

Podróże po Imperium Liczb

08 Liczby Mersenne'a, Fermata i inne liczby

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Aktualizacja: 20 maja 2012

Wstęp	1
1 Liczby Mersenne'a	5
1.1 Początkowe informacje o liczbach Mersenne'a	7
1.2 Cyfry liczb Mersenne'a	8
1.3 Twierdzenie o największym wspólnym dzielniku liczb Mersenne'a	9
1.4 Liczby Mersenne'a i liczby pierwsze	11
1.5 Dzielniki pierwsze liczb Mersenne'a	13
1.6 Podzielniki postaci $n + k$	15
1.7 Liczby M_{kn}/M_k	15
1.8 Różne fakty i zadania o podzielności i liczbach Mersenne'a	17
2 Liczby postaci $a^n - b^n$	19
2.1 Ogólne własności liczb $a^n - b^n$	19
2.2 Liczby postaci $a^n - 1$	21
2.3 Liczby $3^n - 1$	24
2.4 Liczby $5^n - 1$	26
2.5 Liczby $6^n - 1$	27
2.6 Liczby $7^n - 1$	28
2.7 Liczby $11^n - 1$	29
2.8 Inne liczby postaci $a^n - 1$	31
2.9 Liczby postaci $(a+1)^n - a^n$	31
2.10 Liczby $a^n - a^m$	33
2.11 Liczby pseudopierwsze i liczby Carmichaela	35
3 Liczby 11...1 (repunits)	37
3.1 Liczby pierwsze postaci e_n	37
3.2 Rozkłady na czynniki	38
3.3 Równości z liczbami e_n	39
3.4 Liczby e_n i relacja podzielności	40
3.5 Liczby e_n i wielomiany	42
3.6 Różne fakty i zadania z liczbami e_n	43
3.7 Liczby jedynkowe w innych systemach numeracji	43

4	Rozwinięcia liczb wymiernych	47
4.1	Rozwinięcia liczb rzeczywistych przy danej podstawie	47
4.2	O q -dzielnikach i q -kodzielnikach	52
4.3	Rozwinięcia skończone	55
4.4	Rozwinięcia okresowe	57
4.5	Przykłady rozwinięć dziesiętnych ułamków prostych	62
4.6	Przykłady q -rozwinięć ułamków prostych	64
5	Okresy rozwinięć liczb wymiernych	67
5.1	Specjalne liczby pierwsze	67
5.2	Długość okresu zasadniczego	71
5.3	Długość okresu zasadniczego sumy dwóch liczb wymiernych	73
5.4	Okresy zasadnicze i podzielność przez 9	74
5.5	Okresy o parzystych długościach	76
5.6	Okresy zasadnicze o długościach podzielnych przez 3	83
5.7	Cykliczność okresów	88
6	Liczby postaci $a^n + b^n$	95
6.1	Podzielność liczb $a^n + b^n$ przez $(a + b)^s$	95
6.2	Podzielniki liczb $a^n + b^n$	97
6.3	Liczby $a^n + b^n$ i nwd	98
6.4	Liczby postaci $a^n + 1$	100
6.5	Liczby $2^n + 1$	102
6.6	Liczby $3^n + 1$	105
6.7	Liczby $5^n + 1$	106
6.8	Liczby $2^n + 3^n$	106
6.9	Liczby $2^n + 5^n$ i $2^n + 7^n$	108
6.10	Liczby $3^n + u^n$	110
6.11	Liczby $4^n + u^n$	112
6.12	Liczby $5^n + u^n$	113
7	Liczby Fermata i ich uogólnienia	115
7.1	Liczby Fermata	115
7.2	Liczby postaci $n2^n \pm 1$	119
7.3	Liczby postaci $k2^n \pm 1$	120
7.4	Liczby postaci $2^n - a$	121
7.5	Różne fakty i zadania	122
8	Liczby trójkątne	123
8.1	Własności liczb trójkątnych	124
8.2	Cyfry liczb trójkątnych	124
8.3	Sumy liczb trójkątnych	126
8.4	Liczby trójkątne i ciągi arytmetyczne	127
8.5	Równanie $mt_x = t_y$	128
8.6	Liczby trójkątne i liczby pierwsze	129
8.7	Iloczyny i ilorazy liczb trójkątnych	130
8.8	Liczby trójkątne i liczby kwadratowe	131
8.9	Liczby trójkątne i trójki pitagorejskie	133
8.10	Liczby trójkątne i liczby potęgowe	133
8.11	Odwrotności liczb trójkątnych	134
8.12	Liczby trójkątne modulo m	134
8.13	Pseudo-Smarandache'a funkcja z	135

