Podróże po Imperium Liczb

Część 08. Liczby Mersenne'a, Fermata i Inne Liczby

Rozdział 5

5. Okresy rozwinięć liczb wymiernych

Andrzej Nowicki 20 maja 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

5 Okresy rozwinięć liczb wymiernych

5.1 Specjalne liczby pierwsze

Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$. Wiemy (patrz 4.4.9), że jeśli q-rozwinięcie ułamka $\frac{1}{n}$ jest okresowe, to długość okresu zasadniczego (czyli liczba $d_q(n)$) jest dzielnikiem liczby $\varphi(n)$. W szczególności, gdy $n = p$ jest liczbą pierwszą, długość tego okresu jest dzielnikiem liczby $p-1$. W tym przypadku okres zasadniczy może mieć długość co najwyżej równą $p-1$.

Mówić będziemy, że dana liczba pierwsza p jest *q-specjalna*, jeśli q-rozwinięcie liczby $\frac{1}{p}$ jest okresowe i długość okresu zasadniczego jest równa $p-1$.

Mówić będziemy, że dana liczba pierwsza p jest *specjalna*, jeśli jest 10-specjalna, tzn. jeśli rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{1}{p}$ jest okresowe i $p-1$ jest długością okresu zasadniczego. Spójrzmy na rozwinięcia dziesiętne ułamków $\frac{1}{7}$ i $\frac{1}{17}$:

$$\frac{1}{7} = 0,(142857), \quad \frac{1}{17} = 0,(0588235294117647).$$

Okresy zasadnicze tych rozwinięć mają długości równe odpowiednio $6 = 7-1$ i $16 = 17-1$. Liczby pierwsze 7 i 17 są więc specjalne. Rozważanej własności nie posiada, na przykład, liczba pierwsza 11. Mamy tutaj $\frac{1}{11} = 0,(09)$; okres zasadniczy ma długość 2, a $11 - 1 = 10 \neq 2$. Liczba pierwsza 11 nie jest więc specjalna.

5.1.1 (Maple)**.** *Wszystkie specjalne liczby pierwsze mniejsze od* 1000 :

7	17	19	23	29	47	59	61	97	109
113	131	149	167	179	181	193	223	229	233
257	263	269	313	337	367	379	383	389	419
433	461	487	491	499	503	509	541	571	577
593	619	647	659	701	709	727	743	811	821
823	857	863	887	937	941	953	971	977	983

5.1.2. *Istnieje dokładnie* 8 *specjalnych liczb pierwszych p takich, że* $1900 < p < 2100$. *Są to liczby pierwsze:* 1913, 1949, 1979, 2017, 2029, 2063, 2069, 2099. (Maple).

5.1.3 (Maple)**.** *Wszystkie q-specjalne liczby pierwsze z przedziału* $(1900, 2100)$*, dla* $q < 10$:

$q = 2$ 1901, 1907, 1931, 1949, 1973, 1979, 1987, 1997, 2027, 2029, 2053, 2069, 2083, 2099;
$q = 3$ 1901, 1913, 1949, 1951, 1973, 1987, 1997, 1999, 2011, 2069, 2081, 2083;
$q = 5$ 1907, 1913, 1933, 1987, 1993, 1997, 2003, 2017, 2027, 2053, 2063, 2083, 2087;
$q = 6$ 1907, 1913, 1979, 1999, 2027, 2029, 2053, 2081, 2099;
$q = 7$ 1949, 1973, 1993, 2003, 2011, 2027, 2039, 2083, 2087, 2089;
$q = 8$ 1901, 1907, 1931, 1949, 1973, 1979, 1997, 2027, 2069, 2099.

5.1.4 (Maple). *Wszystkie q-specjalne liczby pierwsze mniejsze od 100 dla pewnych q :*

$$
\begin{array}{ll}
q=2: & 3,5,11,13,19,29,37,53,59,61,67,83; \\
q=3: & 2,5,7,17,19,29,31,43,53,79,89; \\
q=5: & 2,3,7,17,23,37,43,47,53,73,83,97; \\
q=6: & 11,13,17,41,59,61,79,83,89; \\
q=7: & 2,5,11,13,17,23,41,61,67,71,79,89,97; \\
q=8: & 3,5,11,29,53,59,83; \\
q=10: & 7,17,19,23,29,47,59,61,97; \\
q=11: & 2,3,13,17,23,29,31,41,47,59,67,71,73; \\
q=12: & 5,7,17,31,41,43,53,67; \\
q=13: & 2,5,11,19,31,37,41,47,59,67,71,73,83,89,97; \\
q=14: & 3,17,19,23,29,53,59,73,83,89,97; \\
q=15: & 2,13,19,23,29,37,41,47,73,83,89,97; \\
q=17: & 2,3,5,7,11,23,31,37,41,61,97; \\
q=18: & 5,11,29,37,43,53,59,61,67,83; \\
q=19: & 2,7,11,13,23,29,37,41,43,47,53,83,89; \\
q=20: & 3,13,17,23,37,43,47,53,67,73,83.
\end{array}
$$

Pojawią się teraz symbole Legendre'a. Definicje i podstawowe własności tych symboli można znaleźć w różnych książkach z elementarnej teorii liczb (na przykład: [S50], [Wino], [HW5]). W [N-3] znajduje się oddzielny podrozdział o tych symbolach.

5.1.5. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{P}$. Jeśli liczba pierwsza $p \geqslant 3$ jest q-specjalna, to q nie jest podzielne przez p oraz*

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -1.$$

D. Załóżmy, że $p \geqslant 3$ jest q-specjalną liczbą pierwszą.

Przypuśćmy, że $p \mid q$. Niech $q = pa$, $a \in \mathbb{N}$, $a < q$. Wtedy $\frac{1}{p} = \frac{a}{q}$. Z równości tej wynika, że normalne rozwinięcie o podstawie q liczby $\frac{1}{p}$ jest skończone: $\frac{1}{p} = 0, a_q$. Zatem $p \nmid q$.

Symbol Legendre'a $\left(\frac{q}{p}\right)$ jest liczbą równą albo 1, albo -1. Wiemy ponadto, że zawsze zachodzi kongruencja

$$\left(\frac{q}{p}\right) \equiv q^{p_1} \pmod{p},$$

gdzie $p_1 = \frac{p-1}{2}$. Przypuśćmy, że $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$. Wtedy $p \mid q^{p_1} - 1$ i mamy sprzeczność:

$$p - 1 = d_q(p) \leqslant p_1 = \frac{p-1}{2}.$$

Zatem $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. ⊠

Z powyższego stwierdzenia wynika:

5.1.6. *Jeśli liczba pierwsza $p \geqslant 7$ jest specjalna, to symbol Legendre'a $\left(\frac{10}{p}\right)$ jest równy -1.*

Implikacja w przeciwnym kierunku nie musi być prawdziwa. Istnieją liczby pierwsze $p \geqslant 7$, z symbolem Legendre'a $\left(\frac{10}{p}\right)$ równym -1, które nie są specjalne. Takimi są, na przykład, liczby pierwsze 11 i 73. Wartości symbolu $\left(\frac{10}{p}\right)$ są dobrze znane:

5.1.7. *Jeśli $p \geqslant 7$ jest liczbą pierwszą, to*

$$\left(\frac{10}{p}\right) = \begin{cases} -1, & \textit{gdy } p \equiv r \pmod{40}, \ \textit{gdzie } r \in \{7, 9, 11, 17, 21, 23, 29, 33\}, \\ 1, & \textit{gdy } p \equiv r \pmod{40}, \ \textit{gdzie } r \in \{1, 3, 13, 19, 27, 31, 37, 39\}. \end{cases}$$

Mamy zatem:

5.1.8. *Żadna liczba pierwsza postaci $40k+1$ nie jest specjalna. To samo dotyczy liczb pierwszych postaci: $40k+3$, $40k+13$, $40k+19$, $40k+27$, $40k+31$, $40k+37$ i $40k+39$.*

5.1.9. *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych niespecjalnych.*

D. Wynika to z poprzedniego faktu i znanego twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym. ⊠

Czy dla każdej podstawy $q \geqslant 2$ istnieje chociaż jedna liczba pierwsza q-specjalna? Przypuśćmy, że jedna istnieje. Czy wtedy jest ich nieskończenie wiele? Mało wiadomo na ten temat.

