Podróże po Imperium Liczb

Część 08. Liczby Mersenne'a, Fermata i Inne Liczby

Rozdział 4

---

4. Rozwinięcia liczb wymiernych

Andrzej Nowicki 20 maja 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

4 Rozwinięcia liczb wymiernych

W tym i w następnym rozdziale pojawią się jeszcze raz liczby, którymi zajmowaliśmy się w poprzednich rozdziałach. Będą to głównie liczby postaci $q^n - 1$, gdzie $q \geqslant 2$ oraz n są liczbami naturalnymi. Poznamy pewne dodatkowe własności tych liczb oraz ich zastosowania.

Wiadomo, że każdą liczbę rzeczywistą x można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots ,$$

gdzie a_0 jest liczbą całkowitą oraz $a_1, a_2, \dots$ są liczbami należącymi do zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, przy czym nieskończenie wiele z tych liczb jest różnych od 9. Przedstawienie to nazywa się *rozwinięciem dziesiętnym* liczby x. Przykłady i pewne wstępne informacje (bez dowodów) o rozwinięciach dziesiętnych zamieściliśmy w [N-1].

W mianownikach ułamków przedstawionego rozwinięcia występują potęgi dziesiątki. Możemy liczbę 10 zastąpić dowolną liczbą naturalną większą od 1 i również otrzymać podobnego typu rozwinięcia. Niech $q \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Każdą liczbę rzeczywistą x można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x = a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \cdots ,$$

gdzie a_0 jest liczbą całkowitą oraz $a_1, a_2, \dots$ są liczbami należącymi do zbioru $\{0, 1, \dots, q-1\}$, przy czym nieskończenie wiele z tych liczb jest różnych od $q-1$. Przedstawienie to nazywa się *rozwinięciem liczby x przy podstawie q*. W tym i następnym rozdziale nazywać to będziemy *q-rozwinięciem liczby x*.

Jeśli x jest liczbą wymierną, to jej q-rozwinięcie jest albo skończone albo okresowe. Okresy takich rozwinięć posiadają przeróżne ciekawe własności, które dokładnie przedstawimy w rozdziale następnym. Ten natomiast rozdział ma charakter wstępny. Podamy w nim, wraz z dowodami, podstawowe twierdzenia i fakty dotyczące q-rozwinięć.

4.1 Rozwinięcia liczb rzeczywistych przy danej podstawie

Załóżmy, że $q \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą naturalną. Nieskończony ciąg $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ nazywamy *q-ciągiem*, jeśli a_0 jest liczbą całkowitą oraz wszystkie pozostałe wyrazy $a_1, a_2, \dots$ są liczbami całkowitymi należącymi do zbioru $\{0, 1, \dots, q-1\}$.

4.1.1. *Jeśli $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ jest q-ciągiem, to szereg* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{a_i}{q^i}$ *jest zbieżny.*

D. Oznaczmy: $s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{q^i}$, dla $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy $s_n = s_{n-1} + \frac{a_n}{q^n}$ dla $n \geqslant 1$ oraz

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{q^i} \leqslant a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{q-1}{q^i} = a_0 + \frac{q-1}{q} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^i} \\ &\leqslant a_0 + \frac{q-1}{q} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q^i} = a_0 + \frac{q-1}{q} \cdot \frac{q}{q-1} \\ &= a_0 + 1. \end{aligned}$$

Ciąg sum cząstkowych (s_n) jest więc niemalejący i ograniczony z góry (przez liczbę $a_0 + 1$). Posiada zatem granicę. ⊠

Niech $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ będzie danym q-ciągiem i niech $\gamma(a)$ będzie sumą szeregu $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{q^i}$. Oznaczymy przez $s_n(a)$ (dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$) n-tą sumę cząstkową tego szeregu, tzn.

$$s_n(a) = a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \cdots + \frac{a_n}{q^n}.$$

W szczególności $s_0(a) = a_0$. Z faktu 4.1.1 i jego dowodu wynika, że $\gamma(a)$ jest liczbą rzeczywistą,

$$\gamma(a) = \lim_{n\to\infty} s_n(a) \quad \text{i} \quad a_0 \leqslant \gamma(a) \leqslant a_0 + 1.$$

Mamy ponadto:

4.1.2. $0 \leqslant \gamma(a) - s_n(a) \leqslant \frac{1}{q^n}$, *dla* $n \in \mathbb{N}_0$.

D.
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \gamma(a) - s_n(a) = \frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{q^{n+2}} + \dots \\ &\leqslant \frac{q-1}{q^{n+1}} + \frac{q-1}{q^{n+2}} + \cdots = \frac{q-1}{q^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q^i} \\ &= \frac{q-1}{q^{n+1}} \cdot \frac{q}{q-1} = \frac{1}{q^n}. \quad ⊠ \end{aligned}$$

Z tego dowodu wynika, że
$$\gamma(a) - s_n(a) = \frac{1}{q^n}$$
wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $a_{n+1},\ a_{n+2},\ \dots$ są równe $q-1$. Rozważać będziemy tylko takie q-ciągi, dla których tego rodzaju równości nie zachodzą. Mówić będziemy, że dany q-ciąg $a = (a_0, a_1, a_2 \dots)$ jest *normalny* ([S50] lub [S68]), jeśli nieskończenie wiele jego wyrazów jest różnych od $q - 1$. Mamy zatem:

4.1.3. *Jeśli a jest normalnym q-ciągiem, to dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n zachodzą nierówności*
$$0 \leqslant \gamma(a) - s_n(a) < \frac{1}{q^n}.$$

Normalne q-ciągi posiadają następujące własności.

4.1.4. *Niech $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ będzie normalnym q-ciągiem. Oznaczmy: $x = \gamma(a)$, $s_n = s_n(a)$ dla $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy:*

(1) $[q^n x] = q^n s_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}_0$*;*

(2) $a_0 = [x]$ *oraz*

$$a_n = \left[q^n x\right] - q\left[q^{n-1}x\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$. ([S50], [S68]).

D. (1). Wiemy (patrz 4.1.3), że $0 \leqslant x - s_n < \frac{1}{q^n}$. Po pomnożeniu przez q^n otrzymujemy $0 \leqslant q^n x - q^n s_n < 1$ i stąd $[q^n x - q^n s_n] = 0$. Ale

$$q^n s_n = a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_{n-1} q + a_n$$

jest liczbą całkowitą. Zatem,

$$0 = [q^n x - q^n s_n] = [q^n x] - q^n s_n,$$

czyli $[q^n x] = q^n s_n$.

(2). Niech $n \geqslant 1$. Z (1) wynika, że $[q^n x] = q^n s_n$ oraz $\left[q^{n-1}x\right] = q^{n-1}s_{n-1}$. Ponadto,

$$q^n(s_n - s_{n-1}) = q^n \cdot \frac{a_n}{q^n} = a_n.$$

Zatem: $a_n = q^n s_n - q \cdot q^{n-1}s_{n-1} = [q^n x] - q\left[q^{n-1}x\right]$. ⊠

Oznaczmy przez $\mathcal{M}_q$ zbiór wszystkich normalnych q-ciągów. Jeśli $a \in \mathcal{M}_q$, czyli jeśli $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ jest normalnym q-ciągiem, to sumę szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{q^n}$ oznaczyliśmy przez $\gamma(a)$; wiemy (patrz 4.1.1), że $\gamma(a)$ jest liczbą rzeczywistą. Mamy zatem funkcję

$$\gamma : \mathcal{M}_q \to \mathbb{R},$$

przypoprządkowującą każdemu normalnemu q-ciągowi a liczbę rzeczywistą $\gamma(a)$.

4.1.5. *Powyższa funkcja $\gamma : \mathcal{M}_q \to \mathbb{R}$ jest bijekcją.*

D. ([S50] 210-213). Przypuśćmy, że $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, $a' = (a'_0, a'_1, a'_2, \dots)$ są normalnymi q-ciągami takimi, że $\gamma(a) = \gamma(a')$. Oznaczmy $x = \gamma(a)$. Wtedy $x = \gamma(a')$ i (na mocy 4.1.4) mamy $a_0 = [x] = a'_0$ oraz

$$a_n = [q^n x] - q\left[q^{n-1}x\right] = a'_n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem wtedy $a = a'$. Oznacza to, że funkcja γ jest różnowartościowa.

Udowodnimy teraz, że γ jest surjekcją. Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Definiujemy ciąg $a = (a_n)$, przyjmując:

$$a_0 = [x], \quad a_n = [q^n x] - q\left[q^{n-1}x\right] \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Pokażemy, że a jest normalnym q-ciągiem i $x = \gamma(a)$. Oczywiście $a_0 = [x]$ jest liczbą całkowitą. Niech $n \geqslant 1$. Ponieważ

$$q^n x - 1 < [q^n x] \leqslant q^n x$$

oraz $q^{n-1}x - 1 < \left[q^{n-1}x\right] \leqslant q^{n-1}x$, więc

$$\begin{aligned} -1 &= q^n x - 1 - q\cdot q^{n-1}x < [q^n x] - q\cdot q^{n-1}x < [q^n x] - q\left[\cdot q^{n-1}x\right] \\ &\leqslant q^n x - q\left[\cdot q^{n-1}x\right] < q^n x - q(q^{n-1}x - 1) = q. \end{aligned}$$

Ale $[q^n x] - q\left[q^{n-1}x\right] = a_n$, więc $0 \leqslant a_n < q$. Zatem a jest q-ciągiem.

Niech $s_n = a_0 + \frac{a_1}{q} + \cdots + \frac{a_n}{q^n}$. Zauważmy, że $s_n = \frac{[q^n x]}{q^n}$. Istotnie,

$$\begin{aligned} s_n &= [x] + \frac{[qx] - q[x]}{q} + \cdots + \frac{[q^n x] - q[q^{n-1}x]}{q^n} \\ &= [x] + \frac{[qx]}{q} - [x] + \frac{[q^2 x]}{q^2} - \frac{[qx]}{q} + \cdots + \frac{[q^n x]}{q^n} - \frac{[q^{n-1}x]}{q^{n-1}} = \frac{[q^n]}{q^n}. \end{aligned}$$

Ponieważ $q^n x - 1 < [q^n x] \leqslant q^n x$, więc $x - \frac{1}{q^n} < s_n \leqslant x$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc, że $\lim s_n = x$. Zatem $x = \gamma(a)$.

Wykazaliśmy również, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $x - s_n < \frac{1}{q^n}$.

Należy jeszcze tylko wykazać, że q-ciąg a jest normalny. Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech $a_n = q - 1$ dla wszystkich n większych od pewnego n_0. Wtedy, dla $n > n_0$, mamy:

$$x - s_n = \frac{q-1}{q^{n+1}} + \frac{q-1}{q^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{q^n},$$

wbrew temu, że $x - s_n < \frac{1}{q^n}$. ⊠

Z przedstawionych faktów wynika następujące twierdzenie o rozwinięciach liczb rzeczywistych.

4.1.6. *Niech $q \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Każda liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci*

$$(*) \qquad x = a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \ldots,$$

gdzie $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ jest normalnym q-ciągiem, tzn. $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ dla $n \geqslant 1$ oraz nieskończenie wiele wyrazów a_n jest różnych od $q - 1$. Zachodzą ponadto równości:

$$a_0 = [x], \quad a_n = \left[q^n x\right] - q\left[q^{n-1}x\right]$$

dla $n \geqslant 1$. ([S50], [S68]).

