dla funkcji τ pojawiają się następujące oznaczenia: d ([Nar77], [Nar03], [Gy04]), Θ ([S50], [S59], [S68]), ν ([IrR]).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8 Inne sploty

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówiliśmy o splocie Dirichleta. Na zbiorze $\mathbb{A}$, wszystkich funkcji arytmetycznych, rozważa się również inne sploty. W rozdziale dziewiątym mówić będziemy o splocie unitarnym, oznaczanym przez $\circ$. Jeśli f, g są funkcjami arytmetycznymi, to ich splotem unitarnym $f \circ g$ jest funkcja arytmetyczna taka, że

$$(f \circ g)(n) = \sum_{ab=n,\ (a,b)=1} f(a)g(b),$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Symbol $\sum\limits_{ab=n,\ (a,b)=1}$ informuje, że sumowanie przebiega wszystkie pary (a,b), w których a, b są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi i ich iloczyn jest równy n. W definicji tego splotu pojawił się największy wspólny dzielnik. Istnieje podobny splot, w którym wykorzystuje się najmniejszą wspólną wielokrotność. Splot ten, oznaczany przez $\circ'$, definiuje się wzorem

$$(f \circ' g)(n) = \sum_{[a,b]=n} f(a)g(b),$$

dla $f, g \in \mathbb{A}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Teraz sumowanie przebiega wszystkie pary liczb naturalnych (a,b) takie, że $\operatorname{nww}(a,b) = n$.

1.8.1 (D. H. Lehmer)**.** *Jeśli f i g są funkcjami multyplikatywnymi, to funkcja $f \circ' g$ też jest multyplikatywna.* ([K-Me] z.468, [Nar03] 122).

1.8.2 (von Sterneck)**.** *Jeśli $F = 1 \circ' f$, $G = 1 \circ' g$ i $H = 1 \circ' (f \circ' g)$, to $H(n) = F(n)G(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.* ([Nar03] 122).

Istnieją również sploty zdefiniowane dla funkcji określonych na zbiorze $\mathbb{N}_0$ (nieujemnych liczb całkowitych). O jednym takim splocie, zwanym splotem Abela, powiemy dokładnie w rozdziale dziesiątym.

Przez $\mathbb{A}$ oznaczyliśmy zbiór wszystkich funkcji ze zbioru liczb naturalnych do zbioru liczb zespolonych. Ten zbiór liczb zespolonych nie jest tutaj szczególnie istotny. Spolt Dirichleta można zdefiniować w nieco ogólniejszej sytuacji. Ciało liczb zespolonych można zastąpić dowolnym pierścieniem przemiennym z jedynką.

Załóżmy, że R jest pierścieniem przemiennym z jedynką i oznaczmy przez $\mathbb{A}(R)$ zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do R. W szczególności $\mathbb{A}(\mathbb{C}) = \mathbb{A}$. W zbiorze $\mathbb{A}(R)$ definiujemy dodawanie w zwykły sposób i definiujemy mnożenie tak samo jak zdefiniowaliḿy splot Dirichleta. Zbiór $\mathbb{A}(R)$ jest pierścieniem (przemiennym z jedynką) ze względu na te działania. Łatwo wykazuje się następujące dwa stwierdzenia.

1.8.3. *Jeśli pierścień R jest bez dzielników zera, to pierścień $\mathbb{A}(R)$ również jest bez dzielników zera.*

1.8.4. *Niech $f \in \mathbb{A}(R)$. Funkcja f jest odwracalna w $\mathbb{A}(R)$ (względem splotu Dirichleta) wtedy i tylko wtedy, gdy element $f(1)$ jest odwracalny w pierścieniu R,*

★ L. Carlitz, *Arithmetic functions in an unusual setting*, [Mon] 73(6)(1966) 582-590.
T. M. K. Davison, *On arithmetical convolutions*, [CanB] 9(3)(1966) 287-296.
M. I. Fredman, *Arithm. convolution products and generalizations*, [Duke] 37(2)(1970) 231-242.
D. H. Lehmer, *A new calculus of numerical functions*, [AmJM] 53(1931) 843-854.
W. Narkiewicz, *On a class of arithmetical convolutions*, [ColM] 10(1963) 81-94.

