Podróże po Imperium Liczb

Część 05. Funkcje Arytmetyczne

Rozdział 4

4. Liczba dzielników naturalnych

Andrzej Nowicki 10 maja 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

4 Liczba dzielników naturalnych

Przez $\tau(n)$ oznaczamy liczbę wszystkich naturalnych dzielników liczby naturalnej n. Liczbę tę oznacza się też często przez $d(n)$. Tablica przedstawia liczby $\tau(n)$ dla $n \leqslant 360$.

1	1	41	2	81	5	121	3	161	4	201	4	241	2	281	2	321	4
2	2	42	8	82	4	122	4	162	10	202	4	242	6	282	8	322	8
3	2	43	2	83	2	123	4	163	2	203	4	243	6	283	2	323	4
4	3	44	6	84	12	124	6	164	6	204	12	244	6	284	6	324	15
5	2	45	6	85	4	125	4	165	8	205	4	245	6	285	8	325	6
6	4	46	4	86	4	126	12	166	4	206	4	246	8	286	8	326	4
7	2	47	2	87	4	127	2	167	2	207	6	247	4	287	4	327	4
8	4	48	10	88	8	128	8	168	16	208	10	248	8	288	18	328	8
9	3	49	3	89	2	129	4	169	3	209	4	249	4	289	3	329	4
10	4	50	6	90	12	130	8	170	8	210	16	250	8	290	8	330	16
11	2	51	4	91	4	131	2	171	6	211	2	251	2	291	4	331	2
12	6	52	6	92	6	132	12	172	6	212	6	252	18	292	6	332	6
13	2	53	2	93	4	133	4	173	2	213	4	253	4	293	2	333	6
14	4	54	8	94	4	134	4	174	8	214	4	254	4	294	12	334	4
15	4	55	4	95	4	135	8	175	6	215	4	255	8	295	4	335	4
16	5	56	8	96	12	136	8	176	10	216	16	256	9	296	8	336	20
17	2	57	4	97	2	137	2	177	4	217	4	257	2	297	8	337	2
18	6	58	4	98	6	138	8	178	4	218	4	258	8	298	4	338	6
19	2	59	2	99	6	139	2	179	2	219	4	259	4	299	4	339	4
20	6	60	12	100	9	140	12	180	18	220	12	260	12	300	18	340	12
21	4	61	2	101	2	141	4	181	2	221	4	261	6	301	4	341	4
22	4	62	4	102	8	142	4	182	8	222	8	262	4	302	4	342	12
23	2	63	6	103	2	143	4	183	4	223	2	263	2	303	4	343	4
24	8	64	7	104	8	144	15	184	8	224	12	264	16	304	10	344	8
25	3	65	4	105	8	145	4	185	4	225	9	265	4	305	4	345	8
26	4	66	8	106	4	146	4	186	8	226	4	266	8	306	12	346	4
27	4	67	2	107	2	147	6	187	4	227	2	267	4	307	2	347	2
28	6	68	6	108	12	148	6	188	6	228	12	268	6	308	12	348	12
29	2	69	4	109	2	149	2	189	8	229	2	269	2	309	4	349	2
30	8	70	8	110	8	150	12	190	8	230	8	270	16	310	8	350	12
31	2	71	2	111	4	151	2	191	2	231	8	271	2	311	2	351	8
32	6	72	12	112	10	152	8	192	14	232	8	272	10	312	16	352	12
33	4	73	2	113	2	153	6	193	2	233	2	273	8	313	2	353	2
34	4	74	4	114	8	154	8	194	4	234	12	274	4	314	4	354	8
35	4	75	6	115	4	155	4	195	8	235	4	275	6	315	12	355	4
36	9	76	6	116	6	156	12	196	9	236	6	276	12	316	6	356	6
37	2	77	4	117	6	157	2	197	2	237	4	277	2	317	2	357	8
38	4	78	8	118	4	158	4	198	12	238	8	278	4	318	8	358	4
39	4	79	2	119	4	159	4	199	2	239	2	279	6	319	4	359	2
40	8	80	10	120	16	160	12	200	12	240	20	280	16	320	14	360	24

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.1 Podstawowe fakty o funkcji τ

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.1.1. *Jeśli $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ jest kanonicznym rozkładem liczby naturalnej $n \geqslant 2$, to*

$$\tau(n) = (a_1 + 1) \cdots (a_s + 1).$$

4.1.2. *Funkcja τ jest multyplikatywna.*

4.1.3. *Liczba $\tau(n)$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą kwadratową.*

4.1.4. *Jeśli $\tau(n)$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby pierwszej.*

4.1.5 (Lerch 1887)**.** *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$\tau(n) = n - \sum_{k=1}^{n-1} t(n-k, k),$$

gdzie $t(n-k, k)$ oznacza liczbę dzielników liczby $n-k$ większych od k.
([Mon] 72(1965) 745-747, 75(5)(1968) 509-511).

★ L. E. Dickson, *Formula for the number of the divisors*, [Dic1] 51-52.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.2 Przykłady i własności

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.2.1 (Maple)**.**

$$\begin{aligned}
\tau(10!) &= 270 &&= 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \\
\tau(20!) &= 41040 &&= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 19 \\
\tau(30!) &= 2332800 &&= 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \\
\tau(40!) &= 102435840 &&= 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \\
\tau(50!) &= 4464046080 &&= 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23 \\
\tau(60!) &= 137106432000 &&= 2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 19 \cdot 29 \\
\tau(70!) &= 3543845437440 &&= 2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17^2 \\
\tau(80!) &= 117666791424000 &&= 2^{17} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 79 \\
\tau(90!) &= 3024469750579200 &&= 2^{17} \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 29 \\
\tau(100!) &= 39001250856960000 &&= 2^{21} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 17.
\end{aligned}$$

Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez n' oznaczamy liczbę naturalną mającą wszystkie cyfry liczby n zapisane w odwrotnej kolejności. Przykłady: $(12345)' = 54321$, $(335661)' = 166533$.

4.2.2 (Maple)**.** *Zachodzą równości:* $\tau(576) = 21$, $\tau(675) = 12$. *Jeśli więc* $n = 576$ *i* $m = 21$, *to* $\tau(n) = m$ *oraz* $\tau(n') = m'$. *Tę własność posiada też para* $(n, m) = (12753, 12)$: $\tau(12753) = 12$, $\tau(35721) = 21$. *Inne pary* (n, m) *z tą własnością:*

$$\begin{array}{ccc}
(20412, 42), & (1887444, 72), & (2937856, 44), \\
(52416, 84), & (2205225, 63), & (2965284, 81), \\
(408636, 18), & (2532352, 22), & (3663396, 81), \\
(1046529, 27), & (2576025, 27), & (4015104, 44), \\
(1422234, 36), & (2795584, 63), & (4235364, 63).
\end{array}$$

4.2.3. *Największe liczby zbiorów postaci* $A_n = \{\tau(k);\ k = 1, 2, \dots, n\}$ *dla pewnych liczb naturalnych* n :

$(n = 100)$, $\max(A_n) = 12 = 2^2 3 = \tau(60) = \tau(72) = \tau(84) = \tau(90) = \tau(86)$;
$(n = 1\,000)$, $\max(A_n) = 32 = 2^5 = \tau(840)$;
$(n = 2\,000)$, $\max(A_n) = 40 = 2^3 5 = \tau(1680)$;
$(n = 10\,000)$, $\max(A_n) = 64 = 2^6 = \tau(7560) = \tau(9240)$;
$(n = 100\,000)$, $\max(A_n) = 128 = 2^7 = \tau(83160) = \tau(98280)$;
$(n = 200\,000)$, $\max(A_n) = 160 = 2^5 5 = \tau(166320) = \tau(196560)$. (Maple).