8.14	Różne fakty i zadania z liczbami trójkątnymi	136
9	Liczby tetraedralne, pięciokątne, . . .	139
9.1	Liczby tetraedralne	139
9.2	Liczby pięciokątne	142
9.3	Liczby sześciokątne	143
9.4	Liczby wielokątne	144
10	Sumy k-tych potęg kolejnych liczb naturalnych	145
10.1	Sumy kolejnych liczb naturalnych	145
10.2	Liczby i wielomiany Bernoulliego	148
10.3	Liczby postaci $s_k(n)$ i równości	152
10.4	Liczby postaci $s_k(n)$ i symbole Newtona	154
10.5	Liczby postaci $s_k(n)$ i podzielność	155
10.6	Różne fakty i zadania o sumach kolejnych k-tych potęg	156
	Spis cytowanej literatury	158
	Skorowidz nazwisk	164
	Skorowidz	168

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

Skorowidz

- Abramowicz W.S., 151, 157
Alexanderson G.L., 42
Alford W.R., 36
Allison D., 157
Anderson I., 154
Andreescu T., 42, 158
Andrews G.E., 144
Andrica D., 158
Apostol T.M., 147, 154
Armengaud J., 11
Artin E., 69
Aucoln A.A., 157
Aude H.T.R., 70
- Balfour A., 94
Baxter L., 37
Beardon A.F., 157
Bednarek W., 43, 101
Beiler A., 37
Beldon T., 132
Bell E.T., 127
Belov A., 159
Bendukidze A.D., 144
Bernik V.I., 158
Beschoner K., 39
Boltianski W.G., 158
Boncler T., 97
Boone S., 11
Braza P.A., 132
Breiteig T., 137
Brent R., 39
Brillhart J., 37, 46
Browkin J., 137, 158
Bryński M., 158
Burrows B.L., 157
- Caldwell Ch.K., 158
Cameron M., 11
Carlitz L., 150, 151, 157
Carmichael R.D., 35, 36, 119
Cataldi P., 11
Cgristiano J.G., 157
Charzyński Z.K., 157
Chentzov N.N., 163
Childers G., 39
Chorlton F., 157
Clarkson R., 11
Cohen H., 151, 158
Colquitt, 11
- Cooper C., 11
Crocker R., 36
Cross T., 132
Cucurezeanu I., 158
Czakyrjan K., 159
- Davenport H., 158
Dawson T.R., 125
Delany J., 156
Desbrow D., 153
Dickson L.E., 82, 94, 98, 141, 156, 158
Djukić D., 159
Doduniekow S., 159
Donald J.P., 136, 137
Drobot V., 157
Dubner H., 37, 46, 102
Dynkin E.B., 159
Dynkin J., 159
- Elvenich H-M., 11
Erdős P., 36, 121, 149, 151
Euler, 11, 14, 117, 132, 133, 149
Ewell J.A., 128
- Fedorov R., 159
Feigelstock S., 13
Feldman A.M., 163
Feng Z., 158
Fermat, 14, 133
Finch C.E., 119
Findley J., 11
Fomin D.V., 159
Frankel A.S., 132
- Gage P., 11
Galpieri G.A., 159
Gardiner T., 132
Garmer C., 147
Gauss, 116, 126
Gelca R., 42, 158
Gelfand S.I., 159
Genkin S.A., 159
Gerwer M.L., 159
Gessel I., 157
Giblin B., 159
Gillies D.B., 11
Ginsberg B.D., 83, 85, 86, 159
Goldbach, 116
Gould H.W., 151, 157
Graham R.L., 159

