

# Podróże po Imperium Liczb

## 03 Liczby Kwadratowe

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Wersja poprawiona i uzupełniona

19 marca 2012

<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>1 Cyfry liczb kwadratowych</b>	<b>5</b>
1.1 Przykłady liczb kwadratowych . . . . .	6
1.2 Ciągi liczb kwadratowych i cyfry . . . . .	6
1.3 Zero-jedynkowe liczby kwadratowe . . . . .	9
1.4 Liczby kwadratowe i dwie cyfry . . . . .	12
1.5 Liczby kwadratowe i trzy cyfry . . . . .	13
1.6 Kwadraty z wszystkimi cyframi . . . . .	13
1.7 Parzystość cyfr . . . . .	14
1.8 Palindromiczne liczby kwadratowe . . . . .	14
1.9 Lustrzane odbicia liczb kwadratowych . . . . .	15
1.10 Liczby kwadratowe specjalnego typu . . . . .	16
1.11 Suma cyfr i liczby kwadratowe . . . . .	20
1.12 Początkowe cyfry . . . . .	22
1.13 Ostatnie cyfry i liczby automorficzne . . . . .	23
1.14 Liczby automorficzne w różnych systemach numeracji . . . . .	27
<b>2 Fakty i różne informacje dotyczące liczb kwadratowych</b>	<b>31</b>
2.1 Przykłady . . . . .	31
2.2 Warunki dostateczne i liczby kwadratowe . . . . .	32
2.3 Istnienie lub nieistnienie pewnych liczb kwadratowych . . . . .	33
2.4 Sumy, iloczyny i liczby kwadratowe . . . . .	34
2.5 Liczby kwadratowe i postępy arytmetyczne . . . . .	35
2.6 Liczby kwadratowe postaci $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ . . . . .	38
2.7 Pary liczb szczególnej postaci i liczby kwadratowe . . . . .	39
2.8 Trójki liczb kwadratowych postaci $ab+c, bc+a, ca+b$ . . . . .	39
2.9 Inne trójki liczb kwadratowych . . . . .	40
2.10 Liczby bezkwadratowe . . . . .	41
2.11 Odwrotności liczb kwadratowych . . . . .	43
2.12 Kwadraty liczb wymiernych . . . . .	45
2.13 Różne zadania z liczbami kwadratowymi . . . . .	46
2.14 Informacje o symbolach Legendre'a . . . . .	46

<b>3</b>	<b>Sumy dwóch kwadratów</b>	<b>49</b>
3.1	Warunki rozkładalności na sumę dwóch kwadratów . . . . .	49
3.2	Własności sum dwóch kwadratów . . . . .	49
3.3	Liczba rozkładów na sumy dwóch kwadratów . . . . .	50
3.4	Najmniejsze liczby o danej liczbie rozkładów . . . . .	51
3.5	Rozkłady dla kolejnych liczb naturalnych . . . . .	52
3.6	Sumy dwóch kwadratów i podzielność . . . . .	54
3.7	Sumy dwóch kwadratów i liczby pierwsze . . . . .	55
3.8	Przykłady rozkładów z liczbami pierwszymi . . . . .	56
3.9	Równanie $x^2 + y^2 = z^n$ . . . . .	58
3.10	Liczby postaci $(a^2 + b^2)/(ab \pm 1)$ i ich uogólnienia . . . . .	59
3.11	Liczby, które nie są sumami dwóch kwadratów . . . . .	60
3.12	Liczby postaci $a^2 + 1$ . . . . .	61
3.13	Trójki liczb kwadratowych postaci $a^2 + b^2$ , $b^2 + c^2$ , $c^2 + a^2$ . . . . .	62
3.14	Sumy dwóch kwadratów liczb wymiernych . . . . .	64
3.15	Dodatkowe informacje o sumach dwóch kwadratów . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Sumy trzech kwadratów</b>	<b>66</b>
4.1	Przykłady z sumami trzech kwadratów . . . . .	66
4.2	Twierdzenia o sumach trzech kwadratów . . . . .	67
4.3	Liczba rozkładów danej liczby na sumę trzech kwadratów . . . . .	70
4.4	Przykłady różnych rozkładów danej liczby na sumę trzech kwadratów . . . . .	71
4.5	Sfera bez jednego punktu . . . . .	71
4.6	Sumy kwadratów trzech liczb wymiernych . . . . .	73
4.7	Równanie $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ . . . . .	73
4.8	Równanie $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ i struktura ciała . . . . .	76
4.9	Dodatkowe informacje o sumach trzech kwadratów . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Sumy czterech i więcej kwadratów</b>	<b>78</b>
5.1	Rozkłady na sumę czterech kwadratów . . . . .	78
5.2	Twierdzenie Lagrange'a o sumach czterech kwadratów . . . . .	79
5.3	Liczba rozkładów na sumę czterech kwadratów . . . . .	81
5.4	Sumy kwadratów kolejnych liczb naturalnych . . . . .	82
5.5	Sumy $n$ kwadratów . . . . .	84
5.6	Sumy kwadratów i liczby pierwsze . . . . .	86
5.7	Suma kwadratów i iloczyn . . . . .	87
5.8	Sumy parami różnych kwadratów . . . . .	89
5.9	Algebraiczne sumy kwadratów . . . . .	91
5.10	Dodatkowe informacje o sumach kwadratów . . . . .	92
<b>6</b>	<b>D(m)-zbiory</b>	<b>93</b>
6.1	Ogólne fakty o D(m)-zbiorach . . . . .	93
6.2	D(-1)-zbiory . . . . .	95
6.3	D(1)-zbiory . . . . .	95
6.4	Wymierne D(1)-zbiory . . . . .	101
6.5	Przykłady D(m)-zbiorów . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Trójki Pitagorasa</b>	<b>104</b>
7.1	Opis wszystkich trójek Pitagorasa . . . . .	105
7.2	Przykłady i własności trójek Pitagorasa . . . . .	105
7.3	Trójki Pitagorasa i liczby kwadratowe . . . . .	107
7.4	Przyprostokątne trójkątów Pitagorasa . . . . .	107
7.5	Przeciwprostokątne trójkątów Pitagorasa . . . . .	108
7.6	Obwód trójkątów Pitagorasa . . . . .	110
7.7	Pole trójkątów Pitagorasa . . . . .	111