Równość $(*)$ nazywa się *rozwinięciem normalnym liczby x przy podstawie q* i zapisuje się ją w postaci

$$x = (a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots)_q \,.$$

W tej książce rozwinięcie to nazywać będziemy *q-rozwinięciem* liczby x. Liczby $a_1, a_2, \ldots$ nazywa się *cyframi* tego rozwinięcia. W przypadku gdy $q = 10$, równość $(*)$ nazywa się *rozwinięciem dziesiętnym liczby x* i zapisuje się ją w postaci

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots .$$

Przez $\{x\}$ oznaczamy część ułamkową liczby rzeczywistej x, tzn. $\{x\} = x - [x]$.

Dla danej liczby rzeczywistej x definiujemy nieskończony ciąg $(x_1, x_2, \dots)$, w następujący rekurencyjny sposób:

$$x_1 = \{x\}, \quad x_{n+1} = \{qx_n\} \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami rzeczywistymi należącymi do przedziału $[0, 1)$.

4.1.7. $x_n = \left\{q^{n-1}x\right\}$, *dla* $n \geqslant 1$. ([S50] 213).

D. (Indukcja matematyczna). Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech $n \geqslant 1$ i załóżmy, że $x_n = \left\{q^{n-1}x\right\}$. Wtedy $x_n = q^{n-1}x - \left[q^{n-1}x\right]$ i stąd (po pomnożeniu przez q)

$$qx_n = q^n x - q\left[q^{n-1}x\right].$$

Ponieważ $q\left[q^{n-1}x\right]$ jest liczbą całkowitą, więc $[qx_n] = [q^n x] - q\left[q^{n-1}x\right]$. Mamy teraz:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \{qx_n\} = qx_n - [qx_n] = \Big(q^n x - q\left[q^{n-1}x\right]\Big) - \Big([q^n x] - q\left[q^{n-1}x\right]\Big) \\ &= q^n x - [q^n x] = \{q^n x\} \end{aligned}$$

i to kończy dowód indukcyjny. ⊠

Wyrazy ciągu $(a_0, a_1, \dots)$, występującego w q-rozwinięciu $(*)$, można otrzymać przy pomocy ciągu (x_n). Mówi o tym następujące stwierdzenie.

4.1.8. *Jeśli* $x = a_0 + \dfrac{a_1}{q} + \dfrac{a_2}{q^2} + \dfrac{a_3}{q^3} + \dots$, *jest q-rozwinięciem liczby rzeczywistej x, to*

$$a_0 = [x], \quad \textit{oraz} \quad a_n = \Big[qx_n\Big] \quad \textit{dla} \quad n \geqslant 1.$$

([S50], [S68]).

D. Jest oczywiste, że $a_0 = [x]$. Niech $n \geqslant 1$. Wtedy:

$$[qx_n] = \left[q\{q^{n-1}x\}\right] = \Big[q^n x - q\left[q^{n-1}x\right]\Big] = [q^n x] - q\left[q^{n-1}x\right] = a_n.$$

Wykorzystaliśmy 4.1.6 i 4.1.7. ⊠

★ G. H. Hardy, E. M. Wright, *The decimal associated with a given number*, [HW5] 107-109.
Justyna Homann, *Rozwinięcia liczb wymiernych*, [Pmgr] 2011.
A. Mastalerz, *Rozwinięcia liczb rzeczywistych w różnych systemach numeracji* [Pmgr] 1992.
W. Sierpiński, *Ułamki nieskończone przy zasadzie g*, [S50] 210-213.
W. Sierpiński, *Algorytm dla wyznaczania rozwinięcia normalnego*, [S50] 213-214.
W. Sierpiński, *Rozwinięcia liczb według zasady* 10 *i innych*, [S57] 96-102.
W. Sierpiński, *Rozwijanie liczb rzecz. na ułamki o danej zasadzie numeracji*, [S68] 230-236.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.2 O q-dzielnikach i q-kodzielnikach

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W następnych podrozdziałach zajmować się będziemy q-rozwinięciami liczb wymiernych. W tym podrozdziale ustalimy terminologię i wprowadzimy pewne nowe pojęcia potrzebne do wysłowienia podstawowych twierdzeń o q-rozwinięciach. Przez cały czas zakładamy, że

$$q = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

jest rozkładem kanonicznym ustalonej liczby naturalnej $q \geqslant 2$.

Każdą liczbę naturalną m można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu

$$m = m_1 m_2,$$

gdzie m_1, m_2 są liczbami naturalnymi takimi, że:

(a) liczby m_1 i q są względnie pierwsze oraz

(b) liczba m_2 jest postaci $p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$, gdzie $\beta_1, \dots, \beta_s$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Liczbę m_2 nazywać będziemy *q-dzielnikiem* liczby m. Natomiast liczbę m_1 nazywać będziemy *q-kodzielnikiem* liczby m.

Dla przykładu, jeśli $q = 12 = 2^2 3$ i $m = 9000 = 2^3 3^2 5^3$, to q-dzielnikiem liczby m jest $2^3 3^2 = 72$, a q-kodzielnikiem jest $5^3 = 125$.

Jest jasne, że liczby naturalne m i q są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy q-dzielnik liczby m jest równy 1.

W szczególnym przypadku, gdy $q = 10$, liczbę m_1 (czyli 10-kodzielnik) nazywać będziemy *kodzielnikiem dziesiętnym*, a liczbę n_2 (czyli 10-dzielnik) *dzielnikiem dziesiętnym*. Dzielnik dziesiętny jest zawsze postaci $2^i 5^j$, gdzie i, j są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Kodzielnik dziesiętny jest liczbą naturalną względnie pierwszą z 10.

Niech m_2 będzie q-dzielnikiem danej liczby naturalnej m. Istnieje wtedy nieujemna liczba całkowita r taka, że liczba q^r jest podzielna przez m_2. Najmniejszą z takich liczb r oznaczać będziemy przez $r_q(m)$.

Jeśli $q = 12$ i $m = 9000$,to $r_{12}(9000) = 2$, gdyż $m_2 = 72$ i najmniejszą nieujemną liczbą całkowitą r taką, że $72 \mid 12^r$ jest $r = 2$; mamy bowiem $72 \nmid 12 = 12^1$ oraz $72 \mid 12^2 = 144 = 2 \cdot 72$. Inne przykłady:

$$r_{10}(75) = 2, \quad r_{10}(48) = 4, \quad r_{10}(96) = 5, \quad r_{10}(13) = 0, \quad r_{10}(65) = 1,$$
$$r_{12}(75) = 1, \quad r_6(100) = 2, \quad r_{18}(96) = 5, \quad r_{18}(34) = 1, \quad r_{15}(67) = 0.$$

Załóżmy, że m_1 jest q-kodzielnikiem danej liczby naturalnej m. Wtedy $\text{nwd}(m_1, q) = 1$, a zatem (na mocy twierdzenia Eulera)

$$q^{\varphi(m_1)} \equiv 1 \pmod{m_1}.$$

Istnieje więc liczba naturalna d (na przykład $d = \varphi(n_1)$) taka, że $q^d \equiv 1 \pmod{m_1}$. Wśród wszystkich takich liczb d istnieje liczba najmniejsza; oznaczać ją będziemy przez $d_q(m)$.

Jeśli $q = 2$ i $m = 6$, to $d_2(6) = 2$, gdyż $m_1 = 3$ i najmniejszą liczbą naturalną d taką, że $3 \mid 2^d - 1$ jest $d = 2$. Inne przykłady:

$$\begin{array}{lllll} d_{10}(7) = 6, & d_{10}(17) = 16, & d_{10}(96) = 1, & d_{10}(33) = 2, & d_{10}(65) = 6, \\ d_{12}(75) = 20, & d_6(100) = 5, & d_{18}(97) = 16, & d_{18}(34) = 1, & d_{15}(67) = 11. \end{array}$$

Jeśli a jest dowolną liczbą naturalną względnie pierwszą z q, to istnieje liczba naturalna s taka, że $q^s \equiv 1 \pmod{a}$. Z twierdzenia Eulera wynika, że taką liczbą s jest na przykład $s = \varphi(a)$. Najmniejszą taką liczbę naturalną s oznacza się przez $\delta_a(q)$ i nazywa *rzędem liczby q modulo a* lub *wykładnikiem liczby q modulo a* ([S50], [Wino], [N-4]). Przykłady:

$$\delta_5(2) = 4,\ \delta_5(3) = 4,\ \delta_5(4) = 2,\ \delta_{10}(3) = 4,\ \delta_3(10) = 1,\ \delta_{10}(9) = 2.$$

Rozpatrywana wcześniej liczba $d_q(m)$, to nic innego, jak $\delta_{m_1}(q)$, gdzie m_1 jest q-kodzielnikiem liczby m.

Łatwo dowodzi się, że jeśli $\mathrm{nwd}(a, q) = 1$ i s jest liczbą naturalną taką, że $q^s \equiv 1 \pmod{a}$, to s jest podzielne przez $\delta_a(q)$. Stąd wynika, że liczba $\delta_a(q)$ jest dzielnikiem liczby $\varphi(a)$. Mamy zatem:

4.2.1. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ i niech m_1 będzie q-kodzielnikiem liczby m. Wtedy $d_q(m)$ jest dzielnikiem liczby $\varphi(m_1)$.*

Przy powyższych oznaczeniach zachodzi równość $\varphi(m) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$. Jeśli więc $d_q(m)$ jest dzielnikiem liczby $\varphi(m_1)$, to jest również dzielnikiem liczby $\varphi(m)$. Zanotujmy:

4.2.2. *Jeśli $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ oraz $m \in \mathbb{N}$, to $d_q(m)$ jest dzielnikiem liczby $\varphi(m)$.*

W dalszych podrozdziałach wykorzystamy następujące stwierdzenia.

4.2.3. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$. Dla każdej liczby wymiernej x istnieją liczby całkowite c, r, d takie, że $r \geqslant 0$, $d \geqslant 1$ oraz*

$$\boxed{x = \frac{c}{q^r(q^d - 1)}}\ .$$

D. Niech x będzie dowolną liczbą wymierną. Liczba ta jest postaci $\frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$ i $1 \leqslant m \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez m_1 i m_2 odpowiednio q-kodzielnik i q-dzielnik liczby m. Niech $r = r_q(m)$, $d = d_q(m)$. Wtedy $m = m_1 m_2$ oraz istnieją liczby naturalne s, t takie, że $q^r = sm_2$, $q^d - 1 = tm_1$. Mamy zatem:

$$x = \frac{a}{m} = \frac{a}{m_1 m_2} = \frac{ast}{(tm_1)(sm_2)} = \frac{ast}{q^r(q^d - 1)} = \frac{c}{q^r(q^d - 1)},$$

gdzie $c = ast$ jest liczbą całkowitą. ⊠

4.2.4. *Niech* $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ *oraz* $x = \frac{a}{m}$, *gdzie* $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\text{nwd}(a, m) = 1$. *Istnieją wtedy jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite* a_0, u, v *takie, że*

$$\boxed{x = a_0 + \frac{u}{q^r} + \frac{v}{q^r(q^d - 1)}, \quad 0 \leqslant u < q^r, \quad 0 \leqslant v < q^d - 1},$$

gdzie $r = r_q(m)$, $d = d_q(m)$.