- Granlund G., 39
Granlund T., 102
Granville A., 36
Green R.E., 61
Gribanow W.U., 159
Griffin H., 159
Grigorjan A.A., 162
Gurewicz W.J., 163
Guy R.K., 36, 119, 121, 144, 157, 159
- Hajratwala N., 11
Hardy G.H., 51, 57, 61, 70, 94, 159
Hatch G., 133
Hayashi E.K., 39
Hirose S., 144
Hoggatt Jr. H.E., 133
Homann J., 51
Hsia C., 61
Hurwitz A., 11
- Ireland K., 159
Ishida N., 24
Ishikawa T., 24
Itenberg I.W., 159
- Jacobi, 152
Jajte R., 159
Janković V., 159
Jeans J.H., 14
Jegorow A.A., 163
Jeleński S., 159, 160
Jensen K.L., 150
Jones L., 119
Józefiak T., 125
- Kamada M., 39
Kanel-Belov A.J., 159
Kaplansky I., 13
Karczewska K., 18
Kato K., 160
Kedlaya K.S., 160
Keedwell D., 132
Keller W., 118, 160
Kiryłow A.A., 159
Klosinski L.F., 42
Knuth D.E., 159
Koide Y., 39
Koninck De J.-M., 160
Konjagin S.W., 162
Kostykin A.I., 160
Kovaldzhii A., 159
Krysicki W., 159
Kulikov L.J., 160
- Kummer E., 150
Kurlandczyk L., 157
Kurokawa N., 160
- Landry F., 117
Larson L.C., 42
Leavitt W.G., 82
Lehmer D.H., 12, 46
Leman W.G., 158
Lemmermeyer F., 160
Levy L.S., 157
Lewittes J., 82, 88, 94
Ligh S., 8
Linkowski J., 157
Lisicki A., 157
Livingston A.E., 35
Livingston M.L., 35
Lord N., 130
Luca F., 119
Lucas E., 11, 12, 145, 152
- Marzantowicz W., 160
Mason T.E., 147
Mastalerz A., 51
Matić I., 159
Maxfield J., 156
Maxfield M., 156
McGiffert J., 70
Melnikow O.W., 158
Mercier A., 160
Mersenne M., 5
Michajłow I., 127, 147
Midy E., 77, 82
Mikusiński J., 157
Mitrinović D.S., 160
Mnich W., 125, 141
Mołczanow S.A., 159
Mollin R.A., 160, 161
Mordell L.J., 161
Morozowa E.A., 161
Moser L., 134
Motosé K., 161
Munch O.J., 149
- Nagell T., 122
Narkiewicz W., 8, 36, 161
Nathanson M.B., 144, 161
Neal L., 8
Nelson, 11
Nickel L., 11
Noll L.C., 11
Nowak M., 11

- Nowicki A., 161
 Ore O., 119
 Patashnik O., 159
 Paul J.L., 154, 157
 Penney D.E., 157
 Pepin, 118
 Pervushin I.M., 11
 Petrović N., 159
 Pietrakow I.S., 161
 Pizá P.A., 140
 Podkolzin A.S., 162
 Poinsot L., 155
 Pollard J.M., 119
 Pomerance C., 36, 119, 157, 161
 Poonen B., 160
 Popescu C., 156
 Powers R.E., 11

 Rabczuk R., 157
 Rączka J., 137
 Rademacher H., 61, 82, 94, 162
 Rado R., 149
 Rakowiecki T., 157
 Rams T., 157
 Rao K.S., 70
 Realis, 126
 Redei L., 34
 Reich A., 39
 Rempała J., 158
 Ribenboim P., 151, 162
 Riesel H., 11, 121
 Robinson R.M., 11
 Roeder D.W., 147
 Rokowska B., 122
 Rosen M., 159
 Rotkiewicz A., 36, 96, 97
 Rozental A.L., 159
 Rządkowski G., 151