7.8	Promień okręgu wpisanego trójkątów Pitagorasa . . . . .	112
7.9	Algebraiczne struktury zbioru trójek Pitagorasa . . . . .	113
7.10	Macierze zachowujące trójki Pitagorasa . . . . .	117
7.11	Trójkąty o całkowitych bokach z kątem 120 stopni . . . . .	118
7.12	Trójkąty o całkowitych bokach z kątem 60 stopni . . . . .	119
7.13	Dodatkowa literatura dotycząca trójkątów Pitagorasa . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Równanie <math>ax^2 + by^2 = cz^2</math></b> . . . . .	<b>121</b>
8.1	Informacje wstępne . . . . .	121
8.2	Warunki konieczne . . . . .	121
8.3	Pomocnicze fakty i lematy . . . . .	122
8.4	Twierdzenie Legendre'a . . . . .	124
8.5	Równanie $x^2 + ny^2 = z^2$ . . . . .	126
8.6	Równanie $x^2 + y^2 = nz^2$ . . . . .	129
8.7	Rozwiązania pewnych równań postaci $ax^2 + by^2 = cz^2$ . . . . .	132
<b>9</b>	<b>Równania diofantyczne drugiego stopnia</b> . . . . .	<b>134</b>
9.1	Równanie $axy = bx + cy + d$ . . . . .	134
9.2	Równanie $ax^2 + bx + c = dy$ . . . . .	135
9.3	Równanie $ax^2 + bx + c = dy^2$ . . . . .	136
9.4	Równanie $ax^2 + bxy + cy^2 = dz^2$ . . . . .	136
9.5	Równanie $ax^2 + bxy + cy^2 = k$ . . . . .	136
9.6	Równania z formą $xy + yz + zx$ . . . . .	137
9.7	Równanie $x^2 + y^2 - z^2 = m$ . . . . .	138
9.8	Różne równania i rozwiązania naturalne . . . . .	138
9.9	Różne równania i rozwiązania całkowite . . . . .	139
9.10	Rozwiązania wymierne . . . . .	140
<b>10</b>	<b>Kwadraty w pewnych pierścieniach skończonych</b> . . . . .	<b>141</b>
10.1	Oznaczenia i wstępne fakty . . . . .	141
10.2	Kwadraty w $Z_{2^n}$ . . . . .	141
10.3	Kwadraty w $Z_p$ . . . . .	142
10.4	Kwadraty w $Z_{p^n}$ . . . . .	143
10.5	Kwadraty w $Z_n$ . . . . .	144
10.6	Sumy kwadratów w $Z_n$ . . . . .	145
10.7	Okrąg w pierścieniach skończonych . . . . .	146
10.8	Kwadraty w ciałach skończonych . . . . .	147
<b>11</b>	<b>Formy kwadratowe dwóch zmiennych</b> . . . . .	<b>148</b>
11.1	Równoważność form kwadratowych . . . . .	148
11.2	Obraz i pierwotny obraz formy kwadratowej . . . . .	149
11.3	Multyplikatywność obrazów pewnych form kwadratowych . . . . .	151
11.4	Wyróżnik formy kwadratowej . . . . .	154
11.5	Zredukowane formy kwadratowe o ujemnym wyróżniku . . . . .	156
11.6	Liczba zredukowanych form o tym samym ujemnym wyróżniku . . . . .	157
11.7	Formy postaci $x^2 + dy^2$ . . . . .	160
11.8	$\Delta = -3$ . Forma $x^2 + xy + y^2$ . . . . .	161
11.9	$\Delta = -7$ . Forma $x^2 + xy + 2y^2$ . . . . .	162
11.10	$\Delta = -8$ . Forma $x^2 + 2y^2$ . . . . .	163
11.11	$\Delta = -11$ . Forma $x^2 + xy + 3y^2$ . . . . .	164
11.12	$\Delta = -12$ . Forma $x^2 + 3y^2$ . . . . .	164
11.13	Formy o wyróżniku mniejszym od -18 . . . . .	165
11.14	Formy kwadratowe z kwadratowym wyróżnikiem . . . . .	166
11.15	Zredukowane formy kwadratowe z dodatnim wyróżnikiem . . . . .	166
11.16	Dodatkowe informacje o formach kwadratowych . . . . .	167