D. Niech $r = r_q(m)$, $d = d_q(m)$. Wiemy (patrz stwierdzenie 4.2.3 i jego dowód), że

$$x = \frac{c}{q^r(q^d - 1)},$$

gdzie c jest pewną liczbą całkowitą. Istnieją (jednoznacznie wyznaczone) liczby całkowite a_0, b takie, że $c = a_0 q^r(q^d - 1) + b$, $0 \leqslant b < q^r(q^d - 1)$. Dzielimy b przez $q^d - 1$ i mamy równość $b = u(q^d - 1) + v$, w której u i v są liczbami całkowitymi i przy tym $0 \leqslant v < q^d - 1$. Z nierówności $0 \leqslant b < q^r(q^d - 1)$ wynika, że $0 \leqslant u < q^r$. Zatem:

$$x = \frac{c}{q^r(q^d - 1)} = \frac{a_0 q^r(q^d - 1) + b}{q^r(q^d - 1)} = a_0 + \frac{b}{q^r(q^d - 1)} = a_0 + \frac{u(q^d - 1) + v}{q^r(q^d - 1)} = a_0 + \frac{u}{q^r} + \frac{v}{q^r(q^d - 1)},$$

oraz $0 \leqslant u < q^r$, $0 \leqslant v < q^d - 1$. Wykazaliśmy więc, że istnieją liczby całkowite a_0, u, v spełniające żądane warunki.

Należy jeszcze wykazać, że liczby a_0, u, v są wyznaczone jednoznacznie. Przypuśćmy, że pewne liczby całkowite a_0', u', v' również spełniają żądane warunki. Ponieważ $0 \leqslant u' < q^r$ oraz $0 \leqslant v' < q^d - 1$, więc

$$0 \leqslant \frac{u'}{q^r} + \frac{v'}{q^r(q^d - 1)} = \frac{u'(q^d - 1) + v'}{q^r(q^d - 1)} \leqslant \frac{(q^r - 1)(q^d - 1) + q^d - 2}{q^r(q^d - 1)} = \frac{q^r(q^d - 1) - 1}{q^r(q^d - 1)} < 1.$$

Zatem $a_0 = [x] = a_0'$ oraz $u'(q^d - 1) + v' = u(q^d - 1) + v$ i stąd dalej mamy: $u' = u$, $v' = v$. ⊠

4.2.5. *Niech* $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ *oraz* $x = \frac{a}{m}$, *gdzie* $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\text{nwd}(a, m) = 1$. *Załóżmy, że liczby* r, d, a_0, u, v *są takie jak w stwierdzeniu* 4.2.4. *Wtedy:*

(1) *jeśli* $r = 0$, *to* $u = 0$;

(2) *jeśli* $d = 1$, *to* $0 \leqslant v \leqslant q - 2$;

(3) *jeśli* $d = 1$ *i* $q = 2$, *to* $v = 0$;

(4) *jeśli* $d \geqslant 2$, *to* $v \neq 0$ *oraz*

$$v = b_1 q^{d-1} + b_2 q^{d-2} + \cdots + b_{d-1} q + b_d,$$

gdzie $b_1, \dots, b_d$ *są liczbami całkowitymi należącymi do zbioru* $\{0, 1, \dots, q-1\}$ *i wśród nich są co najmniej dwie różne.*

D. Własności (1), (2) i (3) są oczywiste. Udowodnimy własność (4). Oznaczmy przez m_1 i m_2 odpowiednio q-dzielnik i q-kodzielnik mianownika m.

Załóżmy, że $d \geqslant 2$ i przypuśćmy, że $v = 0$. Wtedy

$$\frac{a}{m_1 m_2} = \frac{a}{m} = a_0 + \frac{u}{q^r} = \frac{a_0 q^r + u}{q^r},$$

więc $aq^r = m_1m_2(a_0q^r + u)$ i stąd $m_1 \mid aq^r$. Ale $\text{nwd}(aq^r, m_1) = 1$, więc $m_1 = 1$. Wiemy, że d jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $m_1 \mid q^d - 1$. Mamy oczywistą podzielność $1 = m_1 \mid q^1 - 1$. Zatem $2 \leqslant d \leqslant 1$; sprzeczność.

Załóżmy teraz, że $d \geqslant 2$ i przypuśćmy, że wszystkie liczby $b_1, \dots, b_d$ są równe pewnej liczbie s. Wtedy

$$v = sq^{d-1} + \cdots + sq + s = s\frac{q^d - 1}{q - 1}.$$

Ponieważ $0 < v < g^d - 1$, więc $1 \leqslant s \leqslant q - 2$. Mamy teraz:

$$\frac{a}{m_1m_2} = \frac{a}{m} = a_0 + \frac{u}{q^r} + \frac{s}{q^r(q-1)} = \frac{a_0q^r(q-1) + u(q-1) + s}{q^r(q-1)},$$

czyli $aq^r(q^1 - 1) = m_1m_2w$, gdzie $w = a_0q^r(q-1) + u(q-1) + s$. Ale $\text{nwd}(aq^r, m_1) = 1$, więc $m_1 \mid (q^1 - 1) = 1$. Otrzymaliśmy sprzeczność: $2 \leqslant d \leqslant 1$. ⊠

U. Pewien opis powyższych liczb a_0, u, v podany jest w 4.4.5. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.3 Rozwinięcia skończone

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $q \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wiemy już (patrz 4.1.6), że każda liczba rzeczywista x ma dokładnie jedno q-rozwinięcie:

$$x = a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \dots,$$

Przypomnijmy, że $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ jest normalnym q-ciągiem, tzn. $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ dla $n \geqslant 1$ oraz nieskończenie wiele wyrazów a_n jest różnych od $q-1$. Mówimy, że to rozwinięcie jest *skończone*, jeśli prawie wszystkie wyrazy a_n są równe zero.

Załóżmy, że powyższe q-rozwinięcie liczby x jest skończone. Istnieje wtedy nieujemna liczba całkowita m taka, że $a_n = 0$ dla wszystkich $n > m$. Mamy wtedy równość

$$x = a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \cdots + \frac{a_m}{q^m},$$

którą zapisuje się w postaci

$$x = (a_0, a_1a_2 \cdots a_m)_q \quad \text{lub } x = a_0, a_1a_2 \dots a_m \quad \text{gdy } q = 10.$$

Najmniejsze m o tej własności (gdy $x \neq 0$) nazywamy *liczbą cyfr* (lub *liczbą cyfr po przecinku*) tego skończonego rozwinięcia.

Z powyższej równości wynika, że wtedy x musi być liczbą wymierną. Istnieją jednak takie liczby wymierne, których q-rozwinięcia nie są skończone. Dla $q = 10$ mamy na przykład

$$\frac{1}{3} = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots;$$

rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej $\frac{1}{3}$. To rozwinięcie nie jest skończone.

4.3.1. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$. Następujące dwa warunki są równoważne:*

(1) *q-rozwinięcie liczby x jest skończone;*

(2) *istnieją liczby całkowite c, r takie, że $r \geqslant 0$ oraz $x = \dfrac{c}{q^r}$.*

D. (1) $\Rightarrow$ (2). Istnieje r takie, że $x = a_0 + \frac{a_1}{q} + \cdots + \frac{a_r}{q^r}$. Z równości tej wynika, że $x = \frac{c}{q^r}$, gdzie $c = a_0 q^r + a_1 q^{r-1} + \cdots + a_r$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Niech $x = \frac{c}{q^r}$, gdzie $c, r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 0$. Istnieją liczby całkowite a_0 i b takie, że $c = a_0 q^r + b$, $0 \leqslant b < q^r$. Przedstawiamy liczbę b w systemie numeracji o podstawie q. Ponieważ $0 \leqslant b < q^r$, więc

$$b = a_1 q^{r-1} + a_2 q^{r-2} + \cdots + a_{r-1} q + a_r,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_r \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Mamy teraz:

$$x = \frac{c}{q^r} = \frac{a_0 q^r + b}{q^s} = a_0 + \frac{a_1}{q} + \cdots + \frac{a_r}{q^r}$$

i stąd wynika, że q-rozwinięcie liczby x jest skończone. ⊠

Z faktów 4.3.1, 4.2.4 i 4.2.5 wynika następujące dobrze znane twierdzenie o rozwinięciach skończonych.

4.3.2. *Niech $q \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną i niech x będzie liczbą wymierną. Niech $x = \frac{a}{m}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\operatorname{nwd}(a, m) = 1$. Oznaczmy przez m_1 i m_2 odpowiednio q-kodzielnik i q-dzielnik liczby m.*

(1) *Rozwinięcie przy podstawie q liczby x jest skończone wtedy i tylko wtedy, gdy $m_1 = 1$. Innymi słowy, rozpatrywane rozwinięcie jest skończone wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieujemna liczba całkowita r taka, że $m \mid q^r$.*

(2) *Jeśli q-rozwinięcie liczby x jest skończone, to liczba cyfr (po przecinku) tego rozwinięcia jest równa $r_q(m)$, czyli jest najmniejszą nieujemną liczbą całkowitą r taką, że $m \mid q^r$.* ([S50] 216, [S68]).

Gdy $q = 10$, twierdzenie 4.3.2 ma następującą postać.

4.3.3. *Niech $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{a}{m}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\operatorname{nwd}(a, b) = 1$.*
Rozwinięcie dziesiętne liczby x jest skończone wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m = 2^\alpha 5^\beta,$$

gdzie α, β są nieujemnymi liczbami całkowitymi. W tym przypadku liczba cyfr tego rozwinięcia (tzn. liczba cyfr po przecinku) jest równa $\max(\alpha, \beta)$. ([S50], [S68]).

4.3.4. *Przykłady liczb postaci $\frac{1}{m}$, posiadających skończone rozwinięcia dziesiętne, wraz z ich rozwinięciami.*

1/2	=	0,5	1/25	=	0,04	1/125	=	0,008
1/4	=	0,25	1/32	=	0,03125	1/128	=	0,0078125
1/5	=	0,2	1/40	=	0,025	1/160	=	0,00625
1/8	=	0,125	1/50	=	0,02	1/250	=	0,004
1/10	=	0,1	1/64	=	0,015625	1/256	=	0,00390625
1/16	=	0,0625	1/80	=	0,0125	1/400	=	0,0025
1/20	=	0,05	1/100	=	0,01	1/500	=	0,002.

4.3.5. *Liczby postaci* $\frac{1}{m}$, *posiadające skończone* 6*-rozwinięcia, wraz z ich rozwinięciami.*

$1/2$	$=$	$0,3_6$	$1/12$	$=$	$0,03_6$	$1/36$	$=$	$0,01_6$
$1/3$	$=$	$0,2_6$	$1/16$	$=$	$0,0213_6$	$1/54$	$=$	$0,004_6$
$1/4$	$=$	$0,13_6$	$1/18$	$=$	$0,02_6$	$1/64$	$=$	$0,003213_6$
$1/6$	$=$	$0,1_6$	$1/24$	$=$	$0,013_6$	$1/72$	$=$	$0,003_6$
$1/8$	$=$	$0,043_6$	$1/27$	$=$	$0,012_6$	$1/81$	$=$	$0,0024_6$
$1/9$	$=$	$0,04_6$	$1/32$	$=$	$0,01043_6$	$1/96$	$=$	$0,00213_6$.