 Sadowicz W.A., 162
 Saito S., 160
 Sandor J., 162
 Santos D.A., 162
 Saouter Y., 162
 Sarrus, 35
 Sastry K.R.S., 126, 127, 142
 Satyanarayana U.V., 127
 Scheffold E., 144
 Schiller J.K., 93, 94
 Schultz H.J., 157
 Seah E., 46
 Seah E., 37
 Seeber R.R., 18, 119
 Segal K.R.S., 144
 Segal S.L., 141
 Selfridge J., 46
 Selfridge J.L., 120
 Semionowa L., 72
 Shafer M., 11
 Shanks D., 70, 162
 Sharpe D., 162
 Shklarsky D.O., 163
 Sierpiński W., 36, 51, 57, 61, 118–120, 127, 133, 162
 Silva J.B., 151
 Silverman J.H., 36, 132, 163
 Singh D., 70
 Singmaster D., 141
 Šlinko A., 163
 Slowinski D., 11
 Smith E., 11
 Snyder W.M., 39
 So S.S., 136, 137
 Spence G., 11
 Staudt von C., 153, 156
 Steinhaus H., 163
 Stojanowski J., 157
 Straszewicz S., 158, 163
 Suprun W.P., 163
 Sylvester, 145
 Sylvester J.J., 147
 Szneperman L.B., 163
 Szustef F.M., 163
 Szymiczek K., 36

 Talbot R.F., 157
 Tao T., 163
 Tattersall J.J., 144, 163
 Tinsley A.R., 136, 137
 Titow P.I., 159
 Tołpygo A.K., 159
 Toeplitz O., 61, 82, 94, 162
 Tong J., 132
 Trigg Ch., 163
 Trost E., 163
 Tsumura H., 151
 Tuckerman B., 11, 46

 Ulas M., 125, 133, 156, 157, 163
 Uspienski W., 159

 Vakil R., 160
 Vandergrift J., 156

Wagstaff Jr. S.S., 46
Wagstaff S., 39
Wagstaff S.S., 149, 151
Wasilev N.B., 163
Watkins J.J., 147
Welsh L., 11
Westfall R.S., 8
Więckowski A., 129, 137
Wieferich A., 17
Williams H.C., 37, 46
Williams K.S., 117
Winogradow I., 163
Witmer E.E., 157
Worpitzky J., 149
Wright E.M., 51, 57, 61, 70, 94, 159

Yaglom I.M., 36, 163
Yan S.Y., 163
Yashchenko I., 159
Yates S., 37, 43
Yukimoto Y., 24