5.1.10. *Załóżmy, że podstawa $q \geqslant 2$ jest liczbą kwadratową. Jeśli q jest parzyste, to nie istnieje żadna q-specjalna liczba pierwsza. Jeśli q jest nieparzyste, to jedyną q-specjalną liczbą pierwszą jest liczba* 2.

D. Niech $q = a^2$, $2 \leqslant a \in \mathbb{N}$ i przypuśćmy, że $p \geqslant 3$ jest q-specjalną liczbą pierwszą. Wtedy $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ (patrz 5.1.5). Ale

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{a^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)^2 = (\pm 1)^2 = 1.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność: $-1 = 1$. Nie ma zatem żadnych nieparzystych q-specjalnych liczb pierwszych.

Pozostaje do zbadania tylko liczba pierwsza $p = 2$. Jeśli q jest parzyste, to q-rozwinięcie ułamka $\frac{1}{2}$ jest oczywiście skończone; w tym przypadku liczba pierwsza 2 nie jest więc q-specjalna. Jeśli natomiast q jest nieparzyste, to mamy q-rozwinięcie okresowe

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{q} + \frac{c}{q^2} + \frac{c}{q^3} + \cdots,$$

gdzie $c = \frac{q-1}{2}$. Długość okresu zasadniczego jest równa $1 = 2 - 1$. W tym przypadku liczba pierwsza 2 jest q-specjalna. ⊠

5.1.11 (Hipoteza Artina)**.** *Dla każdej niekwadratowej liczby $q \geqslant 2$ istnieje nieskończenie wiele q-specjalnych liczb pierwszych.* ([Gy04] 376).

Załóżmy, że $m \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą naturalną i a jest liczbą naturalną względnie pierwszą z m. Wiemy (twierdzenie Eulera), że wtedy $m \mid a^{\varphi(m)} - 1$. Jeśli spełniony jest jeszcze warunek:

$$m \nmid a^r - 1, \quad \text{dla } 1 \leqslant r < \varphi(m),$$

(czyli jeśli $\varphi(m)$ jest najmniejszą liczbą naturalną r taką, że $m \mid a^r - 1$), to mówi się ([S50], [Wino], [HW5]), że a jest *pierwiastkiem pierwotnym* liczby m. Z własności okresów zasadniczych, przedstawionych w poprzednich podrozdziałach, wynika zatem następujące stwierdzenie.

5.1.12. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{P}$. Liczba pierwsza p jest q-specjalna wtedy i tylko wtedy, gdy q jest pierwiastkiem pierwotnym liczby p.* ([HW5] 115).

Wiadomo (patrz na przykład [S50] str. 183-186), że każda liczba pierwsza posiada pierwiastek pierwotny. Mamy zatem:

5.1.13. *Dla każdej liczby pierwszej p istnieje liczba naturalna $q \geqslant 2$ taka, że liczba p jest q-specjalna. Innymi słowy, dla każdej liczby pierwszej p istnieje podstawa $q \geqslant 2$ taka, że długość okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby $\frac{1}{p}$ wynosi $p-1$.*

Wiemy (patrz na przykład 4.4.9), że długości okresów zasadniczych q-rozwinięć liczby wymiernej x zależą tylko od mianownika liczby x. Mamy zatem:

5.1.14. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$. Niech p będzie q-kodzielnikiem mianownika m. Jeśli p jest q-specjalną liczbą pierwszą, to długość okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x jest równa $p-1$.*

5.1.15. *Niech $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$. Niech p będzie kodzielnikiem dziesiętnym mianownika m. Jeśli p jest specjalną liczbą pierwszą, to długość okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x jest równa $p-1$.*

Zajmowaliśmy się takimi liczbami pierwszymi p, których odwrotności mają rozwinięcia dziesiętne o okresie zasadniczym równym $\varphi(p)$. Istnieją również liczby złożone posiadające tę własność.

5.1.16. *Jeśli $m \geqslant 3$ jest taką nieparzystą liczbą naturalną, że rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{1}{m}$ ma okres zasadniczy o długości $\varphi(m)$, to m jest potęgą nieparzystej liczby pierwszej, różnej od 5.* ([Mon] 62(7)(1955) 485).

5.1.17. *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych m, których odwrotności mają rozwinięcie dziesiętne o okresie zasadniczym długości $\varphi(m)$.* ([Mon] 62(7)(1955) 485).

D. Własność tę posiadają wszystkie potęgi siódemki (patrz 5.2.4). ⊠

★ H. T. R. Aude, *Intrinsic decimals*, Mathematics News Letter, 8(1)(1933) 8-12.
G. H. Hardy, E. M. Wright, *Decimals with the maximum period*, [HW5] 114-115.
J. McGiffert, *Intrinsic decimals*, Mathematics News Letter, 7(3)(1932) 7-10.
K. S. Rao, *A note on the recurring period...*, [Mon] 62(7)(1955) 484-487.
D. Shanks, *Artin's conjectures*, [Shan] 80-83, 222-225.
D. Singh, *Concerning the reciprocal of a prime*, [Mon] 61(1)(1954) 32-34.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.2 Długość okresu zasadniczego

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$. Jeśli x jest liczbą wymierną, to przez $D_q(x)$ oznaczać będziemy długość okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x. W przypadku gdy $q = 10$, długość tę oznaczać będziemy przez $D(x)$. Jeśli rozwinięcie to jest skończone, to przyjmujemy, że $D_q(x) = 1$.

Wiemy, że $D_q(x)$ zależy tylko od mianownika liczby x. Niech $x = \frac{a}{m}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\text{nwd}(a, m) = 1$ i oznaczmy przez m_1 i m_2 odpowiednio q-kodzielnik i q-dzielnik liczby m. Przypomnijmy (patrz 4.4.9), że

$$D_q(x) = d_q(m),$$

tzn. $D_q(x)$ jest najmniejszą liczbą naturalną d taką, że $m_1 \mid q^d - 1$. Stąd wynika, że długości okresów zasadniczych q-rozwinięć liczb x i $\frac{1}{m_1}$ są identyczne. Zachodzą więc zawsze równości

$$D_q(x) = D_q\left(\frac{1}{m_1}\right) = D_q\left(\frac{1}{m}\right).$$

Jeśli m jest dowolną liczbą naturalną, to liczbę

$$D_q\left(\frac{1}{m}\right)$$

oznaczać będziemy przez $L_q(m)$. Innymi słowy, $L_q(m)$ jest długością okresu zasadniczego q-rozwinięcia ułamka $\frac{1}{m}$. Jeśli to q-rozwinięcie jest skończone, to przyjmujemy: $L_q(m) = 1$. Ponadto, przez $L(m)$ oznaczać będziemy liczbę

$$L_{10}(m) = D_{10}\left(\frac{1}{m}\right) = D\left(\frac{1}{m}\right).$$

Jest jasne, że

$$L_q(m) = L_q(m_1),$$

gdzie m_1 jest q-kodzielnikiem liczby m. W szczególności dla rozwinięć dziesiętnych mamy:

5.2.1. *Niech $m = 2^\alpha 5^\beta m_1$, gdzie α, β są nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz m_1 jest liczbą naturalną względnie pierwszą z 10. Wtedy $L(m) = L(m_1)$.*

Wykażemy teraz:

5.2.2. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$. Jeśli m i n są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, to*

$$L_q(mn) = \text{nww}\Big(L_q(m), L_q(n)\Big).$$

D. Oznaczmy przez m_1, n_1 q-kodzielniki liczb odpowiednio m i n. Ponieważ $\text{nwd}(m, n) = 1$, więc $\text{nwd}(m_1, n_1) = 1$. Ponadto, $m_1 n_1$ jest q-kodzielnikiem iloczynu mn. Niech $d = L_q(m)$, $e = L_q(n)$, $k = L_q(mn)$, $u = \text{nww}(d, e)$. Przypomnijmy, że d, e, k są najmniejszymi liczbami naturalnymi odpowiednio takimi, że $m_1 \mid q^d - 1$ $n_1 \mid q^e - 1$, $m_1 n_1 \mid q^k - 1$. Należy udowodnić, że $k = u$.

Liczba $q^u - 1$ jest podzielna przez liczby $q^d - 1$ i $q^e - 1$; jest więc podzielna przez m_1 i przez n_1, a zatem jest podzielna przez iloczyn $m_1 n_1$. Stęd wynika, że $k \mid u$.

Z podzielności $m_1n_1 \mid q^k - 1$, otrzymujemy kolejno: $m_1 \mid q^k - 1$, $n_1 \mid q^k - 1$, $d \mid k$, $e \mid k$ i ostatecznie $u = \mathrm{nww}(d, e) \mid k$. Zatem $k = u$. ⊠

W powyższym dowodzie w istotny sposób wykorzystaliśmy to, że jeśli $m \in \mathbb{N}$ i d jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $m \mid q^d - 1$, to każda liczba naturalna u spełniająca warunek $m \mid q^u - 1$, jest podzielna przez d. Korzystając z tego faktu, łatwo można udowodnić następne stwierdzenie.

5.2.3. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech p będzie liczbą pierwszą taką, że $p \nmid q$. Wtedy:*

(1) *jeśli $L_q(p)$ jest liczbą parzystą, to każda liczba postaci $L_q(p^n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest parzysta;*

(2) *jeśli $p \neq 2$ i $L_q(p)$ jest liczbą nieparzystą, to każda liczba postaci $L_q(p^n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest nieparzysta.*

D. Oznaczmy: $d = L_q(p)$, $d_n = L_q(p^n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(1). Ponieważ $p^n \mid q^{d_n} - 1$, więc $p \mid q^{d_n} - 1$ i stąd $d \mid d_n$. Ale d jest parzyste, więc każde d_n jest również parzyste.

(2). Załóżmy, że d jest nieparzyste i przypuśćmy,że istnieje n takie, że d_n jest parzyste; niech $d_n = 2e_n$, $e_n \in \mathbb{N}$. Wtedy $p^n \mid q^{2e_n} - 1$, więc $p \mid q^{2e_n} - 1$, więc $d \mid 2e_n$. Ale $\mathrm{nwd}(2, d) = 1$, więc $d \mid e_n$ i stąd mamy podzielność: $p \mid q^{e_n} - 1$.

Mamy ponadto: $q^{2e_n} - 1 = (q^{e_n} - 1)(q^{e_n} + 1)$, $p^n \mid q^{2e_n} - 1$, $p^n \nmid q^{e_n} - 1$, czyli p musi dzielić liczbę $q^{e_n} + 1$. Zatem $p \mid 2$, gdyż $2 = (q^{e_n} + 1) - (q^{e_n} - 1)$. Jest to sprzeczne z tym, że $p \neq 2$. ⊠

5.2.4. *Niech p będzie liczbą pierwszą różną od 2 i 5 i niech $d = L(p)$. Niech k będzie liczbą naturalną taką, że $p^k \mid 10^d - 1$ i $p^{k+1} \nmid 10^d - 1$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$L\left(p^{k+n}\right) = p^n L(p).$$

Przykłady:

(1) $L(3) = 1$, $L(3^2) = 1$, $L(3^n) = 3^{n-2}$ *dla* $n \geqslant 2$;

(2) $L(7^n) = 6 \cdot 7^{n-1}$. *dla* $n \geqslant 1$;

(3) $L(11^n) = 2 \cdot 11^{n-1}$, *dla* $n \geqslant 1$;

(4) $L(13^n) = 6 \cdot 13^{n-1}$, *dla* $n \geqslant 1$;

(5) $L(17^n) = 16 \cdot 17^{n-1}$, *dla* $n \geqslant 1$. ([Kw] 2/2000 25-29).

5.2.5. *Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że okres zasadniczy rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{1}{3^{100}}$ ma długość równą 3^{98}. W tym okresie zasadniczym:*

(1) *występuje blok* 123456789;

(2) *występuje blok składający się z* 20 *jednakowych cyfr;*

(3) *występuje każdy blok składający się z* 46 *cyfr.* ([Kw] 9/1991 s.25 M1280).

★ L. Semionowa, *Ułamki okresowe* (po rosyjsku), [Kw] 2000/2 25-29.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.3 Długość okresu zasadniczego sumy dwóch liczb wymiernych

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $q \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Przypomnijmy, że przez $D_q(x)$ oznaczamy długość okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby wymiernej x. W przypadku rozwinięć dziesiętnych długość tę oznaczamy przez $D(x)$. Jeśli rozwinięcie jest skończone, to przyjmujemy: $D_q(x) = 1$.

Udowodniliśmy (patrz 4.4.4), że q-rozwinięcie danej liczby wymiernej x posiada okres (niekoniecznie zasadniczy) długości d wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite c, r takie, że $r \geqslant 0$ oraz

$$x = \frac{c}{q^r(q^d - 1)}.$$

Wiemy ponadto, że długość dowolnego okresu jest liczbą podzielną przez długość okresu zasadniczego. Jeśli istnieje okres długości d, to istnieją okresy długości nd, dla dowolnej liczby naturalnej n. Przy pomocy tych faktów, łatwo można udowodnić następujące stwierdzenie.

5.3.1. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech x_1, x_2 będą liczbami wymiernymi. Oznaczmy: $d_1 = D_q(x_1)$, $d_2 = D_q(x_2)$, $d = D_q(x+y)$, $d' = D_q(x-y)$. Wtedy d i d' są dzielnikami liczby* $\text{nww}(d_1, d_2)$. ([FieK] 108-110).

D. Niech $w = nww(d_1, d_2)$. Ponieważ $d_1 \mid w$ i $d_2 \mid w$, więc q-rozwinięcia liczb x_1, x_2 posiadają okresy (niekoniecznie zasadnicze) długości w. Z 4.4.4 wynika, że istnieją liczby całkowite c_1, c_2, r_1, r_2 takie, że $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ oraz

$$x_1 = \frac{c_1}{q^{r_1}(q^w - 1)}, \quad x_2 = \frac{c_2}{q^{r_2}(q^w - 1)}.$$

Niech $r = r_1 r_2$. Mamy wtedy:

$$x_1 \pm x_2 = \frac{c'}{q^r(q^w - 1)},$$

gdzie $c' = q^{r_2}c_1 \pm q^{r_1}c_2$. Zatem q-rozwinięcia liczb $x_1 + x_2$ i $x_1 - x_2$ posiadają okresy o długości w. Długości okresów zasadniczych tych liczb, czyli liczby d i d', są więc dzielnikami liczby $w = \text{nww}(d_1, d_2)$. ⊠

5.3.2. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech x_1, x_2 będą liczbami wymiernymi. Oznaczmy: $d_1 = D_q(x_1)$, $d_2 = D_q(x_2)$, $d = D_q(x_1 + x_2)$. Wtedy:*

$$d \mid \text{nww}(d_1, d_2), \quad d_1 \mid \text{nww}(d, d_2), \quad d_2 \mid \text{nww}(d_1, d).$$

([FieK] 108-110).