★ G. H. Hardy, E. M. Wright, *Terminating and recurring decimals*, [HW5] 109-111.
W. Sierpiński, *Warunek konieczny i wystarczający rozwijalności na ułamek skończony*, [S50] 214.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.4 Rozwinięcia okresowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $q \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną i niech

$$x = a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \dots,$$

będzie q-rozwinięciem (patrz 4.1.6) danej liczby rzeczywistej x. Mówimy, że to rozwinięcie jest *okresowe*, jeśli istnieją takie dwie liczby naturalne m, d, że $a_{n+d} = a_n$, dla $n \geqslant m$. Skończony ciąg $(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+d-1})$ nazywa się wtedy *okresem* tego rozwinięcia. W tym przypadku mówimy, że jest to okres o *długości* d.

Załóżmy, że powyższe q-rozwinięcie liczby x jest okresowe i liczby m, d są takie jak powyżej. Oznaczmy: $r = m - 1,\ b_1 = a_m = a_{r+1},\ b_2 = a_{r+2}, \dots,\ b_d = a_{r+d} = a_{m+d-1}$ oraz

$$u = \begin{cases} 0, & \text{gdy } r = 0, \\ a_1 q^{r-1} + a_2 q^{r-2} + \dots + a_{r-1} q + a_r, & \text{gdy } r \geqslant 1 \end{cases}$$

i ponadto:

$$v = b_1 q^{d-1} + b_2 q^{d-2} + \dots + b_{d-1} q + b_d.$$

4.4.1. *Przy powyższych założeniach i oznaczeniach zachodzi równość*

$$\boxed{x = a_0 + \frac{u}{q^r} + \frac{v}{q^r(q^d - 1)}}.$$

D.

$$\begin{aligned} x - a_0 &= \tfrac{a_1}{q} + \tfrac{a_2}{q^2} + \tfrac{a_3}{q^3} + \dots \\ &= \left(\tfrac{a_1}{q} + \tfrac{a_2}{q^2} + \dots + \tfrac{a_r}{q^r}\right) + \left(\tfrac{b_1}{q^{r+1}} + \tfrac{b_2}{q^{r+2}} + \dots + \tfrac{b_d}{q^{r+d}}\right) \\ &\quad + \left(\tfrac{b_1}{q^{r+d+1}} + \tfrac{b_2}{q^{r+d+2}} + \dots + \tfrac{b_d}{q^{r+2d}}\right) + \cdots \\ &= \tfrac{u}{q^r} + \tfrac{1}{q^r} \cdot \tfrac{v}{q^d} + \tfrac{1}{q^{r+d}} \cdot \tfrac{v}{q^d} + \tfrac{1}{q^{r+2d}} \cdot \tfrac{v}{q^d} + \dots \\ &= \tfrac{u}{q^r} + \tfrac{1}{q^r} \cdot \tfrac{v}{q^d} \left(1 + \tfrac{1}{q^d} + \tfrac{1}{q^{2d}} + \cdots\right) \\ &= \tfrac{u}{q^r} + \tfrac{1}{q^r} \cdot \tfrac{v}{q^d} \cdot \tfrac{q^d}{q^d - 1} \\ &= \tfrac{u}{q^r} + \tfrac{v}{q^r(q^d-1)}. \end{aligned}$$

Zatem istotnie $x = a_0 + \dfrac{u}{q^r} + \dfrac{v}{q^r(q^d - 1)}$. ⊠

Po prawej stronie wykazanej równości jest liczba wymierna. Udowodniliśmy więc następujące stwierdzenie.

4.4.2. *Jeśli q-rozwinięcie danej liczby rzeczywistej x jest okresowe, to x jest liczbą wymierną.*

Z faktów 4.4.1 i 4.2.4 wynika:

4.4.3. *Jeśli x jest liczbą wymierną, to jej q-rozwinięcie jest albo skończone, albo okresowe.* ([S50], [S68], [HW5]).

Często zakłada się, że rozwinięcie skończone jest również okresowe; okres ma wtedy dowolną długość i składa się z samych zer. Przy takim założeniu mamy:

4.4.4. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$. Następujące dwa warunki są równoważne:*

(1) *q-rozwinięcie liczby x posiada okres długości d;*

(2) *istnieją liczby całkowite c, r takie, że $r \geqslant 0$ oraz $x = \dfrac{c}{q^r(q^d-1)}$.*

D. Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2) wynika ze stwierdzenia 4.4.1. Wykażemy implikację (2) $\Rightarrow$ (1). Niech $x = \dfrac{c}{q^r(q^d-1)}$, gdzie $a, r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 0$. Istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite k i b takie, że $c = kq^r(q^d-1)+b$ oraz $0 \leqslant b < q^r(q^d-1)$. Mamy wtedy równość

$$x = k + \frac{b}{q^r(q^d-1)},$$

w której k jest liczbą całkowitą i b jest nieujemną liczbą całkowitą, mniejszą od $q^r(q^d-1)$. Jeśli $b = 0$, to x jest liczbą całkowitą i teza jest oczywista. Załóżmy, że b jest większe od zera i podzielmy b przez $q^d - 1$. Wtedy

$$b = u(q^d-1)+v,$$

gdzie u, v są nieujemnymi liczbami całkowitymi i przy tym $v < (q^d-1)$. Jeśli $v = 0$, to

$$x = k + \frac{u}{q^r}$$

i wtedy q-rozwinięcie liczby x jest skończone; ma więc okres (składający się z samych zer) długości d.

Załóżmy więc dalej, że $v > 0$. Wtedy $u < q^r$ (gdyż $u(q^d-1)+v = b < q^r(q^d-1)$). Jeśli $r = 0$, to liczba u jest równa zero. Przedstawmy liczby u i v w systemie numeracji o podstawie q. Niech

$$u = c_1q^{r-1} + c_2q^{r-2} + \cdots + c_{r-1}q + c_r, \quad v = b_1q^{d-1} + b_2q^{d-2} + \cdots + b_{d-1}q + b_d,$$

gdzie wszystkie liczby c_j, b_i są jednoznacznie wyznaczone i należą do zbioru $\{0, 1, \ldots, q-1\}$. Niech $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ będzie nieskończonym ciągiem takim, że

$$\begin{array}{rcll} a_0 & = & k, & \\ a_i & = & c_i, & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r, \\ a_{r+jd+i} & = & b_i, & \text{dla } j \in \mathbb{N}_0, i = 1, 2, \ldots, d. \end{array}$$

Wyraz a_0 jest liczbą całkowitą i wszystkie pozostałe wyrazy należą do zbioru $\{0, 1, \ldots, q-1\}$. Z nierówności $v < q^d - 1$ wynika, że co najmniej jedna z liczb $b_1, \ldots, b_d$ jest różna od $q-1$. Nieskończenie wiele wyrazów jest więc różnych od $q-1$. Zatem $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ jest normalnym q-ciągiem. Jest to ciąg posiadający okres długości d. Suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{q^n}$ jest (na mocy 4.4.1) równa $a_0 + \dfrac{u}{q^r} + \dfrac{v}{q^r(q^d-1)}$. Ale

$$a_0 + \frac{u(q^d-1)+v}{q^r(q^d-1)} = k + \frac{u(q^d-1)+v}{q^r(q^d-1)} = k + \frac{r}{q^r(q^d-1)} = \frac{c}{q^r(q^d-1)} = x;$$

q-rozwinięcie liczby x posiada więc okres długości d. ⊠

Załóżmy, że q-rozwinięcie $x = a_0 + \dfrac{a_1}{q} + \dfrac{a_2}{q^2} + \dfrac{a_3}{q^3} + \dots$ jest okresowe. Istnieją wtedy dwie liczby naturalne m, d takie, że

$$(**) \qquad a_{n+d} = a_n, \quad \text{dla } n \geqslant m.$$

Wśród wszystkich liczb naturalnych m, dla których przy pewnym naturalnym d spełniony jest warunek $(**)$, jest jedna najmniejsza; oznaczmy ją przez m_0. Mówimy wówczas, że okres rozpoczyna się od wyrazu a_{m_0}. Wśród wszystkich liczb naturalnych d, dla których przy pewnym naturalnym m spełniony jest warunek $(**)$, jest również jedna najmniejsza; oznaczmy ją przez d_0. Przy tak wybranych liczbach m_0 i d_0 mamy:

$$a_{n+d_0} = a_n,$$

dla wszystkich $n \geqslant m_0$ (patrz Twierdzenie 5 w [S50] strona 217). Skończony ciąg

$$\left(a_{m_0}, a_{m_0+1}, \dots, a_{m_0+d_0-1}\right)$$

nazywamy *okresem zasadniczym* tego okresowego rozwinięcia. Natomiast liczbę d_0 nazywamy *długością okresu zasadniczego*. Rozpatrywane rozwinięcie zapisujemy w postaci

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_{m_0-1} \left(a_{m_0} a_{m_0+1} \dots a_{m_0+d_0-1}\right)_q$$

lub w postaci

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_{m_0-1} \left(a_{m_0} a_{m_0+1} \dots a_{m_0+d_0-1}\right),$$

gdy $q = 10$. Jeśli $m_0 = 1$, to okres zasadniczy rozpoczyna się od wyrazu a_1. Mówimy wówczas, że dane rozwinięcie ma *okres czysty*. Gdy liczba m_0 jest większa od 1, wyrazy $a_1, a_2, \dots, a_{m_0-1}$ są tzw. *cyframi poprzedzającymi okres zasadniczy*.

W rozważanej sytuacji zmieńmy trochę oznaczenia. Liczbę $m_0 - 1$ oznaczmy przez r, a liczbę d_0 przez d. Ponadto, niech $b_1 = a_{m_0}$, $b_2 = a_{m_0+1}, \dots, b_d = a_{m_0+d_0-1}$. Przy takich oznaczeniach powyższe q-rozwinięcie liczby x ma postać:

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_r \left(b_1 b_2 \dots b_d\right)_q;$$

ciąg $(b_1, \dots, b_d)$ jest okresem zasadniczym, d jest długością okresu zasadniczego oraz $a_1, \dots, a_r$ (gdy $r \geqslant 1$) są cyframi poprzedzającymi okres zasadniczy. Wprowadźmy jeszcze dwa nowe pojęcia. Niech:

$$\begin{aligned} u &= a_1 q^{r-1} + a_2 q^{r-2} + \dots + a_{r-1} q + a_r, \\ v &= b_1 q^{d-1} + b_2 q^{d-2} + \dots + b_{d-1} q + b_d. \end{aligned}$$

Mówić będziemy, że v jest *liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego*. Natomiast u nazywać będziemy *liczbą poprzedzającą okres zasadniczy*. Jeśli $r = 0$, to przyjmujemy, że $u = 0$.