<b>Spis cytowanej literatury</b>	<b>168</b>
<b>Skorowidz nazwisk</b>	<b>175</b>
<b>Skorowidz</b>	<b>179</b>

---

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń  
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

---

## Skorowidz

- Abu Muriefah F.S., 95  
Adkins W., 47  
Ahuja M., 118  
Al-Rashed A., 95  
Alder H.L., 84  
Alfred B.U., 84  
Alperin R.C., 119  
Alter R., 121  
Andreescu T., 106, 168, 173  
Andrica D., 106, 168  
Arkin J., 97, 101, 168  
Ayoub A.B., 76
- Baker A., 97  
Baker R.C., 168  
Banarski A.J., 168  
Baranowa I.W., 168  
Barbeau E.J., 168  
Barnelt I.A., 92  
Beardon A.F., 92  
Beauregard R.A., 71, 76, 119, 168  
Bednarek W., 168  
Belov A., 169  
Bergum G.E., 101  
Bernik V.I., 168  
Berstein L., 110  
Bessy de B.F., 106  
Beyer W.A., 119  
Białek G., 152  
Bleick W.E., 86  
Boltianski W.G., 119, 168  
Bouniakowsky V., 78  
Bourdet, 106  
Bradley C.J., 86, 117  
Bradley Ch.J., 35  
Brahmegupta, 134  
Browkin J., 168  
Brown E., 47, 168  
Brown J.L., 91  
Brown K., 38, 60, 84, 143, 168  
Bryński M., 168  
Burn B., 119
- Cai T., 137  
Catalan E., 78  
Cel J., 88, 129  
Chen Xi.G., 137  
Chentzov N.N., 173  
Clarke F.W., 55  
Cohen H., 82, 169  
Conant D.R., 119  
Cossali, 74
- Cucurezeanu I., 106, 168  
Czakyryjan K., 169
- Davenport H., 97, 126, 168, 169  
Dawson B., 117  
Dawson T.R., 15, 19  
Deshpande M.N., 100, 101  
Dickson L.E., 38, 50, 63, 70, 79, 86, 94, 105, 106,  
112, 126, 135–137, 169  
Diofantos, 94, 101  
Dirichlet P.G.L., 68, 163  
Dixon J.D., 81  
Djukić D., 169  
Doduniekow S., 169  
Dressler R.E., 90, 91  
Dujella A., 94, 95, 97, 101, 169  
Duke W., 47  
Dynkin E.B., 169
- Egorov A.A., 83  
Erdős P., 43, 91  
Erdelyi T., 38  
Erickson M., 169  
Escott E.B., 119  
Euler, 47, 76, 93, 96, 101, 138, 142, 163, 164  
Everitt W.N., 55  
Ewell J.A., 55  
Exkert E.J., 117
- Fagas A., 70  
Fassler A., 119  
Fedorov R., 169  
Fenster D.D., 47  
Fermat, 55, 95, 96, 108, 111, 163, 164  
Filipin A., 95  
Fogarty K., 38  
Fomin D.V., 9, 169, 170  
Frame J.S., 47, 81  
Fraser O., 76  
Friedlander, 55  
Fuchs C., 95  
Fujita Y., 95, 97, 169  
Furstenberg H., 43
- Galpierin G.A., 170  
Gandhi J.M., 86  
Gardiner A., 170  
Gardner M., 101  
Gauss, 48, 55, 68  
Gelfand S.I., 170  
Gelfond A.O., 170  
Genkin S.A., 170