D. Wykorzystujemy równości $x_1 = (x_1 + x_2) - x_2$, $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1$ i stwierdzenie 5.3.1. ⊠

5.3.3. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech a, b, c będą liczbami naturalnymi. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Istnieją liczby wymierne x i y takie, że $D_q(x) = a$, $D_q(y) = b$, $D_q(x+y) = c$.*

(2) $a \mid \text{nww}(b, c)$, $b \mid \text{nww}(c, a)$, $c \mid \text{nww}(a, b)$. ([FieK] 109).

5.3.4. *Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych x i y mają okresy zasadnicze o długościach odpowiednio równych 6 i 12. Ile może być równa długość okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby $x + y$?* ([OM] Moskwa 1993).

R. ([FieK] 108-110). Niech d oznacza długość okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby $x + y$. Z 5.3.2 wiemy, że d musi być dzielnikiem liczby $12 = \mathrm{nww}(6, 12)$. Zatem $d = 1, 2, 3, 4, 6$ lub 12. Ponadto, $12 \mid \mathrm{nww}(6, d)$ oraz $6 \mid \mathrm{nww}(12, d)$. Liczby $1, 2, 3, 6$ tych warunków nie spełniają. Pozostają jedynie dwa przypadki: $d = 4$ lub $d = 12$. Każdy z tych przypadków jest możliwy.

Niech $x = 0,(000001)$, $y = 0,(011100110110)$. Wtedy $x + y = 0,(0111)$ i mamy: $D(x) = 6$, $D(y) = 12$, $D(x + y) = 4$.

Niech $x = 0,(000001)$, $y = 0,(000000000001)$. Wtedy $x+y = 0,(000001000002)$ i mamy: $D(x) = 6$, $D(y) = 12$, $D(x + y) = 12$. ⊠

W podobny sposób można udowodnić:

5.3.5. *Jeśli rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych x i y mają okresy zasadnicze o długościach odpowiednio równych 4 i 6, to okres zasadniczy rozwinięcia dziesiętnego liczby $x+y$ ma długość równą 3 lub 12. Każdy przypadek jest możliwy. To samo zachodzi dla rozwinięć przy dowolnej podstawie $q \geqslant 2$.*

5.3.6. *Jeśli rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych x i y mają okresy zasadnicze o długościach odpowiednio równych 1 i n, to okres zasadniczy rozwinięcia dziesiętnego liczby $x+y$ ma długość równą n. To samo zachodzi dla rozwinięć przy dowolnej podstawie $q \geqslant 2$.*

D. Mamy: $1 = D_q(x)$, $n = D_q(y)$. Niech $d = D_q(x + y)$. Z 5.3.2 wiemy, że d musi być dzielnikiem liczby $n = \mathrm{nww}(1, n)$. Ponadto, $n \mid \mathrm{nww}(1, d) = d$. Zatem $d \mid n$ i $n \mid d$, czyli $d = n$. ⊠

5.3.7. *Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $a < b$ będą liczbami naturalnymi. Jeśli rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych x i y mają okresy zasadnicze o długościach odpowiednio równych p^a i p^b, to okres zasadniczy rozwinięcia dziesiętnego liczby $x+y$ ma długość równą p^b. To samo zachodzi dla rozwinięć przy dowolnej podstawie $q \geqslant 2$.*

D. Mamy: $p^a = D_q(x)$, $p^b = D_q(y)$. Niech $d = D_q(x+y)$. Z 5.3.2 wiemy, że d musi być dzielnikiem liczby $p^b = \mathrm{nww}(p^a, p^b)$. Ponadto, $p^b \mid \mathrm{nww}(p^a, d)$. Jedynie $d = p^b$ spełnia te warunki. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.4 Okresy zasadnicze i podzielność przez 9

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Spójrzmy na kilka przykładów rozwinięć dziesiętnych pewnych liczb wymiernych:

$$\frac{1}{13} = 0,(076923); \quad \frac{1}{14} = 0,0(714285); \quad \frac{1}{44} = 0,02(27).$$

Długości okresów zasadniczych są większe od 1 i w każdym przypadku kodzielniki dziesiętne mianowników są liczbami pierwszymi (równymi odpowiednio 13, 7 i 11). Mamy tu trzy liczby okresów zasadniczych:

$$76923, \quad 714285, \quad 27.$$

Wszystkie te liczby są podzielne przez 9. Wykażemy, że tak jest zawsze.

5.4.1. *Niech $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$. Załóżmy, że kodzielnik dziesiętny liczby m jest liczbą pierwszą i długość okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x jest co najmniej równa 2. Wtedy liczba utworzona z cyfr okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x jest podzielna przez 9.*

D. Niech $d = d_{10}(m)$, $r = r_{10}(m)$ i oznaczmy przez m_1, m_2 odpowiednio kodzielnik dziesiętny i dzielnik dziesiętny liczby m. Uwzględniając założenia mamy: $d \geqslant 2$ oraz $m_1 = p$ jest liczbą pierwszą różną od 2 i 5. Ponadto, $10^r = sm_2$ dla pewnej liczby naturalnej s. Wiemy (patrz twierdzenie 4.4.5), że

$$\frac{a}{m} = a_0 + \frac{u}{10^r} + \frac{v}{10^r(10^d - 1)} = \frac{c}{10^r(10^d - 1)},$$

czyli $a10^r(10^d - 1) = pm_2c$ i stąd

$$as(10^d - 1) = pc,$$

gdzie $c = a_0 10^r(10^d - 1) + u(10^d - 1) + v$; liczby a_0, u są całkowite i v jest liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x. Należy pokazać, że $9 \mid v$.

Liczby as i p są względnie pierwsze. Liczba pierwsza p dzieli więc liczbę $10^d - 1 = (10^1 - 1)t$, gdzie

$$t = 10^{d-1} + 10^{d-2} + \cdots + 1.$$

Ale $d \geqslant 2$, więc $p \nmid (10^1 - 1)$. Zatem $p \mid t$; liczba $\frac{t}{p}$ jest więc całkowita, oznaczmy ją przez w. Mamy teraz równość $9asw = c$, czyli:

$$9asw = a_0 10^r(10^d - 1) + u(10^d - 1) + v = 9a_0 10^r t + 9ut + v$$

i z tej równości wynika, że $9 \mid v$. ⊠

Założyliśmy, że kodzielnik dziesiętny mianownika liczby x jest liczbą pierwszą. Czy to założenie jest potrzebne? Czasem musimy to jednak założyć. Kodzielnik mianownika liczby $\frac{1}{33}$ jest liczbą złożoną, równą 33. Ponieważ $\frac{1}{33} = 0,(03)$, więc w tym przypadku liczba utworzona z cyfr okresu zasadniczego jest równa 3 i nie jest podzielna przez 9. Następne stwierdzenie mówi, że tak się nie może zdarzyć w przypadku, gdy kodzielnik dziesiętny mianownika nie jest podzielny przez 3.