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{24}$ jest równe $0,041(6)$. W tym przypadku 41 jest liczbą poprzedzającą okres zasadniczy i 6 jest liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego. Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{27}$ jest równe $0,(037)$. W tym przypadku 0 jest liczbą poprzedzającą okres zasadniczy i 37 jest liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego.

Niech $x = \frac{a}{m}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a,m) = 1$. Wykazaliśmy (patrz stwierdzenie 4.2.4), że istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite a_0, u, v takie, że

$$x = a_0 + \frac{u}{q^r} + \frac{v}{q^r(q^d-1)}, \quad 0 \leqslant u < q^r, \quad 0 \leqslant v < q^d - 1,$$

gdzie $r = r_q(m)$, $d = d_q(m)$. Przypomnijmy, że jeśli m_1 jest q-kodzielnikiem i m_2 jest q-dzielnikiem liczby m, to $m = m_1m_2$, $r_q(m)$ jest najmniejszą nieujemną liczbą całkowitą r spełniającą warunek $m_2 \mid q^r$ oraz $d_q(m)$ jest najmniejszą liczbą naturalną d taką, że m_1 dzieli $q^d - 1$. Stwierdzenia 4.2.4 i 4.4.1 można teraz wysłowić następującym jednym twierdzeniem.

4.4.5. *Niech* $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ *oraz* $x = \frac{a}{m}$, *gdzie* $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a,m) = 1$. *Niech* $r = r_q(m)$, $d = d_q(m)$. *Istnieją wtedy jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite* a_0, u, v *takie, że*

$$\boxed{x = a_0 + \frac{u}{q^r} + \frac{v}{q^r(q^d-1)}, \quad 0 \leqslant u < q^r, \quad 0 \leqslant v < q^d - 1}\,.$$

Liczby a_0, u, v *są określone następująco:*

(1) a_0 *jest częścią całkowitą liczby* x*;*

(2) u *jest liczbą poprzedzającą okres zasadniczy* q*-rozwinięcia liczby* x*;*

(3) v *jest liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego* q*-rozwinięcia liczby* x.

Jest jasne, że jeśli w powyższym twierdzeniu liczba r jest równa zero, to $u = 0$, czyli wtedy q-rozwinięcie liczby x ma okres czysty. Mamy zatem:

4.4.6. *Niech* $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ *oraz* $x = \frac{a}{m}$, *gdzie* $a, m \in \mathbb{N}$, $a < m$, $\mathrm{nwd}(a,m) = 1$. *Okres* q*-rozwinięcia liczby* x *jest czysty wtedy i tylko wtedy, gdy* x *jest postaci*

$$x = \frac{v}{q^d - 1},$$

gdzie $d = d_q(m)$ *i* v *jest nieujemną liczbą całkowitą mniejszą od* $q^d - 1$.

Następne stwierdzenie wynika z 4.4.5 i 4.2.5.

4.4.7. *Niech* $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ *oraz* $x = \frac{a}{m}$, *gdzie* $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a,m) = 1$. *Niech* $d = d_q(m)$ *i niech*

$$v = b_1q^{d-1} + b_2q^{d-2} + \cdots + b_{d-1}q + b_d$$

będzie liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego q*-rozwinięcia liczby* x. *Wtedy:*

(1) *jeśli* $d = 1$, *to* $0 \leqslant v \leqslant q - 2$*;*

(2) *jeśli* $d = 1$ *i* $q = 2$, *to* $v = 0$*;*

(3) *jeśli* $d \geqslant 2$, *to* $v \neq 0$ *i wśród cyfr* $b_1, \ldots, b_d$ *są co najmniej dwie różne.*

Z 4.3.2 i 4.4.3 wynika:

4.4.8. *Niech $q \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną i niech x będzie niecałkowitą liczbą wymierną. Załóżmy, że $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$. Wówczas q-rozwinięcie liczby x jest okresowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba pierwsza p taka, że $p \mid m$ i $p \nmid q$.*

Z przedstawionych tutaj faktów oraz stwierdzeń udowodnionych w podrozdziale o q-dzielnikach i q-kodzielnikach wynika następujące stare twierdzenie o rozkładach okresowych.

4.4.9. *Niech $q \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną i niech $x = \frac{a}{m}$ będzie ułamkiem nieprzywiedlnym o mianowniku $m \geqslant 2$. Oznaczmy przez m_1 i m_2 odpowiednio q-kodzielnik i q-dzielnik liczby m.*

(1) *Rozwinięcie przy podstawie q liczby x jest okresowe wtedy i tylko wtedy, gdy $m_1 \geqslant 2$.*

(2) *Jeśli rozwinięcie to jest okresowe, to:*

(a) *liczba cyfr okresu zasadniczego jest równa $d_q(m)$, tzn. jest najmniejszą liczbą naturalną d taką, że $q^d \equiv 1 \pmod{m_1}$;*

(b) *liczba cyfr okresu zasadniczego jest dzielnikiem liczby $\varphi(m_1)$;*

(c) *liczba cyfr okresu zasadniczego jest dzielnikiem liczby $\varphi(m)$;*

(d) *liczba cyfr poprzedzających okres zasadniczy jest równa $r_q(m)$, tzn. jest najmniejszą nieujemną liczbą całkowitą r taką, że $m_2 \mid q^r$.*

(e) *okres jest czysty wtedy i tylko wtedy, gdy $m_2 = 1$, tzn. gdy $\mathrm{nwd}(m, q) = 1$.*

([S50], [S68], [HW5]).

Gdy $q = 10$, twierdzenie 4.4.9 ma następującą postać.

4.4.10. *Niech $x = \frac{a}{m}$ będzie ułamkiem nieprzywiedlnym o mianowniku $m \geqslant 2$. Oznaczmy przez m_1 i m_2 odpowiednio kodzielnik dziesiętny i dzielnik dziesiętny liczby m.*

(1) *Rozwinięcie dziesiętne liczby x jest okresowe wtedy i tylko wtedy, gdy $m_1 \geqslant 2$.*

(2) *Jeśli rozwinięcie to jest okresowe, to:*

(a) *liczba cyfr okresu zasadniczego jest równa $d_{10}(m)$, tzn. jest najmniejszą liczbą naturalną d taką, że $10^d \equiv 1 \pmod{b_1}$;*

(b) *liczba cyfr okresu zasadniczego jest dzielnikiem liczby $\varphi(m_1)$;*

(c) *liczba cyfr okresu zasadniczego jest dzielnikiem liczby $\varphi(m)$;*

(d) *liczba cyfr poprzedzających okres zasadniczy jest równa $r_{10}(m)$, tzn. jest równa $\max(\alpha, \beta)$, gdy $m_2 = 2^\alpha 5^\beta$;*

(e) *okres jest czysty wtedy i tylko wtedy, gdy $m_2 = 1$, tzn. gdy $\mathrm{nwd}(m, 10) = 1$.*

([S50], [S68], [HW5], [JaK] 52).

★ G. H. Hardy, E. M. Wright, *Terminating and recurring decimals*, [HW5] 109-111.
R. E. Green, *Primes and recurring decimals*, [MG] 47(359)(1963) 25-33.
C. Hsia, *Decimal expansion of fractions*, [Crux] 1997 285-290.
H. Rademacher, O. Toeplitz, *Okresy rozwinięć dziesiętnych liczb wymiernych*, [RaT] 182-200.
W. Sierpiński, *Rozwinięcia liczb wymiernych; ich okresowość*, [S50] 216-217.
W. Sierpiński, *Liczba cyfr nieregularnych i liczba cyfr okresu zasadniczego*, [S50] 219-224.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.5 Przykłady rozwinięć dziesiętnych ułamków prostych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale zajmować się będziemy rozwinięciami dziesiętnymi liczb postaci $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną.

4.5.1. *Rozwinięcia dziesiętne ułamków* $\frac{1}{n}$, *dla* $1 \leqslant n \leqslant 50$.

1/1	=	1	1/26	=	0, 0(384615)
1/2	=	0, 5	1/27	=	0, (037)
1/3	=	0, (3)	1/28	=	0, 03(571428)
1/4	=	0, 25	1/29	=	0, (0344827586206896551724137931)
1/5	=	0, 2	1/30	=	0, 0(3)
1/6	=	0, 1(6)	1/31	=	0, (032258064516129)
1/7	=	0, (142857)	1/32	=	0, 03125
1/8	=	0, 125	1/33	=	0, (03)
1/9	=	0, (1)	1/34	=	0, 0(2941176470588235)
1/10	=	0, 1	1/35	=	0, 0(285714)
1/11	=	0, (09)	1/36	=	0, 02(7)
1/12	=	0, 08(3)	1/37	=	0, (027)
1/13	=	0, (076923)	1/38	=	0, 0(263157894736842105)
1/14	=	0, 0(714285)	1/39	=	0, (025641)
1/15	=	0, 0(6)	1/40	=	0, 025
1/16	=	0, 0625	1/41	=	0, (02439)
1/17	=	0, (0588235294117647)	1/42	=	0, 0(238095)
1/18	=	0, 0(5)	1/43	=	0, (023255813953488372093)
1/19	=	0, (052631578947368421)	1/44	=	0, 02(27)
1/20	=	0, 05	1/45	=	0, 0(2)
1/21	=	0, (047619)	1/46	=	0, 0(2173913043478260869565)
1/22	=	0, 0(45)	1/47	=	0, (0212765957446808510638297872340425531914893617)
1/23	=	0, (0434782608695652173913)	1/48	=	0, 0208(3)
1/24	=	0, 041(6)	1/49	=	0, (020408163265306122448979591836734693877551)
1/25	=	0, 04	1/50	=	0, 02.

4.5.2. *Rozwinięcia dziesiętne ułamków* $\frac{1}{p}$, *dla liczb pierwszych* $50 < p < 130$.

1/53	=	0, (0188679245283)
1/59	=	0, (0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661)
1/61	=	0, (016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459)
1/67	=	0, (014925373134328358208955223880597)
1/71	=	0, (01408450704225352112676056338028169)
1/73	=	0, (01369863)
1/79	=	0, (0126582278481)
1/83	=	0, (01204819277108433734939759036144578313253)
1/89	=	0, (01123595505617977528089887640449438202247191)
1/97	=	0, (010309278350515463917525773195876288659793814432
		9896907216494845360824742268041237113402061855670)
1/101	=	0, (0099)
1/103	=	0, (0097087378640776699029126213592233)
1/107	=	0, (0093457943925233644859813084112149532710280373831775700)
1/109	=	0, (009174311926605504587155963302752293577981651376146788
		990825688073394495412844036697247706422018348623853211)
1/113	=	0, (0088495575221238938053097345132743362831858407079646017 6
		99115044247787610619469026548672566371681415929203539823)
1/127	=	0, (007874015748031496062992125984251968503937).

Przez $V(n)$ oznaczać będziemy długość okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{1}{n}$. Jeśli to rozwinięcie jest skończone, to przyjmować będziemy, że $V(n) = 0$. Przez $U(n)$ oznaczać będziemy liczbę cyfr (po przecinku) poprzedzających okres zasadniczy.

Mamy na przykład: $V(3) = 1$ i $U(3) = 0$, gdyż $\frac{1}{3} = 0,3333\cdots = 0,(3)$; okres zasadniczy składa się z jednej cyfry i nie ma cyfr po przecinku poprzedzających ten okres. Ponieważ $\frac{1}{22} = 0,045454545\cdots = 0,0(45)$, więc $V(22) = 2$ i $U(22) = 1$.