- Gerstein L.J., 117  
 Gerstenhaber M., 47  
 Gerwer M.L., 170  
 Gibbs P., 94, 101, 170  
 Gilder J., 119  
 Gindykin S.G., 143  
 Gioia A.A., 170  
 Gleason A.M., 167, 170  
 Gleichgewicht B., 40  
 Gnutek B., 48  
 Goodstein R.L., 30  
 Gordon B., 76  
 Gordon R.A., 110  
 Gowers W.T., 43  
 Greenwood R.E., 170  
 Greger K., 43  
 Grigorjan A.A., 172  
 Grinstead C.M., 170  
 Grytczuk A., 117  
 Gupta H., 50, 170  
 Guy R.K., 43, 63, 79, 88, 92, 94, 139, 170
- Hatch G., 119  
 Hawlicki J., 119  
 Herrmann E., 102  
 Hill J., 13  
 Hirschorn M.D., 50, 82, 164, 167  
 Hoggatt V.E., 97, 101, 168  
 Hopkins K., 47  
 Hunter A.H., 90  
 Hurwitz A., 75
- Ireland K., 170  
 Itenberg I.W., 170  
 Iwaniec H., 55
- Jackson T., 164  
 Jacobi, 50, 81  
 Jadrenko M.I., 174  
 Janković V., 169  
 Jegorow A.A., 174  
 Jeleński S., 170  
 Jiao R., 137  
 Johnson R.A., 119  
 Jones B.W., 101
- Kanagasabapathy P., 170  
 Kanel-Belov A.J., 169  
 Kartaszow I.W., 174  
 Kato K., 170  
 Kedlaya K.S., 95, 101, 103, 170  
 Kelly L.M., 170  
 Kihel O., 95  
 Kiryłow A.A., 170  
 Koninck De J.-M., 47, 170
- Konjagin S.W., 172  
 Kordiemski B., 171  
 Kovaldzhii A., 169  
 Kraitchik M., 171  
 Krein M.G., 88  
 Kubota K.K., 117  
 Kuczma Marcin, 171  
 Kulagin A.G., 120  
 Kumor P., 63  
 Kurlandczyk L., 52, 170  
 Kurokawa N., 170  
 Kurschak J., 171
- Lagrange, 81, 155  
 Landau E., 68, 79, 171  
 Lange L.H., 106  
 Lapin C.E., 168  
 Le M., 137  
 Leahey W., 147  
 Lebesgue, 74  
 Lee H., 171  
 Legendre A.-M., 46, 47, 124  
 Lehmer D.H., 86  
 Lehmer E., 47  
 LeLionnais F., 171  
 Leman W.G., 168  
 Lemmermeyer F., 171  
 Leventz, 164  
 Levy L.S., 106  
 Lewandowska S., 167  
 Lint J.H., 101  
 Littlejohn L.L., 55  
 London H., 108  
 Lord N., 101  
 Luca F., 14  
 Lucas E., 82, 111
- MacHale D., 106  
 Mąkowski A., 79 60, 71, 73, 82, 109, 128–135, 144,  
     153, 157–160  
 Mariani J., 117  
 Martin A., 75, 119  
 Marzantowicz W., 171  
 Mason J., 38  
 Matić I., 169  
 Matsunago, 66  
 Matyja E., 119  
 Maynard P., 119  
 McCullough D., 119  
 Melnikow O.W., 168  
 Mendel C.W., 92  
 Mercier A., 47, 170  
 Michałowski W.I., 174  
 Minding F., 167  
 Mołczanow S.A., 169