5.4.2. *Niech $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$. Załóżmy, że $m = 2^\alpha 5^\beta m_1$, gdzie α, β są nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz $m_1 \geqslant 2$ jest liczbą naturalną względnie pierwszą z 30. Wtedy liczba utworzona z cyfr okresu zasadniczego tego rozwinięcia dziesiętnego liczby x jest podzielna przez 9.*

D. Kodzielnikiem dziesiętnym liczby m jest liczba m_1, która nie jest podzielna przez 3. Dzielnikiem dziesiętnym liczby m jest $m_2 = 2^\alpha 5^\beta$. Niech $d = d_{10}(m)$, $r = r_{10}(m) = \max(\alpha, \beta)$. Przypomnijmy, że d jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $m_1 \mid 10^d - 1$. Ponieważ $3 \nmid m_1$ i $m_1 > 1$ więc $m_1 \nmid 10^1 - 1$. Zatem $d \geqslant 2$. Ponadto, $10^r = sm_2$ dla pewnej liczby naturalnej s.

Wiemy (patrz twierdzenie 4.4.5), że

$$\frac{a}{m} = a_0 + \frac{u}{10^r} + \frac{v}{10^r(10^d - 1)} = \frac{c}{10^r(10^d - 1)},$$

czyli $a10^r(10^d - 1) = m_1m_2c$ i stąd

$$as(10^d - 1) = m_1c,$$

gdzie $c = a_0 10^r(10^d - 1) + u(10^d - 1) + v$; liczby a_0, u są całkowite i v jest liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x. Należy pokazać, że $9 \mid v$.

Liczby as i m_1 są względnie pierwsze. Liczba m_1 dzieli więc liczbę $10^d - 1 = (10^1 - 1)t$, gdzie

$$t = 10^{d-1} + 10^{d-2} + \cdots + 1.$$

Ale $\text{nwd}(m_1, 10^1 - 1) = 1$. Zatem $m_1 \mid t$; liczba $\frac{t}{m_1}$ jest więc całkowita, oznaczmy ją przez w. Mamy teraz równość $9asw = c$, czyli:

$$9asw = a_0 10^r(10^d - 1) + u(10^d - 1) + v = 9a_0 10^r t + 9ut + v$$

i z tej równości wynika, że $9 \mid v$. ⊠

Podobną własność posiadają liczby okresów zasadniczych q-rozwinięć liczb wymiernych.

5.4.3. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$,* $\text{nwd}(a, m) = 1$. *Jeśli q-kodzielnik liczby m jest względnie pierwszy z liczbą $q - 1$, to liczba utworzona z cyfr okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x jest podzielna przez $q - 1$.*

D. Niech m_1 i m_2 będą odpowiednio q-kodzielnikiem i q-dzielinikiem liczby m. Niech $d = d_q(m)$, $r = r_q(m)$. Przypomnijmy, że d jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $m_1 \mid q^d - 1$. Ponadto, istnieje liczba naturalna s taka, że $q^r = sm_2$. Wiemy (patrz twierdzenie 4.4.5), że

$$\frac{a}{m} = a_0 + \frac{u}{q^r} + \frac{v}{q^r(q^d - 1)} = \frac{c}{q^r(q^d - 1)},$$

czyli $aq^r(q^d - 1) = m_1 m_2 c$ i stąd

$$as(q^d - 1) = m_1 c,$$

gdzie $c = a_0 q^r(q^d - 1) + u(q^d - 1) + v$; liczby a_0, u są całkowite i v jest liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x. Należy pokazać, że $(q - 1) \mid v$.

Liczby as i m_1 są względnie pierwsze. Liczba m_1 dzieli więc liczbę $q^d - 1 = (q - 1)t$, gdzie $t = q^{d-1} + q^{d-2} + \cdots + 1$. Ale $\text{nwd}(m_1, q - 1) = 1$. Zatem $m_1 \mid t$; liczba $\frac{t}{m_1}$ jest więc całkowita, oznaczmy ją przez w. Mamy teraz równość $(q - 1)asw = c$, czyli:

$$(q - 1)asw = a_0 q^r(q^d - 1) + u(q^d - 1) + v = (q - 1)a_0 10^r t + (q - 1)ut + v$$

i z tej równości wynika, że $(q - 1) \mid v$. ⊠

Zanotujmy szczególny przypadek powyższego stwierdzenia.

5.4.4. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$,* $\text{nwd}(a, m) = 1$. *Załóżmy, że długość okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x jest co najmniej równa 2. Jeśli q-kodzielnik liczby m jest liczbą pierwszą, to liczba utworzona z cyfr okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x jest podzielna przez $q - 1$.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.5 Okresy o parzystych długościach

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale zajmować się będziemy pewnymi liczbami wymiernymi, których rozwinięcia przy danej podstawie $q \geqslant 2$ (tzn. q-rozwinięcia) posiadają okresy zasadnicze o parzystych długościach. Skoncentrujmy się najpierw na rozwinięciach dziesiętnych.

Rozwinięcia dziesiętne ułamków $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ i $\frac{1}{13}$ mają okresy zasadnicze o długościach odpowiednio równych $6, 2, 6$:

$$\frac{1}{7} = 0,(142857), \quad \frac{1}{11} = 0,(09), \quad \frac{1}{13} = 0,(076923).$$

Długości te są liczbami parzystymi. Już wiemy (patrz 5.4.1 lub 5.4.2), że wszystkie liczby okresów zasadniczych, w naszym przypadku liczby 124857, 9 i 76923, są podzielne przez 9. Okresy zasadnicze mają jeszcze jedną ciekawą własność. Podzielmy je na dwie połówki i dodajmy:

$$142 + 857 = 999, \quad 0 + 9 = 9, \quad 076 + 923 = 999.$$

Otrzymaliśmy liczby zbudowane z samych dziewiątek. Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{97}$ ma okres zasadniczy o parzystej długości, równej 96. Z połówkami tego okresu zróbmy to samo:

$$\begin{array}{rr} & 010309278350515463917525773195876288659793814432 \\ + & 989690721649484536082474226804123711340206185567 \\ \hline & 999999999999999999999999999999999999999999999999. \end{array}$$

Otrzymaliśmy liczbę zbudowaną z 48 dziewiątek.

Wykażemy, że rozważaną własność posiadają okresy zasadnicze wszystkich nieprzywiedlnych ułamków postaci $\frac{a}{p}$, gdzie p jest liczbą pierwszą większą od 5, jeśli tylko długość okresu zasadniczego jest liczbą parzystą. Wykażemy również, że pewne inne liczby wymierne też posiadają tę własność.

5.5.1 (E. Midy 1836)**.** *Niech* $x = \frac{a}{m}$*, gdzie* $a \in \mathbb{Z}$*,* $m \in \mathbb{N}$*,* $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$*. Załóżmy, że* $m = 2^\alpha 5^\beta p$*, gdzie* α, β *są nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz* p *jest liczbą pierwszą różną od* 2 *i* 5*. Załóżmy ponadto, że długość okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby* x *jest liczbą naturalną parzystą, równą* 2λ*. Wtedy suma dwóch połówek okresu zasadniczego jest równa* $10^\lambda - 1$*; jest liczbą zbudowaną z samych dziewiątek.*

([Dic1], [RaT], [Mon] 74(6)(1967) 669-673, [Gins]).

D. ([RaT] 197-200). Niech $d = d_{10}(m)$, $r = r_{10}(m)$ i oznaczmy przez m_1, m_2 odpowiednio kodzielnik dziesiętny i dzielnik dziesiętny liczby m. Uwzględniając założenia mamy: $d = 2\lambda \geqslant 2$ oraz $m_1 = p$ jest liczbą pierwszą różną od 2 i 5. Ponadto, $10^r = sm_2$ dla pewnej liczby naturalnej s (w tym przypadku $r = \max(\alpha, \beta)$). Wiemy (patrz twierdzenie 4.4.5), że

$$\frac{a}{m} = a_0 + \frac{u}{10^r} + \frac{v}{10^r(10^d - 1)} = \frac{c}{10^r(10^d - 1)},$$

czyli $a10^r(10^d - 1) = pm_2c$ i stąd

$$as(10^d - 1) = pc,$$

gdzie $c = a_0 10^r(10^d - 1) + u(10^d - 1) + v$; liczby a_0, u są całkowite i v jest liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x. Wiemy, że $1 \leqslant v < 10^d - 1$.