4.2.4. *Liczby dwucyfrowe mają co najwyżej* 12 *dzielników naturalnych. Liczby* 60, 72, 84, 90 *i* 96 *są jedynymi liczbami dwucyfrowymi mającymi dokładnie* 12 *dzielników.* ([S59] 220).

4.2.5. *Jeśli* $n \leqslant 1000$, *to* $\tau(n) \leqslant 32$. *Jeśli* $n \leqslant 10\ 000$, *to* $\tau(n) \leqslant 64$. *Jeśli* $n \leqslant 100\ 000$, *to* $\tau(n) \leqslant 128$. ([S59] 220).

4.2.6. *Która z liczb* $k \in \{1, 2, 3, \dots, 1983\}$ *ma największą liczbę* $\tau(k)$? Odp. $k = 1680 = 2^4 3 \cdot 5 \cdot 7$, $\tau(k) = 40$. ([IMO] Longlist 1983).

4.2.7. *Jedyną liczbą naturalną podzielną przez* 5 *i mającą dokładnie* 5 *dzielników naturalnych jest liczba* 625. ([ZurJ] z.113).

4.2.8. *Jedyną liczbą naturalną podzielną przez* 12 *i mającą dokładnie* 14 *dzielników naturalnych jest liczba* $192 = 2^6 3$. ([Szn] 7.134).

4.2.9. *Znaleźć wszystkie liczby naturalne* n *takie, że* $18 \mid n$ *oraz* $\tau(n) = 14$.

4.2.10. *Znaleźć wszystkie czterocyfrowe liczby* n *takie, że* $\tau(n) = 15$. ([Szn] 7.132).

4.2.11. *Najmniejszą liczbę naturalną* n *taką, że* $\tau(n) = 30$ *jest* $n = 720$. ([S50] 114).

4.2.12. *Jedyną liczbą pierwszą* p *taką, że* $\tau(p^2 + 11) = 6$ *jest* $p = 3$. ([Kw] 5/95).

4.2.13. *Jeśli* p *jest liczbą pierwszą, to najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że* $\tau(n) = p$ *jest* $n = 2^{p-1}$. ([S59] 224).

4.2.14. *Jeśli* $q > p$ *są liczbami pierwszymi, to najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że* $\tau(n) = pq$ *jest* $n = 2^{q-1}3^{p-1}$. ([S59] 224).

4.2.15. *Najmniejszą nieparzystą liczbą* n *taką, że* $\tau(n) = \tau(360)$ *jest* $n = 3465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. ([Balt] 2002).

4.2.16. *Znaleźć wszystkie liczby naturalne* n *takie, że liczby* $\tau(n)$ *i* $\tau(n+100)$ *są nieparzyste.* ([OM] Białoruś 1995).

4.2.17. *Znaleźć wszystkie liczby naturalne* n *spełniające równość* $n = 100\tau(n)$. ([Balt] 2000).

4.2.18. *Niech* $\tau(n) = 16$ *i niech* $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{16} = n$. *Jeśli* $d_6 = 18$ *i* $d_9 - d_8 = 17$, *to* $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ *lub* $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 71$. ([OM] Rosja 1998).

4.2.19. *Niech* $a = 19^5 + 660^5 + 1316^5$. *Wiadomo, że* $\tau(a) = 48$. *Wiadomo również, że jednym z naturalnych dzielników liczby* a *jest* 25. *Znaleźć największy dzielnik liczby* a *mniejszy od* 10 000. Odp. 1995. ([Crux] 1998 s.222 H221).

4.2.20. *Dla każdej liczby naturalnej* $m > 1$ *równanie* $\tau(x) = m$ *ma nieskończenie wiele naturalnych rozwiązań.*

4.2.21. *Jeśli* $\tau(n) = \sqrt{n}$, *to* $n = 1$ *lub* $b = 9$. ([OM] Polska 2003/2004).

4.2.22. *Dla danej liczby naturalnej* n *oznaczmy przez* $a(n)$ *liczbę wszystkich naturalnych rozwiązań równania* $\tau(xn) = n$. *Mamy wtedy:* $a(n) = 1$ *jeśli* $n = 1$ *lub* 4, $a(n) = s!$ *gdy* n *jest iloczynem* s *parami różnych liczb pierwszych oraz* $a(n) = \infty$ *w pozostałych przypadkach.* ([Mon] 94(6)(1987) E3101).

★ M. G. Beumer, *The arithmetical function* $\tau_k(N)$, [Mon] 69(8)(1962) 777-781.
M. E. Grost, *The smallest number with a given number of divisors*, [Mon] 75(7)(1968) 725-729.
N. C. Scholomiti, *A property of the* τ*-function*, [Mon] 72(1965) 745-747.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.3 Funkcja τ i splot Dirichleta

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.3.1. $\tau = I * I$.

4.3.2. $\mu * \tau = I$, *tzn.* $\sum\limits_{k|n} \mu(k)\tau(n/k) = 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([DoC] 383).

4.3.3. *Funkcją odwrotną do funkcji* τ *(względem splotu Dirichleta) jest* $\mu * \mu$.

D. $(\mu * \mu) * \tau = \mu * (\mu * \tau) = \mu * I = e$. ⊠

4.3.4.

$$\tau^{-1}(p^k) = \begin{cases} 0, & gdy\ k \geqslant 3, \\ 1, & gdy\ k = 3, \\ -2, & gdy\ k = 1, \end{cases}$$

dla $p \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. ([Berb]).

D. $\tau^{-1}(p^k) = (\mu * \mu)(p^k) = \sum\limits_{i=0}^{k} \mu(p^i)\mu(p^{k-i}) = \mu(p^0)\mu(p^k) + \mu(p^1)\mu(p^{k-1})$. Jeśli $k \geqslant 3$, to $\mu(p^{k-1} = \mu(p^k) = 0$, więc $\tau^{-1}(p^k) = 0$. Dla $k = 2$ mamy: $\tau^{-1}(p^2) = \mu(p)\mu(p) = (-1)^2 = 1$, a dla $k = 1$ mamy: $\tau^{-1}(p) = \mu(p) + \mu(p) = (-1) + (-1) = -2$. ⊠

4.3.5. *Jeśli* $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ *jest rozkładem kanonicznym liczby naturalnej* $n \geqslant 2$, *to liczba* $\tau^{-1}(n)$ *jest niezerowa tylko wtedy, gdy wszystkie liczby* $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ *są mniejsze od* 3 *i wtedy*

$$\tau^{-1}(n) = (-2)^r,$$

gdzie r *jest liczbą tych wszystkich liczb w ciągu* $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, *które są równe* 1. ([Berb]).

D. Wynika to z 4.3.4 oraz z multyplikatywności funkcji τ^{-1}. ⊠

4.3.6. $\sum\limits_{k|n} \mu(k)\tau(k) = (-1)^{\omega(n)}$, *gdzie* $\omega(n)$ *jest liczbą liczb pierwszych dzielących* n. ([DoC] 379).