4.5.3 (Maple)**.** *Trójki* $(n, U(n), V(n))$ *dla* $n \leqslant 350$.

(1, 0, 0)	(51, 0, 16)	(101, 0, 4)	(151, 0, 75)	(201, 0, 33)	(251, 0, 50)	(301, 0, 42)
(2, 1, 0)	(52, 2, 6)	(102, 1, 16)	(152, 3, 18)	(202, 1, 4)	(252, 2, 6)	(302, 1, 75)
(3, 0, 1)	(53, 0, 13)	(103, 0, 34)	(153, 0, 16)	(203, 0, 84)	(253, 0, 22)	(303, 0, 4)
(4, 2, 0)	(54, 1, 3)	(104, 3, 6)	(154, 1, 6)	(204, 2, 16)	(254, 1, 42)	(304, 4, 18)
(5, 1, 0)	(55, 1, 2)	(105, 1, 6)	(155, 1, 15)	(205, 1, 5)	(255, 1, 16)	(305, 1, 60)
(6, 1, 1)	(56, 3, 6)	(106, 1, 13)	(156, 2, 6)	(206, 1, 34)	(256, 8, 0)	(306, 1, 16)
(7, 0, 6)	(57, 0, 18)	(107, 0, 53)	(157, 0, 78)	(207, 0, 22)	(257, 0, 256)	(307, 0, 153)
(8, 3, 0)	(58, 1, 28)	(108, 2, 3)	(158, 1, 13)	(208, 4, 6)	(258, 1, 21)	(308, 2, 6)
(9, 0, 1)	(59, 0, 58)	(109, 0, 108)	(159, 0, 13)	(209, 0, 18)	(259, 0, 6)	(309, 0, 34)
(10, 1, 0)	(60, 2, 1)	(110, 1, 2)	(160, 5, 0)	(210, 1, 6)	(260, 2, 6)	(310, 1, 15)
(11, 0, 2)	(61, 0, 60)	(111, 0, 3)	(161, 0, 66)	(211, 0, 30)	(261, 0, 28)	(311, 0, 155)
(12, 2, 1)	(62, 1, 15)	(112, 4, 6)	(162, 1, 9)	(212, 2, 13)	(262, 1, 130)	(312, 3, 6)
(13, 0, 6)	(63, 0, 6)	(113, 0, 112)	(163, 0, 81)	(213, 0, 35)	(263, 0, 262)	(313, 0, 312)
(14, 1, 6)	(64, 6, 0)	(114, 1, 18)	(164, 2, 5)	(214, 1, 53)	(264, 3, 2)	(314, 1, 78)
(15, 1, 1)	(65, 1, 6)	(115, 1, 22)	(165, 1, 2)	(215, 1, 21)	(265, 1, 13)	(315, 1, 6)
(16, 4, 0)	(66, 1, 2)	(116, 2, 28)	(166, 1, 41)	(216, 3, 3)	(266, 1, 18)	(316, 2, 13)
(17, 0, 16)	(67, 0, 33)	(117, 0, 6)	(167, 0, 166)	(217, 0, 30)	(267, 0, 44)	(317, 0, 79)
(18, 1, 1)	(68, 2, 16)	(118, 1, 58)	(168, 3, 6)	(218, 1, 108)	(268, 2, 33)	(318, 1, 13)
(19, 0, 18)	(69, 0, 22)	(119, 0, 48)	(169, 0, 78)	(219, 0, 8)	(269, 0, 268)	(319, 0, 28)
(20, 2, 0)	(70, 1, 6)	(120, 3, 1)	(170, 1, 16)	(220, 2, 2)	(270, 1, 3)	(320, 6, 0)
(21, 0, 6)	(71, 0, 35)	(121, 0, 22)	(171, 0, 18)	(221, 0, 48)	(271, 0, 5)	(321, 0, 53)
(22, 1, 2)	(72, 3, 1)	(122, 1, 60)	(172, 2, 21)	(222, 1, 3)	(272, 4, 16)	(322, 1, 66)
(23, 0, 22)	(73, 0, 8)	(123, 0, 5)	(173, 0, 43)	(223, 0, 222)	(273, 0, 6)	(323, 0, 144)
(24, 3, 1)	(74, 1, 3)	(124, 2, 15)	(174, 1, 28)	(224, 5, 6)	(274, 1, 8)	(324, 2, 9)
(25, 2, 0)	(75, 2, 1)	(125, 3, 0)	(175, 2, 6)	(225, 2, 1)	(275, 2, 2)	(325, 2, 6)
(26, 1, 6)	(76, 2, 18)	(126, 1, 6)	(176, 4, 2)	(226, 1, 112)	(276, 2, 22)	(326, 1, 81)
(27, 0, 3)	(77, 0, 6)	(127, 0, 42)	(177, 0, 58)	(227, 0, 113)	(277, 0, 69)	(327, 0, 108)
(28, 2, 6)	(78, 1, 6)	(128, 7, 0)	(178, 1, 44)	(228, 2, 18)	(278, 1, 46)	(328, 3, 5)
(29, 0, 28)	(79, 0, 13)	(129, 0, 21)	(179, 0, 178)	(229, 0, 228)	(279, 0, 15)	(329, 0, 138)
(30, 1, 1)	(80, 4, 0)	(130, 1, 6)	(180, 2, 1)	(230, 1, 22)	(280, 3, 6)	(330, 1, 2)
(31, 0, 15)	(81, 0, 9)	(131, 0, 130)	(181, 0, 180)	(231, 0, 6)	(281, 0, 28)	(331, 0, 110)
(32, 5, 0)	(82, 1, 5)	(132, 2, 2)	(182, 1, 6)	(232, 3, 28)	(282, 1, 46)	(332, 2, 41)
(33, 0, 2)	(83, 0, 41)	(133, 0, 18)	(183, 0, 60)	(233, 0, 232)	(283, 0, 141)	(333, 0, 3)
(34, 1, 16)	(84, 2, 6)	(134, 1, 33)	(184, 3, 22)	(234, 1, 6)	(284, 2, 35)	(334, 1, 166)
(35, 1, 6)	(85, 1, 16)	(135, 1, 3)	(185, 1, 3)	(235, 1, 46)	(285, 1, 18)	(335, 1, 33)
(36, 2, 1)	(86, 1, 21)	(136, 3, 16)	(186, 1, 15)	(236, 2, 58)	(286, 1, 6)	(336, 4, 6)
(37, 0, 3)	(87, 0, 28)	(137, 0, 8)	(187, 0, 16)	(237, 0, 13)	(287, 0, 30)	(337, 0, 336)
(38, 1, 18)	(88, 3, 2)	(138, 1, 22)	(188, 2, 46)	(238, 1, 48)	(288, 5, 1)	(338, 1, 78)
(39, 0, 6)	(89, 0, 44)	(139, 0, 46)	(189, 0, 6)	(239, 0, 7)	(289, 0, 272)	(339, 0, 112)
(40, 3, 0)	(90, 1, 1)	(140, 2, 6)	(190, 1, 18)	(240, 4, 1)	(290, 1, 28)	(340, 2, 16)
(41, 0, 5)	(91, 0, 6)	(141, 0, 46)	(191, 0, 95)	(241, 0, 30)	(291, 0, 96)	(341, 0, 30)
(42, 1, 6)	(92, 2, 22)	(142, 1, 35)	(192, 6, 1)	(242, 1, 22)	(292, 2, 8)	(342, 1, 18)
(43, 0, 21)	(93, 0, 15)	(143, 0, 6)	(193, 0, 192)	(243, 0, 27)	(293, 0, 146)	(343, 0, 294)
(44, 2, 2)	(94, 1, 46)	(144, 4, 1)	(194, 1, 96)	(244, 2, 60)	(294, 1, 42)	(344, 3, 21)
(45, 1, 1)	(95, 1, 18)	(145, 1, 28)	(195, 1, 6)	(245, 1, 42)	(295, 1, 58)	(345, 1, 22)
(46, 1, 22)	(96, 5, 1)	(146, 1, 8)	(196, 2, 42)	(246, 1, 5)	(296, 3, 3)	(346, 1, 43)
(47, 0, 46)	(97, 0, 96)	(147, 0, 42)	(197, 0, 98)	(247, 0, 18)	(297, 0, 6)	(347, 0, 173)
(48, 4, 1)	(98, 1, 42)	(148, 2, 3)	(198, 1, 2)	(248, 3, 15)	(298, 1, 148)	(348, 2, 28)
(49, 0, 42)	(99, 0, 2)	(149, 0, 148)	(199, 0, 99)	(249, 0, 41)	(299, 0, 66)	(349, 0, 116)
(50, 2, 0)	(100, 2, 0)	(150, 2, 1)	(200, 3, 0)	(250, 3, 0)	(300, 2, 1)	(350, 2, 6).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.6 Przykłady q-rozwinięć ułamków prostych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $q \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Przez $V_q(n)$ oznaczamy długość okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby $\frac{1}{n}$. Jeśli to rozwinięcie jest skończone, to przyjmujemy, że $V_q(n) = 0$. Przez $U_q(n)$ oznaczamy liczbę cyfr (po przecinku) poprzedzających okres zasadniczy q-rozwinięcia liczby $\frac{1}{n}$.

4.6.1 (Maple)**.** *Trójki* $(n, U_2(n), V_2(n))$ *dla* $n \leqslant 104$.

$(1,0,0)$	$(14,1,3)$	$(27,0,18)$	$(40,3,4)$	$(53,0,52)$	$(66,1,10)$	$(79,0,39)$	$(92,2,11)$
$(2,1,0)$	$(15,0,4)$	$(28,2,3)$	$(41,0,20)$	$(54,1,18)$	$(67,0,66)$	$(80,4,4)$	$(93,0,10)$
$(3,0,2)$	$(16,4,0)$	$(29,0,28)$	$(42,1,6)$	$(55,0,20)$	$(68,2,8)$	$(81,0,54)$	$(94,1,23)$
$(4,2,0)$	$(17,0,8)$	$(30,1,4)$	$(43,0,14)$	$(56,3,3)$	$(69,0,22)$	$(82,1,20)$	$(95,0,36)$
$(5,0,4)$	$(18,1,6)$	$(31,0,5)$	$(44,2,10)$	$(57,0,18)$	$(70,1,12)$	$(83,0,82)$	$(96,5,2)$
$(6,1,2)$	$(19,0,18)$	$(32,5,0)$	$(45,0,12)$	$(58,1,28)$	$(71,0,35)$	$(84,2,6)$	$(97,0,48)$
$(7,0,3)$	$(20,2,4)$	$(33,0,10)$	$(46,1,11)$	$(59,0,58)$	$(72,3,6)$	$(85,0,8)$	$(98,1,21)$
$(8,3,0)$	$(21,0,6)$	$(34,1,8)$	$(47,0,23)$	$(60,2,4)$	$(73,0,9)$	$(86,1,14)$	$(99,0,30)$
$(9,0,6)$	$(22,1,10)$	$(35,0,12)$	$(48,4,2)$	$(61,0,60)$	$(74,1,36)$	$(87,0,28)$	$(100,2,20)$
$(10,1,4)$	$(23,0,11)$	$(36,2,6)$	$(49,0,21)$	$(62,1,5)$	$(75,0,20)$	$(88,3,10)$	$(101,0,100)$
$(11,0,10)$	$(24,3,2)$	$(37,0,36)$	$(50,1,20)$	$(63,0,6)$	$(76,2,18)$	$(89,0,11)$	$(102,1,8)$
$(12,2,2)$	$(25,0,20)$	$(38,1,18)$	$(51,0,8)$	$(64,6,0)$	$(77,0,30)$	$(90,1,12)$	$(103,0,51)$
$(13,0,12)$	$(26,1,12)$	$(39,0,12)$	$(52,2,12)$	$(65,0,12)$	$(78,1,12)$	$(91,0,12)$	$(104,3,12)$.