Literatura

[AmJM] American Journal of Mathematics, (Amer. J. Math.).

[Arch] Archivum Mathematicum (Brno), Czsopismo matematyczne wydawane od 1965 roku.

[B-zm] V. I. Bernik, I. K. Żuk, O. W. Melnikow, *Zbiór Zadań Olimpijskich z Matematyki* (po rosyjsku), Narodnaja Aswieta, Minsk, 1980.

[Berb] S. K. Berberian, *Number-theoretic functions via convolution rings*, Mathematics Magazine, 65(2)(1992) 75-90.

[Berk] V. I. Bernik, *Byelorussian Mathematical Olympiads*, 1992-1993, Minsk, 1993.

[Br83] J. Browkin, *Zbiór Zadań z Olimpiad Matematycznych*, tom 6, 26-30, 74/75 - 78/79, WSiP, Warszawa, 1983.

[Bryn] M. Bryński, *Olimpiady Matematyczne*, tom 7, 31-35, 79/80 - 83/84, WSiP, Warszawa, 1995.

[CanB] Canadian Mathematical Bulletin, (Canad. Math. Bull.), kanadyjskie czasopismo matematyczne.

[CasE] E. D. Cashwell, C. J. Everett, *The ring of number-theorethic functions*, Pacific Journal of Mathematics, 9(1959), 975-985.

[Coh2] H. Cohen, *Number Theory. Volume II: Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Mathematics 240, Springer, 2007.

[ColM] Colloquium Mathematicum, polskie czasopismo matematyczne.

[Cpam] Communications on Pure and Applied Mathematics, (Comm. Pure Appl. Math.), czasopismo matematyczne.

[Dela] J. F. Delany, *Groups of arithmetic functions*, Mathematics Magazine, 78(2)(2005) 83-97.

[Dic1] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. I. *Divisibility and primality*, Carnegie Institute of Washington, 1919. Reprinted by AMS Chelsea Publishing, New York, 1992.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[DoC] S. Doduniekow, K. Czakyrjan, *Zadania z Teorii Liczb* (po rosyjsku), Narodna Poswieta, Sofia, 1985.

[Duke] Duke Mathematical Journal, (Duke Math. J.).

[ErV] M. Erickson, A. Vazzana, *Introduction to Number Theory*, CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2008.

[Fom] D. V. Fomin, *Sankt-Petersburskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Politechnika, Sankt-Petersburg, 1994.

[GaT] G. A. Galpierin, A. K. Tołpygo, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), 1935-1985, Moskwa, 1986.

[Gio] A. A. Gioia, *The Theory of Numbers, an introduction*, Dover Publications, INC, 2001.

[Gy04] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 2004.

[IrR] K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer - Verlag New York Inc., New York, 1982.

[K-Me] J.-M. De Koninck, A. Mercier, 1001 *Problems in Classical Number Theory*, AMS, 2007.

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2012.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[Maza] W. Marzantowicz, P. Zarzycki, *Elementarna Teoria Liczb*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006.

[ME] Mathematical Excalibur, chińskie popularne czasopismo matematyczne, Hong Kong.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[Nagl] T. Nagell, *Introduction to Number Theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1964.

[Nar03] W. Narkiewicz, *Teoria Liczb*, PWN, Wydanie trzecie, Warszawa, 2003.

[Nar77] W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa, 1977.

[Nath] M. B. Nathanson, *Additive Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics 164, Springer, 1996.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[S50] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa - Wrocław, 1950.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[S68] W. Sierpiński, *Arytmetyka Teoretyczna*, (wydanie 4), Biblioteka Matematyczna 7, PWN, Warszawa, 1968.

[Tatt] J. J. Tattersall, *Elementary Number Theory in Nine Chapters*, Second Edition, Cambridge University Press, 2005.

[Wino] I. Winogradow, *Elementy Teorii Liczb*, PWN, Warszawa, 1954.

[Yan] S. Y. Yan, *Teoria Liczb w Informatyce*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.