Zarankiewicz K., 133, 163
Zarzycki P., 160
Zimmermann P., 39
Żuk I.K., 158

Skorowidz

- algorytm Euklidesa, 9, 19, 99
- bazowy system kongruencji, 120
- bikwadrat liczby naturalnej, 21, 34, 133, 140, 141, 152
- całka, 151
- ciąg, 104, 121, 124, 129, 132, 133, 140–142, 147, 153
 - arytmetyczny, 127, 128
 - geometryczny, 31, 137
 - nieskończony, 47, 51, 58
 - okresowy, 9, 121, 125, 132, 135
 - rekurencyjny, 7, 12, 35, 51, 104, 128, 131
- cyfry, 10, 11, 14, 24–26, 28–30, 37, 43, 50, 59, 79, 92, 93, 117, 118, 124, 125, 148
 - liczb Mersenne’a, 8
 - liczb trójkątnych, 124
 - ostatnie, 8, 9, 30, 115, 117, 125, 132, 140, 156
 - początkowe, 125, 140
- cyrkiel, 116, 117
- część całkowita, 2, 47–51, 124
- część ułamkowa, 51, 149
- długość okresu, 57–59, 63, 64, 67, 69–71, 73, 74, 76–80, 82–84, 86, 88–90, 92
- dwumian Newtona, 96
- dzielnik dziesiętny, 52, 61, 75, 77, 81
- dzielniki pierwsze, 13, 14, 22, 24, 29, 30, 36, 98, 100, 104, 117, 120, 122, 129, 141, 146
- element trójkątny, 134, 135
- funkcja, 49, 153
 - φ , 2, 7, 18, 33, 34, 52, 53, 61, 67, 70, 89, 90, 92, 97, 98, 104, 118
 - e^x , 148
 - bijekcja, 49
 - multiplikatywna, 135
 - nieparzysta, 153
 - parzysta, 153
 - pseudo-Smarandache’a, 135
 - s_k , 152–156
 - Smarandache’a, 136
 - surjekcja, 49
 - zeta Riemanna, 149
- granica ciągu, 48, 50, 124
- hipoteza Artina, 69
- iloczyn, 18, 36, 41, 104, 129
 - cyfr, 43
 - liczb trójkątnych, 130
- IMO, 1, 13, 102, 136
 - Longlist, 7, 118, 122, 156
 - Shortlist, 8, 17, 22–24
- indeks modulo p , 41
- indukcja matematyczna, 22, 23, 25, 51, 96
- klasy abstrakcji, 92, 93
- kodzielnik dziesiętny, 52, 61, 70, 75, 77, 79, 81
- kolejne liczby
 - kwadratowe, 132
 - Mersenne’a, 9
 - naturalne, 145–147, 156, 157
 - nieparzyste, 122
 - trójkątne, 125, 132, 135
- kolejne wyrazy ciągu, 104
- kongruencja, 8, 53, 61, 68, 69, 95, 97, 101, 107, 155, 156
- konstrukcje geometryczne, 116, 117
- kwadrat, 130
- liczba
 - 444, 29
 - π , 142, 149
 - $d_q(m)$, 53
 - alpejska, 104
 - Bernoulliego, 148, 154
 - bezkwadratowa, 31, 34, 36, 129, 141
 - Carmichaela, 3, 15, 35, 36
 - Cullena, 119
 - cyfr rozwinięcia, 55, 56, 61, 63, 64
 - $d_q(m)$, 53
 - Fermata, 3, 35, 115–119, 127
 - Fibonacciego, 12
 - jedynekowa e_n , 3, 37–44
 - kwadratowa, 17, 20, 22, 40, 44, 45, 69, 95, 108, 120, 121, 124, 126, 129–133, 140–144, 152, 153, 155
 - Mersenne’a, 3, 5–15, 17, 18, 35, 43, 116, 119
 - niekwadratowa, 69
 - nieparzystych podzielników, 145
 - Nivena, 9, 41
 - palindromiczna, 124, 125, 136, 140, 142
 - pięciokątna, 4, 142–144
 - pierwsza, 10, 12–15, 21, 22, 24, 25, 27, 32, 34–36, 40, 41, 61, 62, 67, 68, 70, 80, 100, 101, 104, 116, 118–120, 122, 128, 129, 135, 136, 141, 143, 155, 156