Oznaczmy przez A i B liczby utworzone z dwóch połówek okresu zasadniczego. Mamy wtedy równość

$$v = A10^\lambda + B.$$

Ponadto, $A \leqslant 10^\lambda - 1$ i $B \leqslant 10^\lambda - 1$. Przypuśćmy, że $A = 10^\lambda - 1$ i $B = 10^\lambda - 1$. Wtedy

$$v = A10^\lambda + B = (10^\lambda - 1)10^\lambda + 10^\lambda - 1 = 10^{2\lambda} - 1 = 10^d - 1$$

i mamy sprzeczność, gdyż $v < 10^d - 1$. Co najmniej jedna z liczb A i B jest więc ostro mniejsza od $10^\lambda - 1$. Mamy zatem:

$$0 < A + B < 2(10^\lambda - 1).$$

Należy wykazać, że $A + B = 10^\lambda - 1$.

Liczby as i p są względnie pierwsze. Liczba pierwsza p dzieli więc liczbę

$$10^d - 1 = 10^{2\lambda} - 1 = (10^\lambda - 1)(10^\lambda + 1).$$

Ponieważ d jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $p \mid 10^d - 1$, więc liczba $10^\lambda - 1$ nie jest podzielna przez p. Zatem p dzieli liczbę $10^\lambda + 1$. Liczba $\frac{10^\lambda+1}{p}$ jest więc całkowita, oznaczmy ją przez w. Mamy teraz równość $(10^\lambda - 1)asw = c$, czyli:

$$(10^\lambda - 1)asw = a_0 10^r (10^{2\lambda} - 1) + u(10^{2\lambda} - 1) + v.$$

Z równości tej wynika, że liczba v jest podzielna przez $10^\lambda - 1$. Ale

$$v = A10^\lambda + B = A(10^\lambda - 1) + (A + B).$$

Suma $A + B$ jest więc podzielna przez $10^\lambda - 1$; niech $A + B = h(10^\lambda - 1)$, gdzie $h \in \mathbb{N}$. Wykazaliśmy, że $0 < A + B < 2(10^\lambda - 1)$; zatem $h = 1$ i stąd $A + B = 10^\lambda - 1$. ⊠

Drobne modyfikacje przedstawionego dowodu pozwalają udowodnić, że podobną własność posiadają okresy zasadnicze q-rozwinięć pewnych liczb wymiernych.

5.5.2. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$,* $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$. *Załóżmy, że q-kodzielnik liczby m jest liczbą pierwszą i długość okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x jest liczbą naturalną parzystą, równą 2λ. Wtedy suma dwóch połówek okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x jest równa $q^\lambda - 1$; jest więc liczbą zbudowaną w systemie numeracji o podstawie q z samych cyfr $q - 1$.*

D. Niech $d = d_q(m)$, $r = r_q(m)$ i oznaczmy przez m_1, m_2 odpowiednio q-kodzielnik i q-dzielnik liczby m. Z założeń wynika, że $d = 2\lambda \geqslant 2$ oraz $m_1 = p$ jest liczbą pierwszą i $p \nmid q$. Ponadto, $q^r = sm_2$ dla pewnej liczby naturalnej s. Wiemy (patrz twierdzenie 4.4.5), że

$$\frac{a}{m} = a_0 + \frac{u}{q^r} + \frac{v}{q^r(q^d - 1)} = \frac{c}{q^r(q^d - 1)},$$

czyli $aq^r(q^d - 1) = pm_2c$ i stąd

$$as(q^d - 1) = pc,$$

gdzie $c = a_0q^r(q^d - 1) + u(q^d - 1) + v$; liczby a_0, u są całkowite i v jest liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x. Wiemy, że $1 \leqslant v < q^d - 1$.

Oznaczmy przez A i B liczby utworzone z dwóch połówek okresu zasadniczego. Mamy wtedy równość

$$v = Aq^\lambda + B.$$

Ponadto, $A \leqslant q^\lambda - 1$ i $B \leqslant q^\lambda - 1$. Przypuśćmy, że $A = q^\lambda - 1$ i $B = q^\lambda - 1$. Wtedy $v = Aq^\lambda + B = (q^\lambda - 1)q^\lambda + q^\lambda - 1 = q^{2\lambda} - 1 = q^d - 1$ i mamy sprzeczność, gdyż $v < q^d - 1$. Co najmniej jedna z liczb A i B jest więc ostro mniejsza od $q^\lambda - 1$. Mamy zatem:

$$0 < A + B < 2(q^\lambda - 1).$$

Należy wykazać, że $A + B = q^\lambda - 1$.

Liczby as i p są względnie pierwsze. Liczba pierwsza p dzieli więc liczbę $q^d - 1 = q^{2\lambda} - 1 = (q^\lambda - 1)(q^\lambda + 1)$. Ponieważ d jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $p \mid q^d - 1$, więc liczba $q^\lambda - 1$ nie jest podzielna przez p. Zatem p dzieli liczbę $q^\lambda + 1$. Liczba $\frac{q^\lambda+1}{p}$ jest więc całkowita, oznaczmy ją przez w. Mamy teraz równość $(q^\lambda - 1)asw = c$, czyli:

$$(q^\lambda - 1)asw = a_0q^r(q^{2\lambda} - 1) + u(q^{2\lambda} - 1) + v.$$

Z równości tej wynika, że liczba v jest podzielna przez $q^\lambda - 1$. Ale

$$v = Aq^\lambda + B = A(q^\lambda - 1) + (A + B).$$

Suma $A + B$ jest więc podzielna przez $q^\lambda - 1$; niech $A + B = h(q^\lambda - 1)$, gdzie $h \in \mathbb{N}$. Wykazaliśmy, że $0 < A + B < 2(q^\lambda - 1)$; zatem $h = 1$ i stąd $A + B = q^\lambda - 1$. ⊠

Powróćmy do rozwinięć dziesiętnych. Załóżmy, że okres zasadniczy rozwinięcia dziesiętnego danej liczby wymiernej ma długość parzystą $d = 2\lambda$, gdzie λ jest pewną liczbą naturalną. Oznaczmy przez v liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego i niech

$$v = b_1 10^{d-1} + b_2 10^{d-2} + \cdots + b_{d-1} 10 + b_d,$$

gdzie $b_1, \ldots, b_d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Połówkami okresu zasadniczego są wtedy liczby

$$\begin{aligned} A &= b_1 10^{\lambda-1} + b_2 10^{\lambda-2} + \cdots + b_{\lambda-1} 10 + b_\lambda, \\ B &= b_{\lambda+1} 10^{\lambda-1} + b_{\lambda+2} 10^{\lambda-2} + \cdots + b_{2\lambda-1} 10 + b_{2\lambda}. \end{aligned}$$

Załóżmy, że suma tych połówek jest zbudowana z samych dziewiątek, tzn. załóżmy, że $A+B = 10^\lambda - 1$. Wtedy suma ostatnich cyfr tych liczb ma ostatnią cyfrę równą 9 i suma ta nie może być równa 19 (ponieważ cyfry należą do zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$). Zatem $b_\lambda + b_{2\lambda} = 9$; przy dodawaniu ostatnich cyfr nie przenosimy nic do "pamięci". Suma przedostatnich cyfr liczb A i B również ma ostatnią cyfrę równą 9 i z tych samych powodów nie może być równa 19. Zatem $b_{\lambda-1} + b_{2\lambda-1} = 9$ i znowu nie przenosimy nic do "pamięci". Kontunuując to postępowanie, otrzymujemy równości $b_i + b_{\lambda+i} = 9$, dla $i = 1, 2, \ldots, \lambda$. Udowodniliśmy następujące stwierdzenie.