4.6.2 (Maple)**.** *Trójki* $(n, U_3(n), V_3(n))$ *dla* $n \leqslant 104$.

$(1,0,0)$	$(14,0,6)$	$(27,3,0)$	$(40,0,4)$	$(53,0,52)$	$(66,1,5)$	$(79,0,78)$	$(92,0,22)$
$(2,0,1)$	$(15,1,4)$	$(28,0,6)$	$(41,0,8)$	$(54,3,1)$	$(67,0,22)$	$(80,0,4)$	$(93,1,30)$
$(3,1,0)$	$(16,0,4)$	$(29,0,28)$	$(42,1,6)$	$(55,0,20)$	$(68,0,16)$	$(81,4,0)$	$(94,0,23)$
$(4,0,2)$	$(17,0,16)$	$(30,1,4)$	$(43,0,42)$	$(56,0,6)$	$(69,1,11)$	$(82,0,8)$	$(95,0,36)$
$(5,0,4)$	$(18,2,1)$	$(31,0,30)$	$(44,0,10)$	$(57,1,18)$	$(70,0,12)$	$(83,0,41)$	$(96,1,8)$
$(6,1,1)$	$(19,0,18)$	$(32,0,8)$	$(45,2,4)$	$(58,0,28)$	$(71,0,35)$	$(84,1,6)$	$(97,0,48)$
$(7,0,6)$	$(20,0,4)$	$(33,1,5)$	$(46,0,11)$	$(59,0,29)$	$(72,2,2)$	$(85,0,16)$	$(98,0,42)$
$(8,0,2)$	$(21,1,6)$	$(34,0,16)$	$(47,0,23)$	$(60,1,4)$	$(73,0,12)$	$(86,0,42)$	$(99,2,5)$
$(9,2,0)$	$(22,0,5)$	$(35,0,12)$	$(48,1,4)$	$(61,0,10)$	$(74,0,18)$	$(87,1,28)$	$(100,0,20)$
$(10,0,4)$	$(23,0,11)$	$(36,2,2)$	$(49,0,42)$	$(62,0,30)$	$(75,1,20)$	$(88,0,10)$	$(101,0,100)$
$(11,0,5)$	$(24,1,2)$	$(37,0,18)$	$(50,0,20)$	$(63,2,6)$	$(76,0,18)$	$(89,0,88)$	$(102,1,16)$
$(12,1,2)$	$(25,0,20)$	$(38,0,18)$	$(51,1,16)$	$(64,0,16)$	$(77,0,30)$	$(90,2,4)$	$(103,0,34)$
$(13,0,3)$	$(26,0,3)$	$(39,1,3)$	$(52,0,6)$	$(65,0,12)$	$(78,1,3)$	$(91,0,6)$	$(104,0,6)$.

4.6.3 (Maple)**.** *Trójki* $(n, U_5(n), V_5(n))$ *dla* $n \leqslant 104$.

$(1,0,0)$	$(14,0,6)$	$(27,0,18)$	$(40,1,2)$	$(53,0,52)$	$(66,0,10)$	$(79,0,39)$	$(92,0,22)$
$(2,0,1)$	$(15,1,2)$	$(28,0,6)$	$(41,0,20)$	$(54,0,18)$	$(67,0,22)$	$(80,1,4)$	$(93,0,6)$
$(3,0,2)$	$(16,0,4)$	$(29,0,14)$	$(42,0,6)$	$(55,1,5)$	$(68,0,16)$	$(81,0,54)$	$(94,0,46)$
$(4,0,1)$	$(17,0,16)$	$(30,1,2)$	$(43,0,42)$	$(56,0,6)$	$(69,0,22)$	$(82,0,20)$	$(95,1,9)$
$(5,1,0)$	$(18,0,6)$	$(31,0,3)$	$(44,0,5)$	$(57,0,18)$	$(70,1,6)$	$(83,0,82)$	$(96,0,8)$
$(6,0,2)$	$(19,0,9)$	$(32,0,8)$	$(45,1,6)$	$(58,0,14)$	$(71,0,5)$	$(84,0,6)$	$(97,0,96)$
$(7,0,6)$	$(20,1,1)$	$(33,0,10)$	$(46,0,22)$	$(59,0,29)$	$(72,0,6)$	$(85,1,16)$	$(98,0,42)$
$(8,0,2)$	$(21,0,6)$	$(34,0,16)$	$(47,0,46)$	$(60,1,2)$	$(73,0,72)$	$(86,0,42)$	$(99,0,30)$
$(9,0,6)$	$(22,0,5)$	$(35,1,6)$	$(48,0,4)$	$(61,0,30)$	$(74,0,36)$	$(87,0,14)$	$(100,2,1)$
$(10,1,1)$	$(23,0,22)$	$(36,0,6)$	$(49,0,42)$	$(62,0,3)$	$(75,2,2)$	$(88,0,10)$	$(101,0,25)$
$(11,0,5)$	$(24,0,2)$	$(37,0,36)$	$(50,2,1)$	$(63,0,6)$	$(76,0,9)$	$(89,0,44)$	$(102,0,16)$
$(12,0,2)$	$(25,2,0)$	$(38,0,9)$	$(51,0,16)$	$(64,0,16)$	$(77,0,30)$	$(90,1,6)$	$(103,0,102)$
$(13,0,4)$	$(26,0,4)$	$(39,0,4)$	$(52,0,4)$	$(65,1,4)$	$(78,0,4)$	$(91,0,12)$	$(104,0,4)$.

4.6.4 (Maple). *Trójki* $(n, U_6(n), V_6(n))$ *dla* $n \leqslant 104$.

(1, 0, 0)	(14, 1, 2)	(27, 3, 0)	(40, 3, 1)	(53, 0, 26)	(66, 1, 10)	(79, 0, 78)	(92, 2, 11)
(2, 1, 0)	(15, 1, 1)	(28, 2, 2)	(41, 0, 40)	(54, 3, 0)	(67, 0, 33)	(80, 4, 1)	(93, 1, 6)
(3, 1, 0)	(16, 4, 0)	(29, 0, 14)	(42, 1, 2)	(55, 0, 10)	(68, 2, 16)	(81, 4, 0)	(94, 1, 23)
(4, 2, 0)	(17, 0, 16)	(30, 1, 1)	(43, 0, 3)	(56, 3, 2)	(69, 1, 11)	(82, 1, 40)	(95, 0, 9)
(5, 0, 1)	(18, 2, 0)	(31, 0, 6)	(44, 2, 10)	(57, 1, 9)	(70, 1, 2)	(83, 0, 82)	(96, 5, 0)
(6, 1, 0)	(19, 0, 9)	(32, 5, 0)	(45, 2, 1)	(58, 1, 14)	(71, 0, 35)	(84, 2, 2)	(97, 0, 12)
(7, 0, 2)	(20, 2, 1)	(33, 1, 10)	(46, 1, 11)	(59, 0, 58)	(72, 3, 0)	(85, 0, 16)	(98, 1, 14)
(8, 3, 0)	(21, 1, 2)	(34, 1, 16)	(47, 0, 23)	(60, 2, 1)	(73, 0, 36)	(86, 1, 3)	(99, 2, 10)
(9, 2, 0)	(22, 1, 10)	(35, 0, 2)	(48, 4, 0)	(61, 0, 60)	(74, 1, 4)	(87, 1, 14)	(100, 2, 5)
(10, 1, 1)	(23, 0, 11)	(36, 2, 0)	(49, 0, 14)	(62, 1, 6)	(75, 1, 5)	(88, 3, 10)	(101, 0, 10)
(11, 0, 10)	(24, 3, 0)	(37, 0, 4)	(50, 1, 5)	(63, 2, 2)	(76, 2, 9)	(89, 0, 88)	(102, 1, 16)
(12, 2, 0)	(25, 0, 5)	(38, 1, 9)	(51, 1, 16)	(64, 6, 0)	(77, 0, 10)	(90, 2, 1)	(103, 0, 102)
(13, 0, 12)	(26, 1, 12)	(39, 1, 12)	(52, 2, 12)	(65, 0, 12)	(78, 1, 12)	(91, 0, 12)	(104, 3, 12).

4.6.5 (Maple). *Trójki* $(n, U_7(n), V_7(n))$ *dla* $n \leqslant 104$.

(1, 0, 0)	(14, 1, 1)	(27, 0, 9)	(40, 0, 4)	(53, 0, 26)	(66, 0, 10)	(79, 0, 78)	(92, 0, 22)
(2, 0, 1)	(15, 0, 4)	(28, 1, 2)	(41, 0, 40)	(54, 0, 9)	(67, 0, 66)	(80, 0, 4)	(93, 0, 15)
(3, 0, 1)	(16, 0, 2)	(29, 0, 7)	(42, 1, 1)	(55, 0, 20)	(68, 0, 16)	(81, 0, 27)	(94, 0, 23)
(4, 0, 2)	(17, 0, 16)	(30, 0, 4)	(43, 0, 6)	(56, 1, 2)	(69, 0, 22)	(82, 0, 40)	(95, 0, 12)
(5, 0, 4)	(18, 0, 3)	(31, 0, 15)	(44, 0, 10)	(57, 0, 3)	(70, 1, 4)	(83, 0, 41)	(96, 0, 4)
(6, 0, 1)	(19, 0, 3)	(32, 0, 4)	(45, 0, 12)	(58, 0, 7)	(71, 0, 70)	(84, 1, 2)	(97, 0, 96)
(7, 1, 0)	(20, 0, 4)	(33, 0, 10)	(46, 0, 22)	(59, 0, 29)	(72, 0, 6)	(85, 0, 16)	(98, 2, 1)
(8, 0, 2)	(21, 1, 1)	(34, 0, 16)	(47, 0, 23)	(60, 0, 4)	(73, 0, 24)	(86, 0, 6)	(99, 0, 30)
(9, 0, 3)	(22, 0, 10)	(35, 1, 4)	(48, 0, 2)	(61, 0, 60)	(74, 0, 9)	(87, 0, 7)	(100, 0, 4)
(10, 0, 4)	(23, 0, 22)	(36, 0, 6)	(49, 2, 0)	(62, 0, 15)	(75, 0, 4)	(88, 0, 10)	(101, 0, 100)
(11, 0, 10)	(24, 0, 2)	(37, 0, 9)	(50, 0, 4)	(63, 1, 3)	(76, 0, 6)	(89, 0, 88)	(102, 0, 16)
(12, 0, 2)	(25, 0, 4)	(38, 0, 3)	(51, 0, 16)	(64, 0, 8)	(77, 1, 10)	(90, 0, 12)	(103, 0, 51)
(13, 0, 12)	(26, 0, 12)	(39, 0, 12)	(52, 0, 12)	(65, 0, 12)	(78, 0, 12)	(91, 1, 12)	(104, 0, 12).