4.3.7. $\sum\limits_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right]$. ([Nagl] 26, [S65] 66, [DoC] 335).

D. Wiemy (patrz 1.1.11), że jeśli f jest funkcją arytmetyczną, to

$$\sum_{i=1}^{n} (f * I)(i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] f(i).$$

Wiemy również, że $I * I = \tau$. Zatem, $\sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] = \sum\limits_{k=1}^{n} (I * I)(k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \tau(k)$. ⊠

4.3.8. $\sum\limits_{k=1}^{2n} \tau(k) - \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{2n}{k}\right] = n$. ([Mon] 75(1)(1968) E1906).

D. Zauważmy, że jeśli $k \in \{n+1, n+2, \dots, n+n\}$, to $\left[\frac{2n}{k}\right] = 1$. Z faktu 4.3.7 otrzymujemy zatem:

$$\sum_{k=1}^{2n} \tau(k) - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{2n}{k}\right] = \sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{2n}{k}\right] - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{2n}{k}\right] = \sum_{k=n+1}^{2n} \left[\frac{2n}{k}\right] = \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = n. \ ⊠$$

4.3.9. $\sum\limits_{k|n} \tau(k) = n \iff n = 1, 3, 18, 36$. ([Mon] 10(1981) E2780).

4.3.10. $\sum\limits_{k|n} \tau(k)$ *jest liczbą wszystkich rozwiązań naturalnych równania*

$$xyz = n.$$

([S50] 114).

D. Rozważana liczba jest równa $I^{(3)}(n) = (I * I * I)(n)$; patrz 1.4.8. ⊠

★ L. E. Dickson, *Sum and number of divisors*, [Dic1] 279-325.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.4 Liczby $\tau(n^2)$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.4.1. *Liczba* $\tau(n^2)$ *pokrywa się z liczbą wszystkich par* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *takich, że* $\mathrm{nww}(a,b) = n$. ([Kurs] 184(1962), [K-Me] z.482).

4.4.2. *Dla danej liczby naturalnej* n *rozważmy równanie*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

(1) *Liczba wszystkich naturalnych rozwiązań* (x,y) *tego równania jest równa* $\tau(n^2)$.

(2) *Liczba wszystkich naturalnych rozwiązań* (x,y) *takich, że* $x \leqslant y$, *jest równa* $\dfrac{\tau(n^2)+1}{2}$.

(Patrz [N-1]).

4.4.3. $\sum\limits_{k|n} \tau(k^2) = \tau^2(n)$. ([Ko02]).

4.4.4. $\tau^2(n) = \sum\limits_{c|n} \sum\limits_{b|c} \sum\limits_{a|b} \mu^2(a)$. ([Mon] 78(4)(1971) E2235).

4.4.5. $\sum\limits_{k|n} 2^{\omega(k)} = \sum\limits_{k|n} \mu(k)\tau^2(n/k)$. ([Crux] 2000 s.247).

4.4.6. *Jeśli* $\tau(n^2) = 3\tau(n)$, *to* $\tau(n) = 15$. ([RaP]).

D. Niech $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ będzie rozkładem kanonicznym liczby n. Należy rozważyć równość:

$$(2\alpha_1 + 1) \cdots (2\alpha_k + 1) = 3(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Dla $k = 1$ równość taka jest niemożliwa. Załóżmy, że $k > 2$. Z nierówności $2(1 + 2a) \geqslant 3(1 + a)$ (prawdziwej dla $a > 1$) otrzymujemy:

$$(2\alpha_1 + 1) \cdots (2\alpha_k + 1) \geqslant 3^k/2^k(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) > 3(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1),$$

czyli (dla $k > 2$): $(2\alpha_1 + 1) \cdots (2\alpha_k + 1) > 3(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Zatem jedynie $k = 2$. W tym przypadku łatwo wykazać, że $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$ (lub $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$), czyli $\tau(n) = 15$. ⊠

4.4.7. *Najmniejszą liczbą naturalną* n *spełniającą równość*

$$\tau(n^2) = 3\tau(n)$$

jest $n = 144 = 12^2 = 2^4 3^2$. *Najmniejszą taką liczbą nieparzystą jest* $n = 45^2 = 3^4 5^2$.

4.4.8. *Znaleźć największą czterocyfrową liczbę naturalną* n *spełniającą równość*

$$\tau(n^2) = 3\tau(n).$$

Odp. $n = 9801$. ([OM] Czechy-Słowacja 1991/92).

4.4.9. *Jeśli* $\tau(n^2) = 5\tau(n)$, *to* $\tau(n) = 45$. *Najmniejszą taką liczbą* n *jest* $3600 = 2^4 3^3 5^2$. *Najmniejszą taką liczbą nieparzystą jest* $n = 99225 = 3^4 5^2 7^2$. ([Mat] 6/1995 z.1336).

4.4.10. *Niech* p_1, p_2, p_3 *będą parami różnymi liczbami pierwszymi. Niech* $n = p_1^i p_2^j p_3^k$, *gdzie* $i \leqslant j \leqslant k$ *są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Jeśli* (i, j, k) *jest jedną z trójek*

$$(8, 10, 16),\ (6, 12, 24),\ (6, 10, 38),\ (4, 32, 38),\ (4, 26, 52),\ (4, 24, 62),\ (4, 22, 80),\ (4, 20, 122),$$

to $\tau(n^2) = 7\tau(n)$.

4.4.11. *Jeśli* $\tau(n^2) = 9\tau(n)$, *to* $\tau(n) = 225$.

4.4.12. *Niech* $a \in \mathbb{N}$. *Jeśli istnieje liczba naturalna* n *taka, że*

$$\tau(n^2) = a\tau(n),$$

to a *jest liczbą nieparzystą i* n *jest liczbą kwadratową.*

D. Wykorzystamy fakt 4.1.3. Załóżmy, że $\tau(n^2) = a\tau(n)$. Liczba $\tau(n^2)$ jest (na mocy 4.1.3) nieparzysta. Stąd wynika, że $a\tau(n)$ jest liczbą nieparzystą. Zatem liczby a i $\tau(n)$ są nieparzyste i (znowu na mocy 4.1.3) liczba n jest kwadratowa. ⊠

4.4.13. *Niech* $a \in \mathbb{N}$. *Następujące dwa warunki są równoważne:*

(1) *istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $\dfrac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = a$;

(2) *liczba* a *jest nieparzysta.*

([IMO] Shortlist 1998, [Kw] 4/1999 M1672, [Djmp] 299(640), [AnAF] 184).

4.4.14. $2\tau(n^2) = 3\tau(n) \iff n \in \mathbb{P}$.

4.4.15. *Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną* n *taką, że* $83 \mid n$ *i* $\tau(n^2) = 63$.
([OM] Hiszpania 1992).

4.4.16. *Wiadomo, że* $\tau(2n^2) = 28$ *i* $\tau(3n^2) = 30$. *Znaleźć* $\tau(6n^2)$. ([OM] Mołdawia 1999).

4.4.17. *Jeśli* $\tau(n) + 33 = \tau(n^2)$, *to* $n = p^{33}$ *lub* $n = p^3 q^3$ *lub* $n = p^8 q$ *lub* $n = p^2 qr$, *gdzie* p, q, r *są różnymi liczbami pierwszymi.* ([OM] Czechy-Słowacja 1991/92).