- Mohanty S.P., 171  
Mollin R.A., 48, 49, 70, 81, 126, 171  
Mordell L.J., 68, 70, 86, 126, 172
- Nagell T., 126, 139, 172  
Narkiewicz W., 68, 172  
Nathanson M.B., 68, 70, 81, 172  
Nedita N.I., 19  
Neuberg, 136  
Nowicki A., 52, 172
- Olson H., 63  
OSullivan C., 38
- Pall G., 86  
Panaitopol L., 42, 43, 77  
Pargeter A.R., 26  
Parker T., 90, 91  
Pawłowski H., 172  
Pelmer L., 117, 118  
Pethoe A., 97, 102  
Petrović N., 169  
Philip S., 84  
Ponnudurai T., 170  
Poonen B., 170  
Poorten van der A., 38  
Postnikov M.M., 172  
Prasolov V.V., 55, 88, 139, 172  
Primrose E.J.F., 144
- Radci I.M., 19  
Rademacher H., 172  
Ramasamy A.M.S., 171  
Read E., 119  
Reiner I., 59  
Rempała J., 168  
Ribenoim P., 172  
Rosen M., 170  
Rozental A.L., 169
- Sadowicz W.A., 172  
Saito S., 170  
Sandor J., 45, 112, 139, 173  
Sansone G., 173  
Santos D.A., 173  
Saryanarayan E.R., 119  
Saunderson, 96  
Savchev S., 173  
Schinzel A., 42, 45, 79, 139, 173  
Selkirk K., 119  
Senberow W., 88  
Senderov W., 86  
Sexauer N.E., 117  
Shanks D., 173  
Shklarsky D.O., 173
- Sierpiński W., 45, 63, 68, 76, 108, 112, 119, 139, 173  
Silverman J.H., 173  
Simons W.H., 92  
Singh K., 170  
Siwaszinskij I.H., 173  
Skałba M., 63  
Skopienkow A., 88  
Skowronek-Kaziów J., 117  
Śladek A., 86  
Small Ch., 3, 70, 79, 81, 143, 145, 147, 173  
Smart N.P., 167, 173  
Spearman B.K., 167  
Speyer, 78  
Spira R., 76  
Spivak A., 86  
Sprague R., 90, 91  
Sprague S.R., 90  
Spunar V.M., 63  
Stangl W.D., 173  
Steele J.M., 92, 173  
Stein W., 47, 173  
Straszewicz S., 168, 174  
Strauss E.G., 97, 101, 168  
Suranyi M., 91  
Suryanarayan E.R., 71, 76, 168  
Sutcliffe A., 49, 76  
Swan R.G., 47  
Szemerédi E., 43  
Szurek M., 174  
Szymiczek K., 92, 131, 139
- Tan L., 117  
Tanner L., 25  
Tattersall J.J., 48, 92, 112, 149, 174  
Tausky O., 92  
Tebay S., 75  
Thatcher A.R., 35  
Thoro D.E., 106  
Tichomirow W., 55  
Tikoo M., 118  
Tolpygo A.K., 169, 170  
Toeplitz O., 172  
Tomalczyk W., 172  
Tong J., 120  
Trigg Ch., 174  
Trost E., 174  
Turner S.M., 48
- Uhler H.S., 174  
Ulas M., 92
- Vaidya A.M., 50  
Vakil R., 170  
Vazzana A., 169

Vella A., 120  
Vella A.D., 120  
Vella D., 120  
Vella D.J., 120  
Vorster S.J.R., 55

Wasilev N.B., 174  
Wasilew I., 88  
Waterhouse W.C., 167  
Wawrzyniak A., 94  
Weintraub S.H., 47  
Wilenskij I.J., 168  
Williams K.S., 167  
Winogradow I., 174  
Witczak J., 12  
Woeginger G., 38  
Wójtowicz M., 117  
Wolf J., 120  
Woronin S.M., 120  
Wyszenskij W.A., 174

Yaglom I.M., 173  
Yashchenko I., 169

Zagier D., 55  
Zarzycki P., 171  
Zehfuss, 78  
Zieliński K., 12  
Zimmer H.G., 102  
Żuk I.K., 168