4.6.6 (Maple). *Trójki* $(n, U_{11}(n), V_{11}(n))$ *dla* $n \leqslant 104$.

(1, 0, 0)	(14, 0, 3)	(27, 0, 18)	(40, 0, 2)	(53, 0, 26)	(66, 1, 2)	(79, 0, 39)	(92, 0, 22)
(2, 0, 1)	(15, 0, 2)	(28, 0, 6)	(41, 0, 40)	(54, 0, 18)	(67, 0, 66)	(80, 0, 4)	(93, 0, 30)
(3, 0, 2)	(16, 0, 4)	(29, 0, 28)	(42, 0, 6)	(55, 1, 1)	(68, 0, 16)	(81, 0, 54)	(94, 0, 46)
(4, 0, 2)	(17, 0, 16)	(30, 0, 2)	(43, 0, 7)	(56, 0, 6)	(69, 0, 22)	(82, 0, 40)	(95, 0, 3)
(5, 0, 1)	(18, 0, 6)	(31, 0, 30)	(44, 1, 2)	(57, 0, 6)	(70, 0, 3)	(83, 0, 41)	(96, 0, 8)
(6, 0, 2)	(19, 0, 3)	(32, 0, 8)	(45, 0, 6)	(58, 0, 28)	(71, 0, 70)	(84, 0, 6)	(97, 0, 48)
(7, 0, 3)	(20, 0, 2)	(33, 1, 2)	(46, 0, 22)	(59, 0, 58)	(72, 0, 6)	(85, 0, 16)	(98, 0, 21)
(8, 0, 2)	(21, 0, 6)	(34, 0, 16)	(47, 0, 46)	(60, 0, 2)	(73, 0, 72)	(86, 0, 7)	(99, 1, 6)
(9, 0, 6)	(22, 1, 1)	(35, 0, 3)	(48, 0, 4)	(61, 0, 4)	(74, 0, 6)	(87, 0, 28)	(100, 0, 10)
(10, 0, 1)	(23, 0, 22)	(36, 0, 6)	(49, 0, 21)	(62, 0, 30)	(75, 0, 10)	(88, 1, 2)	(101, 0, 100)
(11, 1, 0)	(24, 0, 2)	(37, 0, 6)	(50, 0, 5)	(63, 0, 6)	(76, 0, 6)	(89, 0, 22)	(102, 0, 16)
(12, 0, 2)	(25, 0, 5)	(38, 0, 3)	(51, 0, 16)	(64, 0, 16)	(77, 1, 3)	(90, 0, 6)	(103, 0, 102)
(13, 0, 12)	(26, 0, 12)	(39, 0, 12)	(52, 0, 12)	(65, 0, 12)	(78, 0, 12)	(91, 0, 12)	(104, 0, 12).

4.6.7 (Maple). *Trójki* $(n, U_{12}(n), V_{12}(n))$ *dla* $n \leqslant 104$.

(1, 0, 0)	(14, 1, 6)	(27, 3, 0)	(40, 2, 4)	(53, 0, 52)	(66, 1, 1)	(79, 0, 26)	(92, 1, 11)
(2, 1, 0)	(15, 1, 4)	(28, 1, 6)	(41, 0, 40)	(54, 3, 0)	(67, 0, 66)	(80, 2, 4)	(93, 1, 30)
(3, 1, 0)	(16, 2, 0)	(29, 0, 4)	(42, 1, 6)	(55, 0, 4)	(68, 1, 16)	(81, 4, 0)	(94, 1, 23)
(4, 1, 0)	(17, 0, 16)	(30, 1, 4)	(43, 0, 42)	(56, 2, 6)	(69, 1, 11)	(82, 1, 40)	(95, 0, 12)
(5, 0, 4)	(18, 2, 0)	(31, 0, 30)	(44, 1, 1)	(57, 1, 6)	(70, 1, 12)	(83, 0, 41)	(96, 3, 0)
(6, 1, 0)	(19, 0, 6)	(32, 3, 0)	(45, 2, 4)	(58, 1, 4)	(71, 0, 35)	(84, 1, 6)	(97, 0, 16)
(7, 0, 6)	(20, 1, 4)	(33, 1, 1)	(46, 1, 11)	(59, 0, 29)	(72, 2, 0)	(85, 0, 16)	(98, 1, 42)
(8, 2, 0)	(21, 1, 6)	(34, 1, 16)	(47, 0, 23)	(60, 1, 4)	(73, 0, 36)	(86, 1, 42)	(99, 2, 1)
(9, 2, 0)	(22, 1, 1)	(35, 0, 12)	(48, 2, 0)	(61, 0, 15)	(74, 1, 9)	(87, 1, 4)	(100, 1, 20)
(10, 1, 4)	(23, 0, 11)	(36, 2, 0)	(49, 0, 42)	(62, 1, 30)	(75, 1, 20)	(88, 2, 1)	(101, 0, 100)
(11, 0, 1)	(24, 2, 0)	(37, 0, 9)	(50, 1, 20)	(63, 2, 6)	(76, 1, 6)	(89, 0, 8)	(102, 1, 16)
(12, 1, 0)	(25, 0, 20)	(38, 1, 6)	(51, 1, 16)	(64, 3, 0)	(77, 0, 6)	(90, 2, 4)	(103, 0, 102)
(13, 0, 2)	(26, 1, 2)	(39, 1, 2)	(52, 1, 2)	(65, 0, 4)	(78, 1, 2)	(91, 0, 6)	(104, 2, 2).

4.6.8. *Ułamki* $\frac{1}{n}$ *i ich* 2*-rozwinięcia.*

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
1/1 & = & 1 & 1/15 & = & 0,(0001)_2 \\
1/2 & = & 0,1_2 & 1/16 & = & 0,0001_2 \\
1/3 & = & 0,(01)_2 & 1/17 & = & 0,(00001111)_2 \\
1/4 & = & 0,01_2 & 1/18 & = & 0,0(000111)_2 \\
1/5 & = & 0,(0011)_2 & 1/19 & = & 0,(000011010111100101)_2 \\
1/6 & = & 0,0(01)_2 & 1/20 & = & 0,00(0011)_2 \\
1/7 & = & 0,(001)_2 & 1/21 & = & 0,(000011)_2 \\
1/8 & = & 0,001_2 & 1/22 & = & 0,0(0001011101)_2 \\
1/9 & = & 0,(000111)_2 & 1/23 & = & 0,(00001011001)_2 \\
1/10 & = & 0,0(0011)_2 & 1/24 & = & 0,000(01)_2 \\
1/11 & = & 0,(0001011101)_2 & 1/25 & = & 0,(00001010001111010111)_2 \\
1/12 & = & 0,00(01)_2 & 1/26 & = & 0,0(000100111011)_2 \\
1/13 & = & 0,(000100111011)_2 & 1/27 & = & 0,(000010010111101101)_2 \\
1/14 & = & 0,0(001)_2 & 1/28 & = & 0,00(001)_2.
\end{array}$$

4.6.9. *Ułamki* $\frac{1}{n}$ *i ich* 3*-rozwinięcia.*

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
1/1 & = & 1 & 1/15 & = & 0,0(0121)_3 \\
1/2 & = & 0,(1)_3 & 1/16 & = & 0,(0012)_3 \\
1/3 & = & 0,1_3 & 1/17 & = & 0,(0011202122110201)_3 \\
1/4 & = & 0,(02)_3 & 1/18 & = & 0,00(1)_3 \\
1/5 & = & 0,(0121)_3 & 1/19 & = & 0,(001102100221120122)_3 \\
1/6 & = & 0,0(1)_3 & 1/20 & = & 0,(0011)_3 \\
1/7 & = & 0,(010212)_3 & 1/21 & = & 0,0(010212)_3 \\
1/8 & = & 0,(01)_3 & 1/22 & = & 0,(00102)_3 \\
1/9 & = & 0,01_3 & 1/23 & = & 0,(00101120021)_3 \\
1/10 & = & 0,(0022)_3 & 1/24 & = & 0,0(01)_3 \\
1/11 & = & 0,(00211)_3 & 1/25 & = & 0,(00100201102212202112)_3 \\
1/12 & = & 0,0(02)_3 & 1/26 & = & 0,(001)_3 \\
1/13 & = & 0,(002)_3 & 1/27 & = & 0,001_3 \\
1/14 & = & 0,(001221)_3 & 1/28 & = & 0,(000222)_3.
\end{array}$$

4.6.10. *Ułamki* $\frac{1}{n}$ *i ich* 5*-rozwinięcia.*

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
1/1 & = & 1 & 1/15 & = & 0,0(13)_5 \\
1/2 & = & 0,(2)_5 & 1/16 & = & 0,(0124)_5 \\
1/3 & = & 0,(13)_5 & 1/17 & = & 0,(0121340243231042)_5 \\
1/4 & = & 0,(1)_5 & 1/18 & = & 0,(011433)_5 \\
1/5 & = & 0,1_5 & 1/19 & = & 0,(011242141)_5 \\
1/6 & = & 0,(04)_5 & 1/20 & = & 0,0(1)_5 \\
1/7 & = & 0,(032412)_5 & 1/21 & = & 0,(010434)_5 \\
1/8 & = & 0,(03)_5 & 1/22 & = & 0,(01032)_5 \\
1/9 & = & 0,(023421)_5 & 1/23 & = & 0,(0102041332143424031123)_5 \\
1/10 & = & 0,0(2)_5 & 1/24 & = & 0,(01)_5 \\
1/11 & = & 0,(02114)_5 & 1/25 & = & 0,01_5 \\
1/12 & = & 0,(02)_5 & 1/26 & = & 0,(0044)_5 \\
1/13 & = & 0,(0143)_5 & 1/27 & = & 0,(004303322440141122)_5 \\
1/14 & = & 0,(013431)_5 & 1/28 & = & 0,(004213)_5.
\end{array}$$

Literatura

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[HW5] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1979.

[JaK] R. Jajte, W. Krysicki, *Z matematyką za pan brat*, Iskry, Warszawa, 1985.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[N-1] A. Nowicki, *Liczby Wymierne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.1, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2008; Wydanie drugie 2012.

[N-4] A. Nowicki, *Liczby Pierwsze*, Podróże po Imperium Liczb, cz.4, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2009; Wydanie drugie 2012.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[RaT] H. Rademacher, O. Toeplitz, *O Liczbach i Figurach*, PWN, Warszawa, 1956.

[S50] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa - Wrocław, 1950.

[S57] W. Sierpiński, *Czym Zajmuje się Teoria Liczb*, Warszawa, 1957.

[S68] W. Sierpiński, *Arytmetyka Teoretyczna*, (wydanie 4), Biblioteka Matematyczna 7, PWN, Warszawa, 1968.

[Wino] I. Winogradow, *Elementy Teorii Liczb*, PWN, Warszawa, 1954.