5.5.3. *Niech $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$. Załóżmy, że kodzielnik dziesiętny liczby m jest liczbą pierwszą i długość okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x jest liczbą naturalną parzystą, równą 2λ. Niech*

$$v = b_1 10^{2\lambda-1} + b_2 10^{2\lambda-2} + \cdots + b_{2\lambda-1} 10 + b_{2\lambda}$$

będzie liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x; liczby $b_1, \ldots, b_{2\lambda}$ należą do zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Wtedy

$$b_i + b_{\lambda+i} = 9,$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, \lambda$. W szczególności, suma cyfr liczby v jest równa 9λ.

Podobnie jest dla dowolnych q-rozwinięć:

5.5.4. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech $x = \frac{a}{m}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$. Załóżmy, że q-kodzielnik liczby m jest liczbą pierwszą i długość okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x jest liczbą naturalną parzystą, równą 2λ. Niech*

$$v = b_1 q^{2\lambda-1} + b_2 q^{2\lambda-2} + \cdots + b_{2\lambda-1} q + b_{2\lambda}$$

będzie liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x; liczby $b_1, \ldots, b_{2\lambda}$ należą do zbioru $\{0, 1, \ldots, q-1\}$. Wtedy

$$b_i + b_{\lambda+i} = q - 1,$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, \lambda$. W szczególności, suma cyfr liczby v, w systemie numeracji o podstawie q, jest równa $(q-1)\lambda$.

Zajmowaliśmy się liczbami pierwszymi, których odwrotności posiadały q-rozwinięcia z parzystymi długościami okresów zasadniczych. Istnieją liczby pierwsze, dla których te okresy mają długości nieparzyste.

5.5.5. *Wszystkie liczby pierwsze* $p < 100$ *takie, że długość okresu zasadniczego* q*-rozwinięcia ułamka* $\frac{1}{p}$ *jest liczbą nieparzystą.*

$q = 2:$ $7, 23, 31, 47, 71, 73, 79, 89;$
$q = 3:$ $2, 11, 13, 23, 47, 59, 71, 83;$
$q = 4:$ $3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 73, 79, 83, 89;$
$q = 5:$ $2, 11, 19, 31, 59, 71, 79;$
$q = 6:$ $5, 19, 23, 43, 47, 67, 71;$
$q = 7:$ $2, 3, 19, 29, 31, 37, 47, 59, 83;$
$q = 8:$ $7, 23, 31, 47, 71, 73, 79, 89;$
$q = 9:$ $2, 7, 11, 13, 19, 23, 31, 37, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 79, 83;$
$q = 10:$ $3, 31, 37, 41, 43, 53, 67, 71, 79, 83;$
$q = 11:$ $2, 5, 7, 19, 43, 79, 83;$
$q = 12:$ $11, 23, 37, 47, 59, 61, 71, 83;$
$q = 13:$ $2, 3, 23, 43, 53, 61, 79;$
$q = 14:$ $11, 13, 31, 43, 47, 67;$
$q = 15:$ $2, 7, 11, 43, 53, 59, 61, 67, 71;$
$q = 16:$ $3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89.$

5.5.6. *Wszystkie liczby pierwsze* $1900 < p < 2100$ *takie, że długość okresu zasadniczego* q*-rozwinięcia ułamka* $\frac{1}{p}$ *jest liczbą nieparzystą.*

$q = 2:$ $1913, 1951, 1999, 2039, 2063, 2087, 2089;$
$q = 3:$ $1907, 1931, 1979, 2003, 2027, 2029, 2039, 2063, 2087, 2099;$
$q = 4:$ $1907, 1913, 1931, 1951, 1979, 1987, 1999, 2003, 2011, 2027, 2039, 2063, 2083, 2087, 2089, 2099;$
$q = 5:$ $1931, 1949, 1951, 1979, 1999, 2011, 2039, 2099;$
$q = 6:$ $1901, 1949, 1987, 1997, 2011, 2039, 2063, 2083, 2087;$
$q = 7:$ $1907, 1931, 1951, 1979, 1987, 1997, 2063, 2069, 2099;$
$q = 8:$ $1913, 1951, 1999, 2039, 2063, 2087, 2089;$
$q = 9:$ $1907, 1931, 1933, 1951, 1979, 1987, 1993, 1999, 2003, 2011, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2083, 2087, 2099;$
$q = 10:$ $1907, 1933, 1951, 1987, 1999, 2003, 2027, 2039, 2083.$

Istnieją takie liczby wymierne o parzystej dłgości okresu zasadniczego, dla których omawiana suma połówek nie jest liczbą zbudowaną z samych dziewiątek. Potwierdzają to następujące dwa przykłady.

5.5.7. *Rozwinięcie dziesiętne ułamka* $\frac{1}{119} = \frac{1}{7 \cdot 17}$ *ma okres zasadniczy parzystej długości, równej* 48. *Suma połówek tego okresu jest równa:*

$$\begin{array}{r} 008403361344537815126050 \\ +\ 420168067226890756302521 \\ \hline 428571428571428571428571. \end{array}$$

Suma ta nie jest liczbą zbudowaną z samych dziewiątek. (Maple).

5.5.8. *Rozwinięcie dziesiętne ułamka* $\frac{1}{187} = \frac{1}{11 \cdot 17}$ *ma okres zasadniczy parzystej długości, równej* 16. *Suma połówek tego okresu jest równa:*

$$\begin{array}{r} 00534759 \\ +\ 35828877 \\ \hline 36363636. \end{array}$$

Suma ta nie jest liczbą zbudowaną z samych dziewiątek. (Maple).

Rozważane własności posiadają również potęgi liczb pierwszych (o ile odpowiednie długości okresów są liczbami parzystymi).

5.5.9. *Niech p będzie liczbą pierwszą różną od 2 i 5 taką, że długość okresu zasadniczego, rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{1}{p}$, jest liczbą parzystą. Niech*

$$m = 2^\alpha 5^\beta p^n,$$

gdzie α, β są nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz n jest liczbą naturalną. Rozważmy liczbę wymierną $x = \frac{a}{m}$; $a \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{nwd}(a, m) = 1$. Liczba ta posiada następujące własności.

(1) *Długość okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x jest liczbą parzystą; niech $d = 2\lambda$ będzie tą długością.*

(2) *Suma dwóch połówek okresu zasadniczego jest równa $10^\lambda - 1$, czyli jest liczbą zbudowaną z samych dziewiątek.*

(3) *Niech $v = b_1 10^{2\lambda-1} + b_2 10^{2\lambda-2} + \cdots + b_{2\lambda-1}10 + b_{2\lambda}$ będzie liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x; liczby $b_1, \dots, b_{2\lambda}$ należą do zbioru $\{0, 1, \dots, 9\}$. Wtedy*

$$b_i + b_{\lambda+i} = 9,$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, \lambda$. W szczególności, suma cyfr liczby v jest równa 9λ.