★ J. Sandor, *The equation* $2\tau(n^2) = 3\tau(n)$, [Sand] 109.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.5 Liczby $\tau(n^s)$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.5.1 (Farkas 2004)**.** *Zbiór liczb wymiernych postaci*

$$\frac{\tau(n^3)}{\tau(n)}$$

zawiera wszystkie liczby naturalne niepodzielne przez 3. ([Gy04] 112).

4.5.2. $\tau(n^k) \neq k\tau(n)$ *dla* $n, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.6 Liczby $\tau(n)^s$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.6.1. *Jeśli* $\tau(n)^2 = n$, *to* $n = 1$ *lub* 9. ([OM] Kanada 1999).

4.6.2. $\tau(n)^2 = \sum\limits_{k|n} 2^{\omega(k)}\tau(n/k)$. ([Crux] 2000 s.247).

4.6.3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \tau(k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{\omega(k)} \sum\limits_{j=1}^{[n/k]} \left[\frac{[n/k]}{j}\right]$. ([Crux] 2000 s.247 z.2479).

4.6.4. *Jeśli* $\tau(n)^3 = 4n$, *to* $n = 2,\ 128$ *lub* 2000. ([IMO] Shortlist 2000, [Djmp] 310(668-669)).

4.6.5. *Jeśli* $\tau(n)^4 = n$, *to* $n = 1,\ 5^4,\ 3^8$ *lub* $3^8 5^4$. ([OM] Irlandia 1999).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.7 Kolejne liczby naturalne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.7.1. *Jeśli* $\tau(n) = 2$ *i* $\tau(n+1) = 3$, *to* $n = 3$. ([S59] 219).

4.7.2. *Jeśli* $\tau(n) = 2$ *i* $\tau(n-1) = 3$, *to* $n = 5$. ([S59] 219).

4.7.3. *Znaleźć wszystkie liczby naturalne* n *takie, że* 1) $\tau(n) = 2$, $\tau(n+1) = 4$; 2) $\tau(n) = 2$, $\tau(n-1) = 4$. ([S59] 220).

4.7.4. *Jeśli* $\tau(n-1) = 4$, $\tau(n) = 2$ *i* $\tau(n+1) = 4$, *to* $n = 7$. ([S59] 220).

4.7.5. *Nie ma liczby naturalnej* n *takiej, że* $\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3) = 4$. ([S59] 220).

4.7.6. $\tau(242) = \tau(243) = \tau(244) = \tau(245) = 6$. ([S59a] s.18).

4.7.7. $\tau(40311) = \tau(40312) = \tau(40313) = \tau(40314) = \tau(40315) = 8.$
([S59] 218, 223, [S59a] s.18).

4.7.8. *Najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że*

$$\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3) = \tau(n+4)$$

jest 11 605. ([Gy04] 111).

4.7.9. *Najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że*

$$\tau(n) = \tau(n+1) = \cdots = \tau(n+5)$$

jest 28 374. ([Gy04] 111).

4.7.10 (Vandemergel 1987). *Równość*

$$\tau(n) = \tau(n+1) = \cdots = \tau(n+6)$$

zachodzi dla $n = 171\,893$. *Każda z liczb* $\tau(n+i)$ *jest równa* 8. ([Gy04] 111).

4.7.11 (McCranie 2002). *Równość*

$$\tau(n) = \tau(n+1) = \cdots = \tau(n+7)$$

zachodzi dla $n = 1\,043\,710\,445\,721$. *Każda z liczb* $\tau(n+i)$ *jest równa* 8. ([Gy04] 111).

4.7.12. *Nie jest znana odpowiedź na pytanie czy istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych* n *takich, że*

$$\tau(n) = \tau(n+1).$$

([S59a] s.18).

4.7.13. *Jeśli* m *jest liczbą nieparzystą, to nie istnieje liczba naturalna* n *taka, że*

$$\tau(n) = \tau(n+1) = m.$$

([S59] 220).

4.7.14. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych* n *takich, że najmniejsza liczba naturalna mająca* n *naturalnych dzielników jest mniejsza od najmniejszej liczby naturalnej mającej* $n+1$ *naturalnych dzielników.* ([Mat] 1-2/55 66).

4.7.15. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje liczba naturalna* m *taka, że* $\tau(n+1) - \tau(n) > m$ *oraz* $\tau(n-1) - \tau(n) > m$. ([S59] 221).

★ R. K. Guy, *Solutions of* $\tau(n) = \tau(n+1)$, [Gy04] 111-113.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.8 Nierówności i funkcja τ

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.8.1. *Jeśli* $n \geqslant 3$, *to* $2 \leqslant \tau(n) < n$.

4.8.2. $\tau(n) \leqslant \frac{3}{4}n$, *dla* $n > 2$.

D. Wszystkie dzielniki naturalne liczby n, oprócz n, są mniejsze lub równe $\frac{n}{2}$. Zatem $\tau(n) \leqslant 1+\frac{n}{2}$. Dla $n > 3$ mamy $1 + \frac{n}{2} \leqslant \frac{3}{4}n$. Dla $n = 3$ sprawdzamy oddzielnie. ⊠

4.8.3. $\tau(n) \leqslant 2\sqrt{n}$. ([S50] 114).

D. ([S50]). Wynika to z tego, że z dwóch wzajemnie dopełniających się dzielników liczby n co najmniej jeden jest niewiększy od $\sqrt{n}$. ⊠

4.8.4. $\tau(n) \leqslant \sqrt{3n}$ *i równość zachodzi tylko dla* $n = 12$. ([San2] 85).

4.8.5. *Jeśli* $n \geqslant 4$ *jest liczbą parzystą, to* $\tau(n^2 + 1) < n$. ([OM] St Petersburg 1998).

4.8.6. $\tau(2^n - 1) \geqslant \tau(n)$. ([San2] 85).

4.8.7. $\tau(ab) \geqslant \tau(a) + \tau(b) - 1$, *dla* $a, b \in \mathbb{N}$. ([OM] St Petersburg 1996).

4.8.8. *Jeśli* $a > 1$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $a^n + 1$ *jest liczbą pierwszą, to* $\tau(a^n - 1) \geqslant n$. ([Balt] 1996).

4.8.9. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje liczba pierwsza* p *taka, że* $\tau(p-1) > n$. ([S68] 146).

4.8.10. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje liczba pierwsza* p *taka, że* $\tau(p - 1) > n$ *oraz* $\tau(p + 1) > n$. ([S64] 96).

4.8.11. *Niech* f *będzie wielomianem o nieujemnych współczynnikach całkowitych. Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje liczba naturalna* k *taka, że* $\tau(f(k)) > n$. ([Mat] 3/94 179).

4.8.12. *Jeśli* $a_1, a_2, \dots, a_{200}$ *są parami różnymi liczbami naturalnymi, to* $\tau(a_1a_2 \cdots a_{200}) \geqslant 19901$. ([OM] St Petersburg 2000).

4.8.13. $\tau(2^{p_1p_2\cdots p_n} + 1) \leqslant 4^n$, *gdzie* $p_1, \dots, p_n$ *są parami różnymi liczbami pierwszymi większymi od* 3. ([IMO] Shortlist 2002).

4.8.14. $\varphi(n) > \tau(n)$, *dla* $n > 30$. ([S50] 143).

4.8.15. $\varphi(n)\tau(n) \geqslant n$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([Mon] 74(2)(1967) E1962).