## Skorowidz

- automorfizm, 148–150, 155
- bezwzględna wartość, 54, 55, 88, 91, 106, 108, 127, 128, 149, 155
- bikwadrat liczby całkowitej, 14, 31, 32, 38, 44, 45, 55, 58, 59, 66, 105, 106, 111, 163
- ciąg
  - arytmetyczny, 13, 35–37, 43, 45, 61, 69, 94, 96, 100, 106, 143
  - Fibonacciego, 101, 138
  - geometryczny, 38, 61
  - kwadratowy, 91
  - liczb kwadratowych, 6–8, 13, 31, 46, 64, 84, 143
  - monotoniczny, 18, 19, 43, 46, 61, 64, 85
  - nieskończony, 33, 36, 43, 46, 61, 64, 84, 108
  - rekurencyjny, 35, 59, 64, 108
  - skończony, 43, 46
- ciało, 71, 76, 113, 114, 141, 142, 147
- cyfry
  - liczb kwadratowych, 5–10, 13–30, 37
  - ostatnie, 10, 23–25, 27–29
  - początkowe, 22
- część całkowita, 2, 34, 123
- czwórka liczb naturalnych, 35, 43, 60, 75
- discriminant, 154
- długość  $D(m)$ -zbioru, 3, 93
- dodatnia forma kwadratowa, 156
- element
  - kwadratowy, 141–143, 145
  - neutralny, 146
  - odwrotny, 72, 77, 115
  - przeciwny, 72, 77, 115, 146
- forma
  - $(a, b, c)$ , 148
  - kwadratowa, 148–167
- funkcja, 114
  - $\varphi$ , 2, 41
  - $\sigma$ , 81
  - $\sigma_k$ , 82
  - $\tau$ , 50
  - bijekcja, 49
  - multiplikatywna, 86, 141
  - w pełni multiplikatywna, 86
  - z  $\mathbb{N}$  do  $\mathbb{N}$ , 22
- funkcje wzajemnie odwrotne, 49, 72, 76, 114, 115
- gęstość zbioru, 43
- granica ciągu, 33, 43
- grupa, 36, 43, 146, 147
  - abelowa, 42
- hipoteza, 43, 97
- iloczyn, 34, 37, 41, 46, 50, 54, 60, 87, 88, 108, 166
- iloraz, 33, 42, 43, 59, 60, 64, 72, 76, 84, 88, 101, 106, 114, 115, 144, 159, 166
- IMO, 1, 59
  - Longlist, 86
  - Shortlist, 13, 31, 37, 90
- indukcja matematyczna, 22, 24, 80
- izomorfizm, 71, 72, 76, 114, 115, 148, 155
- kolejne liczby naturalne, 43, 44
- kongruencja, 20, 24, 25, 27, 30, 36, 47, 48, 50, 54, 55, 61, 69, 73, 79, 88, 94, 106, 122, 124, 125, 129, 142, 145, 147, 149, 154, 155, 161, 164, 166
- krzywa eliptyczna, 36, 37
- kwadrat magiczny, 66
- law of reciprocity, 47
- liczba
  - $\pi$ , 43
  - $n'$ , 15
  - $n^2 + 1$ , 9, 61, 62, 138
  - automorficzna, 24–27
  - bezkwadratowa, 41–43, 81, 119, 122, 124, 125, 129, 145
  - biskupińska, 40
  - dobra, 20
  - Fermata, 163
  - Fibonacciego, 101, 137, 138
  - homonimiczna, 17
  - jedynekowa  $e_n$ , 9, 10, 13, 16
  - Mersenne'a, 10
  - monotoniczna, 18, 19
  - niekwadratowa, 126
  - nieparzysta, 14, 24, 40, 46, 47, 49, 50, 67, 69, 74, 77–79, 81–83, 105, 107, 108, 112, 127, 138, 139, 142, 144, 160, 164
  - niewymierna, 166, 167
  - p-adyczna, 68
  - palindromiczna, 14, 15
  - parzysta, 11, 14, 24, 40, 58, 59, 64, 67, 74, 79, 82, 105, 110, 127, 139, 142–144
  - pierwsza, 15, 28, 31, 32, 37, 46, 55, 56, 69, 86, 110, 141–143, 145–147, 159–161, 163–167
  - q-automorficzna, 27–30
  - specjalna, 18
  - symetryczna, 14