- Fermata, 116
 Gaussa, 116
 Germain, 12
 Mersenne'a, 11, 12
 nieregularna, 150
 niespecjalna, 69
 postaci $12k + 1$, 36
 postaci $18k + 1$, 36
 postaci $2^s k + 1$, 100
 postaci $2kp + 1$, 14
 postaci $4k + 3$, 12
 postaci $6k + 1$, 36
 postaci $6pk + 1$, 122
 postaci $8k + 1$, 14
 postaci $8k + 7$, 14
 postaci $8k - 1$, 14
 regularna, 150
 specjalna, 67–70, 88, 92, 93
 szczególnej postaci, 17, 23, 25, 26, 28, 30–32, 37, 44, 45, 98, 102–105, 108, 109, 111, 118–120, 122, 129, 140
 Wiefericha, 17
 piramidalna, 4, 139
 poprzedzająca okres zasadniczy, 59
 postaci $4k + 3$, 143
 postaci $6k + 5$, 142
 postaci $8k + 1$, 124, 143
 prostokątna, 136
 pseudopierwsza, 3, 15, 35, 36
 $r_q(m)$, 52
 rzeczywista, 49, 50, 55, 58
 sześciokątna, 4, 143, 144
 tetraedralna, 4, 139–141, 143
 trójkątna, 4, 118, 123–137, 139–144
 utworzona z cyfr okresu, 59
 wielokątna, 4, 144
 wymierna, 20, 47, 52, 53, 55, 56, 58, 61, 67, 70, 71, 73, 74, 76–82, 91, 128, 148, 151
 złożona, 12, 15, 23, 32, 35–37, 42, 104, 117–121, 141
 zespolona, 20
 liczby względnie pierwsze, 10, 19, 20, 40, 52, 95–100, 103, 116, 121, 122, 129, 141, 153
 linijka, 116, 117
 logarytm, 142, 143
 lustrzane odbicie, 13, 25, 27, 125, 129, 141
 Maple, 1, 8–10, 13–15, 17, 24–32, 38, 39, 44–46, 63–65,
 max, 56, 61, 75, 77, 81
 min, 153
 nierówność, 22, 48, 50, 116, 135, 147, 149, 156
 nwd, 2, 7, 9, 10, 19–21, 40, 44, 97–99, 101–103, 105–114
 nww, 2, 71–74
 oblong numbers, 136, 137
 okres rozwinięcia, 57–59
 czysty, 59–61, 90
 zasadniczy, 59–61, 63, 64, 67, 69–71, 73–84, 86, 88–93
 Olimpiada Matematyczna
 Bułgaria, 34, 35
 Czechosłowacja, 34, 109, 155
 Czechy-Słowacja, 8, 31, 100
 Hong Kong, 31
 Indie, 23
 Irlandia, 107
 Japonia, 114
 Kanada, 122, 134, 156
 Korea, 105
 Mołdawia, 9, 120
 Mongolia, 120
 Moskwa, 40, 74
 Polska, 101, 104, 153, 155
 Rosja, 17, 31, 104
 Rumunia, 22, 31, 141
 St Petersburg, 41, 43
 Tajwan, 118
 Turcja, 36
 Unesco Contest IASI, 22
 USA, 122
 W.Brytania, 35
 Włochy, 25, 107, 111
 Wietnam, 14
 otwarty problem, 12, 14, 17, 37, 116, 120, 121, 133, 150
 para
 liczb naturalnych, 14, 127, 128, 130, 140, 147
 liczb wymiernych, 128
 trójkątna, 128
 pentagonal numbers, 142
 permutacja, 147
 pierścień, 148
 $\mathbb{Z}[x]$, 95
 \mathbb{Z}_m , 134, 135, 155
 pochodna, 95, 150, 151
 podzbiór, 7, 105, 153
 podzielność, 7, 18, 20–23, 31, 32, 34–36, 41, 42, 52, 53, 55, 56, 58, 70–74, 76, 78, 79, 82, 97, 100, 103–105, 155
 przez 3, 8, 13, 16, 25, 27, 29–33, 41, 53, 75, 83–86, 104, 118, 119