4.8.16. $\varphi(n)\tau(n)^2 \leqslant n^2$, *dla* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 4$. *Równość zachodzi tylko dla* $n = 1, 2, 8, 12$. ([Mon] 74(2)(1967) E1962).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.9 Iteracje funkcji τ

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.9.1. *Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wszystkie wyrazy ciągu*

$$\tau(n), \ \tau\tau(n), \ \tau\tau\tau(n), \ \dots,$$

poczynając od pewnego miejsca są równe 2. ([S50] 114).

D. Wynika to z nierówności $2 \leqslant \tau(n) < n$, zachodzącej dla dowolnej liczby naturalnej n większej od 2. ⊠

Z powyższego faktu wynika, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieje liczba naturalna k taka, że $\tau^k(n) = 2$. Najmniejszą taką liczbę k oznaczać będziemy przez $\gamma(n)$. Dla przykładu $\gamma(8) = 3$, gdyż $\tau(8) = 4$, $\tau(4) = 3$, $\tau(3) = 2$, czyli $\tau^3(8) = \tau^2(4) = \tau(3) = 2$. Podobnie $\gamma(150) = 5$, gdyż $\tau^5(150) = \tau^4(12) = \tau^3(6) = \tau^2(4) = \tau(3) = 2$. Liczba $\gamma(n)$ jest równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest nieparzystą liczbą pierwszą.

4.9.2 (Maple)**.** *Liczby $\gamma(n)$ dla pewnych liczb naturalnych n.*

$$\begin{array}{lclllclllcl}
\gamma(10) & = & 3, & & \gamma(100) & = & 3, & & \gamma(1000) & = & 3,\\
\gamma(20) & = & 4, & & \gamma(200) & = & 5, & & \gamma(2000) & = & 5,\\
\gamma(30) & = & 4, & & \gamma(300) & = & 5, & & \gamma(3000) & = & 5,\\
\gamma(40) & = & 4, & & \gamma(400) & = & 4, & & \gamma(4000) & = & 5,\\
\gamma(50) & = & 4, & & \gamma(500) & = & 5, & & \gamma(5000) & = & 5,\\
\gamma(60) & = & 5, & & \gamma(600) & = & 5, & & \gamma(6000) & = & 5,\\
\gamma(70) & = & 4, & & \gamma(700) & = & 5, & & \gamma(7000) & = & 5,\\
\gamma(80) & = & 4, & & \gamma(800) & = & 5, & & \gamma(8000) & = & 5,\\
\gamma(90) & = & 5, & & \gamma(900) & = & 4, & & \gamma(9000) & = & 5.
\end{array}$$

4.9.3. *Najmniejszymi liczbami naturalnymi n takimi, że $\gamma(n) = 1, 2, 3, 4, 5$ są liczby równe odpowiednio $3, 4, 6, 12, 60$. Najmniejszą liczbą naturalną n taką, że $\gamma(n) = 6$ jest $n = 5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Sprawdzono, że jeśli $n \leqslant 2 \cdot 10^6$, to $\gamma(n) \leqslant 6$.* (Maple).

4.9.4. *Dla dowolnej liczby naturalnej k istnieje liczba naturalna n taka, że $k = \gamma(n)$.*

D. Dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ przykłady odpowiednich liczb n zostały już podane. Dla następnych liczb k liczby n można skonstruować indukcyjnie, w na stępujący sposób. Niech $k = \gamma(m)$, gdzie $k, m \in \mathbb{N}$. Wtedy $k + 1 = \gamma(n)$ dla $n = 2^{m-1}$. Mamy bowiem: $\tau^{k+1} = \tau^k(\tau(2^{m-1})) = \tau^k(m) = 2$. ⊠

4.9.5. *Niech $2 \leqslant a \in \mathbb{N}$. Definiujemy ciąg (a_n) przyjmując $a_1 = a$, $a_{n+1} = \tau(a_n)$ dla $n \geqslant 1$. Mamy więc:*

$$a_1 = a, \ a_2 = \tau(a), \ a_3 = \tau\tau(a), \ a_4 = \tau\tau\tau(a), \ \cdots .$$

Ciąg (a_n) nie posiada żadnej liczby kwadratowej wtedy i tylko wtedy, gdy a jest liczbą pierwszą. ([Dlt] 6/2004).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.10 Ciągi rekurencyjne z funkcją τ

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.10.1. *Niech c będzie ustaloną liczbą naturalną. Ciąg (a_n) określony jest przez warunki*

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = \tau(a_n) + c, \ \text{dla } n = 1, 2, \cdots .$$

Wykazać, że ciąg ten jest od pewnego miejsca okresowy. ([OM] Polska 2005/2006).

D. ([SPom] 57, s.58). Skorzystamy z nierówności $\tau(m) \leqslant \frac{m}{2} + 1$, zachodzącej dla każdej liczby naturalnej m. Z tej nierówności wynika, że

$$a_n \leqslant 2c + 2, \ \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Istotnie, dla $n = 1$ jest to oczywiste i jeśli $a_n \leqslant 2c + 2$, to

$$a_{n+1} = \tau(a_n) + c \leqslant \frac{a_n}{2} + 1 + c \leqslant \frac{2c+2}{2} + 1 + c = 2c + 2.$$

Ciąg (a_n) jest więc ograniczony. Istnieją zatem dwie liczby naturalne $u < v$ takie, że $a_u = a_v$. Każdy wyraz a_n wyznacza wyraz następny a_{n+1}. Stąd wynika, że $(a_u, a_{u+1}, \ldots, a_{v-1})$ jest okresem danego ciągu. ⊠

4.10.2. *Przykłady ciągów $a = (a_n)$, określonych równościami*

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = \tau(a_n) + c, \ \text{dla } n = 1, 2, \cdots ,$$

dla pewnych liczb naturalnych c. Wiadomo (patrz 4.10.1), że każdy taki ciąg jest od pewnego miejsca okresowy.

(1) $c = 1$; $a = (1, 2, 3, 3, 3, \ldots)$.

(2) $c = 2$; $a = (1, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \ldots)$.

(3) $c = 3$; $a = (1, 4, 6, 7, 5, 5, 5, 5, \ldots)$.

(4) $c = 7$; $a = (1, 8, 11, 9, 10, 11, 9, 10, 11, 9, 10, \ldots)$.

(5) $c = 15$; $a = (1, 16, 20, 21, 19, 17, 17, 17, 17, \ldots)$.

4.10.3. *Niech b będzie ustaloną liczbą naturalną. Ciąg (a_n) określony jest przez warunki*

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = b\tau(a_n), \ \text{dla } n = 1, 2, \cdots .$$

Ciąg ten jest od pewnego miejsca okresowy.

D. Skorzystamy z nierówności $\tau(m) \leqslant \sqrt{3m}$, dla $m \in \mathbb{N}$. Wykażemy, że

$$a_n \leqslant 3b^2, \ \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ i $a_n \leqslant 3b^2$. Wtedy

$$a_{n+1} = b\tau(a_n) \leqslant b\sqrt{3a_n} \leqslant b\sqrt{3 \cdot 3b^2} = 3b^2.$$

Ciąg (a_n) jest więc ograniczony. Istnieją zatem dwie liczby naturalne $u < v$ takie, że $a_u = a_v$. Każdy wyraz a_n wyznacza wyraz następny a_{n+1}. Stąd wynika, że $(a_u, a_{u+1}, \ldots, a_{v-1})$ jest okresem danego ciągu. ⊠

4.10.4 (Maple)**.** *Przykłady ciągów $a = (a_n)$, określonych równościami*

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = b\tau(a_n),\ \ dla\ n = 1, 2, \cdots ,$$

dla pewnych liczb naturalnych b. Wiadomo (patrz 4.10.3), że każdy taki ciąg jest od pewnego miejsca okresowy.