- trójkątna, 16, 49  
 wymierna, 37, 45, 63, 64, 73, 76, 81, 86, 88,  
 101, 102, 106, 112–114, 134, 140  
 złożona, 62, 138, 145  
 zero-jedynkowa, 9, 10, 20, 21  
 liczby względnie pierwsze, 37, 41, 46, 49, 50, 55,  
 58–60, 63, 64, 75, 79, 86, 105, 107, 110,  
 122, 124, 125, 127, 136, 141, 146, 150,  
 161–166  
 lustrzane odbicie, 15  
 macierz, 71, 79–81, 117  
 Maple, 1, 6–8, 11, 12, 14–17, 20, 21, 24, 51, 53, 54,  
 56–58,  
 nierówność, 7, 10, 22, 32, 44, 54, 80, 90, 106, 157  
 nierozstrądzona kwadratowa, 46, 159  
 nwd, 1, 30, 38, 42, 54, 76, 113, 121, 150, 166  
 nww, 1, 42, 43  
 obraz formy kwadratowej, 149  
 obwód trójkąta pitagorejskiego, 110  
 odwzorowanie wielomianowe, 148  
 okrąg w pierścieniach skończonych, 146  
 Olimpiada Matematyczna  
   Australia, 32  
   Austria, 64, 84  
   Białoruś, 19  
   Bośnia-Hercegowina, 37  
   Brazylia, 139  
   Bułgaria, 140  
   Czechy-Słowacja, 20, 33  
   Holandia, 34  
   Hong-Kong, 33  
   Iran, 31, 32, 61, 79  
   Jugosławia, 163  
   Kanada, 106  
   Korea, 69, 79, 112, 163  
   Leningrad, 9, 33  
   Litwa, 34, 43  
   Łotwa, 32  
   Mołdawia, 35, 54  
   Mongolia, 62  
   Moskwa, 53, 69  
   Niemcy, 46  
   Nowa Zelandia, 135  
   Polska, 14, 20, 33, 50, 139, 152  
   Rosja, 35, 37  
   Rumunia, 66, 91, 163  
   Słowacja, 37  
   Słowenia, 20, 46, 50  
   Singapur, 31  
   St Petersburg, 32, 40, 54, 61, 62, 136  
   Szwecja, 16, 45, 139, 167  
   Tajwan, 20  
   Turcja, 162  
   Ukraina, 54, 137  
   W. Brytania, 24, 31, 32, 45  
   Włochy, 39, 50, 138  
   ZSRR, 7, 14, 21, 36, 45  
 otwarty problem, 63  
 p-czwórka, 76  
 p-trójkąta, 113  
 para liczb naturalnych, 32, 33, 39, 41, 50, 53, 54,  
 59, 61, 68, 74, 137, 151, 152, 157  
 permutacje cyfr, 18  
 pierścień  
    $\mathbb{Z}[i]$ , 80, 81  
   bez jedynki, 42  
   liczb całkowitych modulo  $m$ , 3, 81, 141–147  
   przemienny, 42  
   skończony, 3, 141  
 pierwotna trójka Pitagorasa, 104  
 pierwotny obraz formy kwadratowej, 149  
 podgrupa, 42  
 podstawa numeracji, 29  
 podzbiór, 34, 43, 84, 93, 101, 149  
 podzielność, 33, 36, 37, 39, 41, 46, 54, 62, 63, 85,  
 86, 136, 137  
   przez 3, 10, 54, 74, 86, 87, 106, 121  
   przez 4, 41, 46, 49, 50, 67–69, 74, 81, 84, 88,  
   94, 145–147, 154  
   przez 5, 46, 63, 107  
   przez 6, 29, 111, 162  
   przez 7, 54, 106  
   przez 8, 67, 69, 73, 79, 106, 166  
   przez 9, 10, 20  
   przez 10, 12, 13, 24, 26, 162  
   przez 11, 63  
   przez 24, 36  
   przez 29, 89  
   przez liczbę pierwszą, 46, 48, 50, 142, 144  
 pole trójkąta pitagorejskiego, 110–112  
 potęga  
   czwórki, 31  
   dwójki, 10, 31, 50, 53, 54, 69, 75, 78, 89, 106,  
   107, 112, 141, 142, 146, 163  
   liczby pierwszej, 28–30, 37, 143  
   piątki, 144  
   trójki, 11, 31, 53, 144  
 prawo wzajemności reszt kwadratowych, 47  
 problem, 9  
 produkt grup, 146  
 promień okręgu wpisanego, 112  
 punkt, 71, 76  
   przecięcia, 72, 114  
   wymierny, 37, 76, 113, 130  
 pytanie, 9, 11–13, 18, 21, 32, 35, 37, 38, 40–42, 46,  
 53, 54, 63, 64, 70, 74, 82, 83, 86, 153, 160