- przez 4, 13, 16, 23, 27, 29–33, 121, 155
przez 5, 13, 16, 26, 28–34, 40, 107, 110, 120, 121, 155
przez 6, 13, 16, 26, 27, 29–33, 40, 41
przez 7, 13, 16, 26, 27, 30–33, 40, 41, 102, 107–110, 121
przez 8, 13, 23, 27, 29, 30, 33, 111, 125
przez 9, 8, 13, 16, 27–30, 33, 41, 43, 74–77, 103, 109, 112
przez 10, 13, 16, 28–31, 100, 111, 121
przez 11, 13, 16, 26, 28, 29, 31–33, 41, 107, 108, 110, 113, 114
przez 12, 13, 26, 27, 29, 30, 33, 111, 114, 135
przez 13, 13, 16, 25, 27, 29–33, 40, 41, 105, 107, 108, 110, 111, 121
przez 14, 27, 30
przez 15, 13, 16, 29, 30, 155
przez 16, 21, 27, 29, 30, 32, 33, 41
przez 17, 13, 16, 27, 29, 30, 32, 33, 41
przez 18, 13, 26, 27, 29, 30, 41
przez 19, 13, 16, 26–28, 30, 31, 33, 41, 107
przez liczbę pierwszą, 24, 41, 61, 68, 72, 78, 101, 155, 156
przez potęgę liczby pierwszej, 72, 74, 82
- potęga
czwórki, 15
dwójki, 3, 5–15, 17, 18, 22, 24, 25, 27, 29–35, 98–106, 108, 109, 115–122, 124, 135, 136, 145, 147
jedenastki, 29, 30, 40, 113, 114
liczby pierwszej, 10, 86, 102
piątki, 3, 9, 26, 27, 32, 33, 35, 106–114, 122, 135
siódemki, 14, 28, 29, 70, 106, 109–112, 114, 122, 135
szóstki, 27, 28
trójki, 3, 8, 24, 25, 31, 32, 35, 42, 100, 103–108, 110, 111, 118, 122, 128, 135, 146, 147
- prostokąt, 130
prostopadłościan, 130
pytanie, 44, 135
- q-ciąg, 47, 48
normalny, 48–50, 55, 58
q-dzielnik, 52–54, 56, 60, 61, 71, 76, 78
q-kodzielnik, 52–54, 56, 60, 61, 70, 71, 76, 78, 79
q-rozwinięcie, 47, 50–52, 55–60, 64, 67, 69–71, 73, 76, 78–80, 82, 88, 90, 92
- równanie diofantyczne, 17, 117, 126–129, 131–133, 135
- relacja typu równoważności, 92, 93
repunits, 37
reszta z dzielenia, 9, 19, 121, 125, 135
równanie diofantyczne
 n zmiennych, 134
rozkład kanoniczny, 5, 10, 15, 17, 24, 26–29, 38, 39, 41, 52, 102, 105, 106
rozwiązanie
naturalne, 17, 117, 126–129, 131–135
w zbiorze liczb pierwszych, 129
wymierne, 128, 133
rozwinięcie
dziesiętne, 43, 47, 50, 55, 56, 62
normalne, 50, 55, 57
okresowe, 57, 58, 61
przy podstawie q , 47, 50
skończone, 55, 58
- rząd liczby, 53
- silnia, 12, 18, 22, 136, 151, 153
suma, 153
cyfr, 9, 41, 79, 124, 140
kolejnych liczb całkowitych, 147
kolejnych potęg, 156
liczb Mersenne'a, 7
liczb tetraedralnych, 140
liczb trójkątnych, 127
szeregu, 48, 49, 59, 124, 142, 143
ułamków prostych, 134
- symbol
Jacobiego, 118, 122
Legendre'a, 68
Newtona, 23, 24, 95–97, 124, 130, 140, 148, 149, 154
- system numeracji, 56, 58, 78, 79, 82, 92
dowolny, 24, 43, 125
dwójkowy, 43, 119
dziesiętny, 43, 125, 140
dziewiątkowy, 125
piątkowy, 125
- sześcian, 130
sześcian liczby naturalnej, 14, 101, 107, 130, 133, 140, 141, 152, 153, 155
szereg, 7, 47, 119, 124, 142, 143, 148, 149
- trójka liczb naturalnych, 101, 126–128, 133
trójka Pitagorasa, 133
- twierdzenie
chińskie o resztach, 135
Dirichleta, 69
Eulera, 7, 18, 21, 27, 33, 41, 44, 52, 53, 70, 97, 98, 107

- Gaussa, 116, 126
- Ginsberga, 83, 86
- małe Fermata, 7, 14, 15, 23, 33–35, 101
 - o rozwinięciach liczb rzeczywistych, 50, 61
 - o rozwinięciach skończonych, 56
 - o trzech ciągach, 50
- wielkie Fermata, 150

- ułamek prosty, 56, 57, 60, 62, 64, 66, 67, 71, 76,
80, 82, 83, 86, 88–90, 92, 93

- wielokąt foremny, 116, 117
- wielomian, 42, 95, 135, 152
 - Bernoulliego, 150, 151, 154
 - moniczny, 150
- wykładnik, 41, 53, 101
- wyznacznik, 153

- zbiór
 - \mathbb{N}_0 , 1, 9, 19, 20, 48, 49, 58, 93, 98, 116, 122,
151
 - gęsty, 149
 - liczb całkowitych, 1
 - liczb naturalnych, 1, 7
 - liczb pierwszych, 1, 12, 14, 62, 67, 69, 116,
118, 129, 150
 - liczb rzeczywistych, 1, 42, 49
 - liczb wymiernych, 1, 47, 55, 133
 - liczb zespolonych, 1
 - nieskończony, 12, 14, 17, 22, 23, 31, 32, 35, 36,
40, 42, 47, 69, 70, 98, 100, 103–105, 116,
118–122, 125, 127–136, 140–142, 149, 150,
156
 - pusty, 105
 - skończony, 134