(1) $b = 2$; $a = (1, 2, 4, 6, 8, 8, 8, 8, \dots)$.

(2) $b = 3$; $a = (1, 3, 6, 12, 18, 18, 18, 18, \dots)$.

(3) $b = 4$; $a = (1, 4, 12, 24, 32, 24, 32, 24, 32, \dots)$.

(4) $b = 9$; $a = (1, 9, 27, 36, 81, 45, 54, 72, 108, 108, 108, 108, \dots)$.

(5) $b = 15$; $a = (1, 15, 60, 180, 270, 240, 300, 270, 240, 300, 270, 240, 300, \dots)$.

4.10.5. *Niech b, c będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Rozważmy ciąg (a_n) zdefiniowany równościami:*

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = b\tau(a_n) + c,\ \ dla\ n = 1, 2, \cdots .$$

Ciąg ten jest od pewnego miejsca okresowy.

D. Skorzystamy z nierówności $\tau(m) \leqslant \sqrt{3m}$, dla $m \in \mathbb{N}$. Wykażemy, że

$$a_n \leqslant 3b^2 + bc + c,\ \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech $d = 3b^2 + bc + c$. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ i $a_n \leqslant d$. Wtedy

$$a_{n+1} = b\tau(a_n) + c \leqslant b\sqrt{3a_n} + c \leqslant b\sqrt{3d} + c.$$

Łatwo sparwdzić, że $b\sqrt{3d} + c \leqslant d$. Ciąg (a_n) jest więc ograniczony. Istnieją zatem dwie liczby naturalne $u < v$ takie, że $a_u = a_v$. Każdy wyraz a_n wyznacza wyraz następny a_{n+1}. Stąd wynika, że $(a_u, a_{u+1}, \dots, a_{v-1})$ jest okresem danego ciągu. ⊠

4.10.6 (Maple)**.** *Przykłady ciągów $a = (a_n)$, określonych równościami*

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = b\tau(a_n) + c,\ \ dla\ n = 1, 2, \cdots ,$$

dla pewnych liczb naturalnych b, c. Wiadomo (patrz 4.10.5), że każdy taki ciąg jest od pewnego miejsca okresowy.

(1) $(b, c) = (2, 1)$; $a = (1, 3, 5, 5, 5, 5, \dots)$.

(2) $(b, c) = (2, 2)$; $a = (1, 4, 8, 10, 10, 10, 10, \dots)$.

(3) $(b, c) = (3, 1)$; $a = (1, 4, 10, 13, 7, 7, 7, 7, \dots)$.

(4) $(b, c) = (3, 2)$; $a = (1, 5, 8, 14, 14, 14, 14, \dots)$.

(5) $(b, c) = (4, 1)$; $a = (1, 5, 9, 13, 9, 13, 9, 13, 9, 13, \dots)$.

(6) $(b, c) = (4, 2)$; $a = (1, 6, 18, 26, 18, 26, 18, 26, 18, 26, \dots)$.

(7) $(b, c) = (5, 4)$; $a = (1, 9, 19, 14, 24, 44, 34, 24, 44, 34, 24, 44, 34, \dots)$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.11 Suma sześcianów i kwadrat sumy

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. Ciąg $(1, 2, \ldots, n)$ jest zatem rozwiązaniem w zbiorze liczb naturalnych równania

$$(*) \qquad x_1^3 + x_2^3 + \cdots x_n^3 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2.$$

Naturalnym rozwiązaniem tego równania jest również $(n, n, \ldots, n)$. Inne rozwiązania otrzymać można przy pomocy następującego twierdzenia.

4.11.1 (Liouville 1857). *Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to*

$$\sum_{k|n} \tau(k)^3 = \left(\sum_{k|n} \tau(k)\right)^2.$$

([Dic1] 286, [S59] 223, [Kw] 1/80 34, [MG] 494(1998) 271).

U. Dla $n = 2$ mamy $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$; dla $n = 4$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$; dla $n = 12$, $1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = (1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6)^2$. ⊠

D. Niech $f(n) = \sum_{k|n} \tau(k)^3$, $g(n) = \left(\sum_{k|n} \tau(k)\right)^2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Należy pokazać, że funkcje f i g są równe. Zauważmy, że

$$f = I * \tau^3, \quad g = (I * \tau)(I * \tau),$$

gdzie $*$ oznacza splot Dirichleta oraz $I(n) = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że funkcje f i g są multyplikatywne. Wystarczy zatem pokazać, że $f(p^n) = g(p^n)$ dla $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$. Przypadek ten, to dobrze znana równość: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + (n + 1))^2$. ⊠

U. Twierdzenie podobnego typu zachodzi dla dzielników unitarnych. Wspomnimy o tym w rozdziale dziewiątym. ⊠

Spójrzmy na inne naturalne rozwiązania równiania $(*)$.

4.11.2. *Wszystkie rozwiązania naturalne $(x_1, \ldots, x_n)$ równiania $(*)$ dla $n = 1, 2, \ldots, 5$. Zakładamy, że $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.*

(1) $n = 1:$ (1);

(2) $n = 2:$ $(1, 2)$, $(2, 2)$;

(3) $n = 3:$ $(1, 2, 3)$, $(3, 3, 3)$;

(4) $n = 4:$ $(1, 2, 2, 4)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 2, 4, 4)$, $(4, 4, 4, 4)$;

(5) $n = 5:$ $(1, 2, 2, 3, 5)$, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 6)$, $(5, 5, 5, 5, 5)$; (Maple).

4.11.3 (Maple). *Równanie $(*)$ dla $n = 6$ ma dokładnie 18 rozwiązań naturalnych $(x_1, \ldots, x_6)$ takich, że $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_6$:*

$$\begin{array}{lll}
(1,1,1,2,2,5), & (1,2,3,4,5,6), & (3,3,3,3,5,7), \\
(1,1,1,4,4,5), & (1,4,4,4,6,6), & (3,3,3,6,6,6), \\
(1,1,2,4,5,5), & (2,2,2,2,2,6), & (3,4,5,5,6,7), \\
(1,1,4,5,5,5), & (2,2,4,4,6,6), & (3,5,5,5,6,7), \\
(1,2,2,3,4,6), & (2,4,4,5,5,7), & (4,5,5,6,6,7), \\
(1,2,2,4,4,6), & (2,4,4,6,6,6), & (6,6,6,6,6,6).
\end{array}$$