- reszta  
kwadratowa, 46, 47, 159, 161  
z dzielenia, 20, 25, 48, 67, 86, 141, 149, 155
- równanie diofantyczne, 3, 4, 134  
 $n$  zmiennych, 43, 45, 86, 87  
czterech zmiennych, 43, 73, 74, 76, 138, 139  
dwóch zmiennych, 32, 37, 38, 49, 61, 83, 87,  
108, 134–140, 145, 147, 161, 163  
Markowa, 88  
Pella, 4, 37, 88, 95, 108  
pięciu zmiennych, 55  
Pitagorasa, 105, 124, 126  
trzech zmiennych, 44, 45, 50, 55, 58, 59, 62,  
74, 75, 87, 88, 106, 111, 121, 122, 124,  
125, 127, 129, 132, 133, 136–140, 167
- równoważność,  
form kwadratowych, 148–150, 154–157, 167  
w sposób niewłaściwy, 149  
w sposób właściwy, 149
- rozwiązanie  
całkowite, 38, 49, 50, 75, 83, 86, 88, 121, 122,  
124–126, 129, 132–137, 139, 163  
kongruencji, 36, 47, 122–125, 129, 161  
naturalne, 32, 34, 37, 38, 43–45, 59, 61, 62, 74,  
75, 87, 95, 108, 111, 127, 128, 133–138,  
145, 161  
niezerowe, 121, 123, 124  
pierwotne, 108, 121, 125–131  
w pierścieniu, 141, 143, 147  
w zbiorze liczb pierwszych, 55  
wymierne, 45, 88, 140  
zerowe, 88, 121, 136, 139
- semiperimeter, 110  
sfera bez jednego punktu, 71, 76  
silnia, 41, 55, 61  
squarefree, 41  
średnia arytmetyczna, 46
- suma  
algebraiczna, 91  
cyfr, 10, 20–22  
czterech kwadratów, 78  
dwóch kwadratów, 49  
kwadratów w  $\mathbb{Z}_n$ , 145  
trzech kwadratów, 66
- symbol Legendre’a, 46–48, 126, 142, 143, 161
- system numeracji  
czwórkowy, 11  
dowolny, 6, 7, 9–13, 16, 22, 23, 27  
dwójkowy, 10, 28, 89  
dwunastkowy, 30  
dziewiątkowy, 12  
piątkowy, 11  
siódemkowy, 11  
szóstkowy, 11, 27–29  
trójkowy, 11, 21
- sześcian liczby całkowitej, 6, 14, 31, 55, 58, 70, 111
- trójkąt  
o wymiernych bokach, 37  
pitagorejski, 45, 84, 104  
prostokątny, 37  
z kątem  $120^\circ$ , 118  
z kątem  $60^\circ$ , 119
- trójka  
liczb naturalnych, 31, 39, 40, 53, 68, 84, 87,  
88, 104, 118, 119, 133, 136, 137  
Pitagorasa, 45, 62, 84, 104–117  
quasi-pitagorejska, 118
- twierdzenie  
chińskie o resztach, 61, 123, 141, 145, 146  
Dirichleta, 61, 69  
Fermata, 55, 108, 111, 160, 163, 164  
Friedlandera i Iwańca, 55  
Gaussa, 68  
Jacobiego, 81  
Lagrange’a, 3, 81, 146, 155, 161–166  
Lebesque’a, 74  
Legendre’a, 124, 125, 129  
Szemeriediego, 43  
wielkie Fermata, 111  
Wileasa, 111
- warunki równoważne, 7, 20, 33, 36, 37, 41, 46, 47,  
49, 54, 55, 58, 64, 68, 69, 73, 75, 77, 78,  
84, 86, 101, 103, 105, 108, 110, 118, 119,  
136, 138, 139, 141–143, 145, 150, 154,  
157, 161–167
- wielomian, 139, 148, 152  
wymierna liczba Pitagorasa, 106  
wyróżnik formy kwadratowej, 154  
wyznacznik, 80, 153  
automorfizmu, 148–150
- wzory Viete’a, 130
- zasada szufladkowa Dirichleta, 123
- zbiór  
 $\mathbb{N}_0$ , 1  
 $D(m)$ , 3, 93  
dzielników, 43  
Fermata, 97  
gęsty, 106  
liczb całkowitych, 1, 48, 148–151, 155, 160  
liczb naturalnych, 1, 13, 14, 22, 37, 38, 42, 43,  
54, 69, 79, 83, 87, 88, 90, 93  
liczb pierwszych, 1, 41, 55, 69, 79, 86, 135,  
142, 146  
liczb rzeczywistych, 1, 48, 71, 72

liczb wymiernych, 1, 45, 71, 72, 76, 77, 101,  
114, 115  
liczb zespolonych, 1, 48, 71, 72, 77, 79  
mnożony, 151–154  
nieskończony, 13, 14, 17, 30, 31, 33, 34, 37, 39,  
41, 42, 44–46, 50, 52–55, 58–62, 64, 68,  
69, 74, 75, 79, 83, 84, 87, 91, 93, 96, 101,  
102, 105–109, 112, 127, 135–139, 142, 145  
skończony, 74, 88, 90, 95, 97, 134, 157, 162,  
167  
zbiory rozłączne, 84, 86  
zredukowana forma kwadratowa, 156