4.11.4 (Maple)**.** *Równanie* $(*)$ *dla* $n = 7$ *ma dokładnie* 30 *rozwiązań naturalnych* $(x_1, \dots, x_7)$ *takich, że* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_7$*:*

$$\begin{array}{lll}
(1,1,2,2,5,5,6), & (1,2,6,6,6,6,6), & (2,4,4,6,6,6,8),\\
(1,1,3,4,4,5,7), & (1,3,5,5,5,7,7), & (2,6,6,6,6,6,8),\\
(1,1,4,5,5,5,7), & (1,4,4,5,6,7,7), & (3,3,3,3,4,6,8),\\
(1,1,5,5,6,6,6), & (1,5,5,6,6,7,7), & (3,3,3,3,5,6,8),\\
(1,2,2,2,3,6,6), & (2,2,2,2,5,5,7), & (3,3,3,4,6,6,8),\\
(1,2,2,3,3,3,7), & (2,2,4,4,4,4,8), & (3,5,5,5,7,7,8),\\
(1,2,2,3,4,5,7), & (2,3,3,3,4,4,8), & (4,4,4,5,5,5,9),\\
(1,2,2,4,6,6,6), & (2,3,3,3,5,7,7), & (4,5,5,5,6,6,9),\\
(1,2,3,4,5,6,7), & (2,3,3,5,6,7,7), & (6,6,6,6,6,6,9),\\
(1,2,3,6,6,6,6), & (2,3,6,6,6,7,7), & (7,7,7,7,7,7,7).
\end{array}$$

4.11.5 (Maple)**.** *Równanie* $(*)$ *dla* $n = 8$ *ma dokładnie* 94 *rozwiązania naturalne* $(x_1, \dots, x_8)$ *takich, że* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_8$*:*

$$\begin{array}{llll}
(1,1,1,1,1,1,5,5), & (1,2,5,6,6,7,7,8), & (2,2,4,4,6,6,6,9), & (3,4,5,6,6,8,8,9),\\
(1,1,1,1,1,2,3,6), & (1,2,5,7,7,7,7,7), & (2,2,4,4,6,6,8,8), & (3,4,7,7,7,7,8,9),\\
(1,1,1,1,2,2,5,6), & (1,3,3,3,3,5,7,8), & (2,2,5,5,6,7,8,8), & (3,5,5,5,6,7,7,10),\\
(1,1,1,1,4,5,6,6), & (1,3,3,3,6,6,7,8), & (2,2,5,7,7,7,7,8), & (3,5,6,6,6,7,9,9),\\
(1,1,1,2,2,5,6,6), & (1,3,4,4,4,5,8,8), & (2,2,6,7,7,7,7,8), & (3,6,6,6,7,7,7,10),\\
(1,1,1,2,5,5,5,7), & (1,3,4,4,5,6,8,8), & (2,3,3,5,5,6,7,9), & (3,6,7,7,7,8,8,9),\\
(1,1,1,2,5,6,6,6), & (1,3,4,6,6,6,8,8), & (2,3,4,5,5,7,7,9), & (4,4,4,4,4,4,6,10),\\
(1,1,2,2,2,2,4,7), & (1,3,4,6,7,7,7,8), & (2,3,4,6,7,7,8,8), & (4,4,4,4,5,5,7,10),\\
(1,1,2,2,3,5,6,7), & (1,3,5,5,5,5,7,9), & (2,3,6,7,7,7,8,8), & (4,4,4,4,8,8,8,8),\\
(1,1,2,4,4,5,5,8), & (1,4,4,6,6,6,7,9), & (2,4,4,6,6,6,8,9), & (4,4,4,5,5,5,9,9),\\
(1,1,2,4,5,5,5,8), & (1,4,5,5,7,7,8,8), & (2,4,6,6,6,7,8,9), & (4,4,4,5,5,6,9,9),\\
(1,1,3,3,3,4,5,8), & (1,4,5,6,7,7,8,8), & (2,5,5,5,5,5,6,10), & (4,4,5,5,5,7,9,9),\\
(1,1,4,5,5,5,7,8), & (1,5,5,7,7,7,8,8), & (2,5,5,6,7,7,8,9), & (4,4,6,6,7,7,9,9),\\
(1,2,2,2,4,4,4,8), & (1,6,6,6,6,8,8,8), & (2,6,6,6,6,6,6,10), & (4,5,5,5,8,8,8,9),\\
(1,2,2,2,4,5,7,7), & (2,2,2,2,3,3,3,8), & (2,6,6,6,8,8,8,8), & (4,5,5,6,6,7,8,10),\\
(1,2,2,2,5,5,7,7), & (2,2,2,2,3,6,7,7), & (2,7,7,7,7,8,8,8), & (4,6,6,6,7,8,9,9),\\
(1,2,2,3,3,3,7,7), & (2,2,2,3,5,5,7,8), & (3,3,3,3,3,6,6,9), & (5,5,5,7,7,7,8,10),\\
(1,2,2,3,4,4,6,8), & (2,2,2,3,6,7,7,7), & (3,3,3,3,4,5,7,9), & (5,5,7,7,7,8,9,9),\\
(1,2,2,3,4,5,6,8), & (2,2,2,5,7,7,7,7), & (3,3,3,3,5,6,7,9), & (6,6,6,6,6,6,9,10),\\
(1,2,2,4,4,6,6,8), & (2,2,3,4,4,4,5,9), & (3,3,3,3,5,7,8,8), & (6,6,7,7,8,8,9,9),\\
(1,2,2,5,5,7,7,7), & (2,2,3,4,4,7,7,8), & (3,3,4,4,5,6,8,9), & (6,6,8,8,8,8,8,9),\\
(1,2,3,3,4,7,7,7), & (2,2,3,4,6,7,7,8), & (3,3,5,7,7,8,8,8), & (8,8,8,8,8,8,8,8).\\
(1,2,3,4,5,6,7,8), & (2,2,4,4,4,4,8,8), & (3,4,5,5,5,6,7,10), & \\
(1,2,4,5,5,7,7,8), & (2,2,4,4,4,6,6,9), & (3,4,5,5,6,6,7,10), &
\end{array}$$

4.11.6 (Maple)**.** *Równanie* $(*)$ *dla* $n = 9$ *ma dokładnie* 226 *rozwiązań naturalnych* $(x_1, \dots, x_9)$ *takich, że* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_9$.

4.11.7. *Jeśli* $(x_1, \dots, x_n)$ *jest naturalnym rozwiązaniem równania* $(*)$ *takim, że* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$*, to* $x_n < n^2$

D. $x_n^3 < x_1^3 + \dots + x_n^3 = (x_1 + \dots + x_n)^2 \leqslant (nx_n)^2 = n^2 x_n^2$. ⊠

4.11.8. *Niech* $(x_1, \dots, x_n)$ *będzie naturalnym rozwiązaniem równania* $(*)$ *takim, że* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$*. Wtedy* $x_1 \leqslant n$*.*

D. Przypuśćmy, że $x_1 > n$. Wtedy $x_1 = n + a_1$, $x_2 = n + a_2$, $\dots, x_n = n + a_n$, gdzie $a_1, \dots, a_n$ są pewnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Mamy wówczas równość:

$$\sum_{i=1}^{n} (n + a_i)^3 = \left(n^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 ,$$

z której kolejno otrzymujemy równości:

$$\sum_{i=1}^{n}(n^3+3n^2a_i+3na_i^2+a_i^3) = n^4+2n^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2,$$

$$n^4+3n^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+3n\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^3\right) = n^4+2n^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$$

i konsekwentnie

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^3\right)+n^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+2n\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)+A=0, \tag{1}$$

gdzie $A = n\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$. Łatwo wykazać, że $A \geqslant 0$. Równość (1) jest zatem sprzecznością; liczba występująca po jej lewej stronie jest ostro większa od zera. ⊠

4.11.9. *Niech $s \in \mathbb{N}$ i niech $x_1,\dots,x_s$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że*

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3 = (x+1+x_2+\cdots+x_n)^2$$

dla $n=1,2,\dots,s$. Wykazać, że $x_1,\dots,x_s$ są liczbami całkowitymi.

([OM] Rosja 2000, [Crux] 2005 s.94).

★ J. Mason, *Generalizing "sums of cubes equal to squares of sums"*, [MG] 85(502)(2001) 50-58.
D. Pagni, *An interesting number fact*, [MG] 494(1998) 271-273.
K. R. S. Sastry, *More unitary divisor problems*, [Crux] 1997 406-409.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.12 Liczba dzielników i szeregi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.12.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^2}=\frac{\pi^4}{36}$. ([HW4], [Crux] s.319 z.2248).

4.12.2. *Jeśli $2 \leqslant a \in \mathbb{N}$, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(k)}{a^n} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^n-1}.$$

([Mon] NT-214).

4.12.3 (Erdös). *Liczba* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ *jest niewymierna.* ([Gy04] 104).

4.12.4 (J. H. Lambert 1771). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n$. ([Dic1] 280, dowód patrz 10.12.1).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.13 Różne fakty i zadania dotyczące funkcji τ

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.13.1. *Dla danej liczby naturalnej n rozpatrzmy zbiór wszystkich liczb postaci $\tau(k)$, gdzie $k \mid n$. Wykazać, że elementy tego zbioru można ustawić w ciąg (a_n) w ten sposób, że*

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \cdots + (-1)^{s+1}a_s^2 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_s. \quad \text{([Kw] 1/80 35).}$$

U. Dla $n = 12$ mamy liczby $1, 2, 2, 3, 4, 6$. Jeśli $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 2$, $a_6 = 1$, to $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$. W przypadku $n = p^{m-1}$ (gdzie $p \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{N}$) otrzymujemy równość postaci $\pm(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots) = (1 + 2 + \cdots + m)$. ⊠

4.13.2. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieją liczby naturalne $a_1, \ldots, a_n$ takie, że*

$$\tau(a_1 + a_2 + \cdots + a_s) = a_s,$$

dla wszystkich $s = 1, \ldots, n$. ([OM] St Petersburg 1995).

D. Definiujemy najpierw liczby naturalne $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1$. Przyjmujemy, że s_n jest dowolną liczbą naturalną większą od 4^{n+1}. Następnie: $s_{n-1} = s_n - \tau(s_n)$, $s_{n-2} = s_{n-1} - \tau(s_{n-1})$, ..., $s_1 = s_2 - \tau(s_2)$. Tezę spełniają liczby $a_1, \ldots, a_n$ określone tak: $a_1 = s_1$, $a_2 = s_2 - s_1$, ..., $a_n = s_n - s_{n-1}$. ⊠

4.13.3. *Średnia geometryczna wszystkich naturalnych dzielników liczby n jest równa $\sqrt{n}$.* ([Mat] 2/51 61).

4.13.4. *Iloczyn średniej arytmetycznej wszystkich naturalnych dzielników liczby n przez ich średnią harmoniczną jest równy n.* ([Mat] 1/52 64).

4.13.5. *Dla każdej liczby naturalnej k zbiór wszystkich liczb naturalnych n takich, że $k \mid \tau(n)$, zawiera nieskończony postęp arytmetyczny.* ([S64] 45).

R. Wszystkie liczby postaci $2^k t + 2^{k-1}$, gdzie $t \in \mathbb{N}$, mają tę własność. ⊠

4.13.6. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że liczba $\frac{n}{\tau(n)}$ jest całkowita.* Dowód. *Tak jest na przykład dla $n = p^{p-1}$, gdzie $p \in \mathbb{P}$.* ([Balt] 1992).

4.13.7. ([S64] 198)

$$\begin{array}{rcrcl@{\qquad}rcrcl}
\varphi(1) &=& \tau(1) &=& 1, & \varphi(18) &=& \tau(18) &=& 6,\\
\varphi(3) &=& \tau(3) &=& 2, & \varphi(24) &=& \tau(24) &=& 8,\\
\varphi(8) &=& \tau(8) &=& 4, & \varphi(30) &=& \tau(30) &=& 8.\\
\varphi(10) &=& \tau(10) &=& 4, & & & & &
\end{array}$$

4.13.8. *$\tau(n) + \varphi(n) = n$, gdy $n = 6, 8, 9$; $\tau(n) + \varphi(n) = n + 1$, gdy $n = 1, 4$ lub n jest liczbą pierwszą; w pozostałych przypadkach $\tau(n) + \varphi(n) < n$.* ([Crux] 1994 s.51 z.1817).

★ J. Sandor, *The equation $\varphi(n) = \tau(n)$*, [Sand] 110-111.

Literatura

[AnAF] T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, 104 *Number Theory Problems. From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2007.

[Balt] Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich.

[Berb] S. K. Berberian, *Number-theoretic functions via convolution rings*, Mathematics Magazine, 65(2)(1992) 75-90.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Dic1] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. I. *Divisibility and primality*, Carnegie Institute of Washington, 1919. Reprinted by AMS Chelsea Publishing, New York, 1992.

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[DoC] S. Doduniekow, K. Czakyrjan, *Zadania z Teorii Liczb* (po rosyjsku), Narodna Poswieta, Sofia, 1985.

[Gy04] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 2004.

[HW4] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1960.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[K-Me] J.-M. De Koninck, A. Mercier, 1001 *Problems in Classical Number Theory*, AMS, 2007.

[Ko02] L. Kourliandtchik, *Impresje Liczbowe*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń, 2001.

[Kurs] J. Kürschak, *Węgierskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), MIR, Moskwa, 1976.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N-1] A. Nowicki, *Liczby Wymierne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.1, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2008.

[Nagl] T. Nagell, *Introduction to Number Theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1964.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[RaP] Z. Ramowicz, E. Piegat, *Sto Zadań z Błyskiem*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, 1996.

[S50] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa - Wrocław, 1950.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[S59a] W. Sierpiński, *O Stu Prostych, ale Trudnych Zagadnieniach Arytmetyki. Z Pogranicza Geometrii i Arytmetyki*, Biblioteczka Matematyczna 6, PZWS, Warszawa, 1959.

[S64] W. Sierpiński, *200 Zadań z Elementarnej Teorii Liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa, 1964.

[S65] W. Sierpiński, *Wstęp do Teorii Liczb*, (wydanie 2), Biblioteczka Matematyczna 25, PZWS, Warszawa, 1965.

[S68] W. Sierpiński, *Arytmetyka Teoretyczna*, (wydanie 4), Biblioteka Matematyczna 7, PWN, Warszawa, 1968.

[San2] D. A. Santos, *Elementary Number Theory Notes*, Preprint, Internet 2002.

[Sand] J. Sándor, *Geometric Theorems, Diophantine Equations, and Arithmetic Functions*, American Research Press, Rehoboth, 2002.

[SPom] Sprwozdanie Komitetu Głównego Polskiej Olimpiady Matematycznej.

[Szn] L. B. Szneperman, *Zbiór Zadań z Algebry i Teorii Liczb* (po rosyjsku), Minsk, 1982.

[ZurJ] A. Żurek, P. Jędrzejewicz, *Zbiór Zadań dla Kółek Matematycznych w Szkole Podstawowej*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe 2004.