D. (1). Parzystość okresu zasadniczego wynika z 5.2.3.

(2). Niech $d = d_{10}(m)$, $r = r_{10}(m)$ i oznaczmy przez m_1, m_2 odpowiednio kodzielnik dziesiętny i dzielnik dziesiętny liczby m. Z przyjętych założeń wynika, że $d = 2\lambda \geqslant 2$, $r = \max(\alpha, \beta)$ oraz $m_1 = p^n$, $m_2 = 2^\alpha 6^\beta$. Ponadto, $10^r = s m_2$ dla pewnej liczby naturalnej s. Wiemy (patrz twierdzenie 4.4.5), że

$$\frac{a}{m} = a_0 + \frac{u}{10^r} + \frac{v}{10^r(10^d - 1)} = \frac{c}{10^r(10^d - 1)},$$

czyli $a 10^r (10^d - 1) = p^n m_2 c$ i stąd

$$as(10^d - 1) = p^n c,$$

gdzie $c = a_0 10^r (10^d - 1) + u(10^d - 1) + v$; liczby a_0, u są całkowite i v jest liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego liczby x. Wiemy, że $1 \leqslant v < 10^d - 1$.

Oznaczmy przez A i B liczby utworzone z dwóch połówek okresu zasadniczego. Mamy wtedy równość

$$v = A 10^\lambda + B.$$

Ponadto, $A \leqslant 10^\lambda - 1$ i $B \leqslant 10^\lambda - 1$. Przypuśćmy, że $A = 10^\lambda - 1$ i $B = 10^\lambda - 1$. Wtedy

$$v = A10^\lambda + B = (10^\lambda - 1)10^\lambda + 10^\lambda - 1 = 10^{2\lambda} - 1 = 10^d - 1$$

i mamy sprzeczność, gdyż $v < 10^d - 1$. Co najmniej jedna z liczb A i B jest więc ostro mniejsza od $10^\lambda - 1$. Mamy zatem:

$$0 < A + B < 2(10^\lambda - 1).$$

Należy wykazać, że $A + B = 10^\lambda - 1$.

Liczby as i p są względnie pierwsze. Potęga p^n dzieli więc liczbę

$$10^d - 1 = 10^{2\lambda} - 1 = (10^\lambda - 1)(10^\lambda + 1).$$

Ponieważ d jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $p^n \mid 10^d - 1$, więc liczba $10^\lambda - 1$ nie jest podzielna przez p^n. Zatem p dzieli liczbę $10^\lambda + 1$. Zauważmy, że p nie może dzielić liczby $10^\lambda - 1$. W przeciwnym bowiem przypadku mielibyśmy sprzeczność:

$$p \mid 2 = \left(10^\lambda + 1\right) - \left(10^\lambda - 1\right).$$

Stąd wynika, że liczba $10^\alpha + 1$ jest podzielna przez p^n. Liczba $\dfrac{10^\lambda + 1}{p^n}$ jest więc całkowita, oznaczmy ją przez w. Mamy teraz równość $(10^\lambda - 1)asw = c$, czyli:

$$(10^\lambda - 1)asw = a_0 10^r (10^{2\lambda} - 1) + u(10^{2\lambda} - 1) + v.$$

Z równości tej wynika, że liczba v jest podzielna przez $10^\lambda - 1$. Ale

$$v = A10^\lambda + B = A(10^\lambda - 1) + (A + B).$$

Suma $A + B$ jest więc podzielna przez $10^\lambda - 1$; niech $A + B = h(10^\lambda - 1)$, gdzie $h \in \mathbb{N}$. Wykazaliśmy, że $0 < A + B < 2(10^\lambda - 1)$; zatem $h = 1$ i stąd $A + B = 10^\lambda - 1$.

(3). Tę własność wykazujemy dokładnie tak samo jak 5.5.3. ⊠

Drobne modyfikacje przedstawionego dowodu pozwalają udowodnić to dla q-rozwinięć.

5.5.10. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech p będzie liczbą pierwszą taką, że $p \nmid q$, $p \neq 2$ i długość okresu zasadniczego, q-rozwinięcia ułamka $\frac{1}{p}$, jest liczbą parzystą. Niech m będzie liczbą naturalną, której q-kodzielnikiem jest liczba p^n dla pewnego naturalnego n. Rozważmy liczbę wymierną $x = \frac{a}{m}$; $a \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{nwd}(a, m) = 1$. Liczba ta posiada następujące własności.*

(1) *Długość okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x jest liczbą parzystą; niech $d = 2\lambda$ będzie tą długością.*

(2) *Suma dwóch połówek okresu zasadniczego jest równa $q^\lambda - 1$, czyli jest liczbą zbudowaną, w systemie numeracji o podstawie q, z samych cyfr $q - 1$.*

(3) *Niech $v = b_1 q^{2\lambda-1} + b_2 q^{2\lambda-2} + \cdots + b_{2\lambda-1} q + b_{2\lambda}$ będzie liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby x; liczby $b_1, \ldots, b_{2\lambda}$ należą do zbioru $\{0, 1, \ldots, q-1\}$. Wtedy*

$$b_i + b_{\lambda+i} = q - 1,$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, \lambda$. W szczególności, suma cyfr liczby v, zapisanej w systemie numeracji o podstawie q, jest równa $(q - 1)\lambda$.

★ L. E. Dickson, *Periodic decimal fractions*, [Dic1] 159-179.
W. G. Leavitt, *A theorem on repeating decimals*, [Mon] 74(6)(1967) 669-673.
W. G. Leavitt, *Repeating decimals*, [Cmj] 15(4)(1984) 299-308.
J. Lewittes, *Midy's theorem for periodic decimals*, preprint 2006.
E. Midy, *De quelques propr. des nombres et des fractions décimales périodiques*, Nantes, 1836.
H. Rademacher, O. Toeplitz, *Okresy rozwinięć dziesiętnych liczb wymiernych*, [RaT] 182-200.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.6 Okresy zasadnicze o długościach podzielnych przez 3

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $p \geqslant 7$ będzie liczbą pierwszą. Wiemy (patrz poprzedni podrozdział), że jeśli okres zasadniczy rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{1}{p}$ ma długość parzystą, to suma dwóch połówek tego okresu jest liczbą zbudowaną z samych dziewiątek. Brian D. Ginsberg w pracy [Gins] z 2004 roku udowodnił, że podobna własność zachodzi również wtedy, gdy długość okresu zasadniczego jest liczbą podzielną przez 3.

Dla $p = 7$ mamy okres 142857 i $14 + 28 + 57 = 99$. Dla $p = 13$ mamy okres 076923 i $07 + 69 + 23 = 99$. Okresem zasadniczym dla $p = 31$ jest 15-cyfrowa liczba 032258064516129. Podzielmy ją na trzy części i te części dodajmy:

$$03225 + 806645 + 16129 = 99999.$$

5.6.1 (B. D. Ginsberg, 2004)**.** *Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że rozwinięcie dziesiętne jej odwrotności ma okres zasadniczy o długości podzielnej przez* 3*. Podzielmy ten okres na trzy równej długości części. Wtedy suma tych trzech części jest liczbą zbudowaną z samych dziewiątek.* ([Gins]).

D. (B. D. Ginsberg). Z założenia wynika, że $p \neq 2$ i $p \neq 5$. Niech $d = 3k$ będzie długością okresu zasadniczego rozwninięcia dziesiętnego ułamka $\frac{1}{p}$ i niech v będzie liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego. Wtedy $10^{3k} - 1 = pv$ i $0 < v < 10^{3k} - 1$. Liczba v jest postaci $A10^{2k} + B10^k + C$, gdzie A, B, C są nieujemnymi liczbami całkowitymi mniejszymi od 10^k. Ponieważ $0 < v < 10^{3k} - 1$, więc

$$0 < A + B + C < 3\left(10^k - 1\right).$$

Wykażemy, że $A + B + C = 10^k - 1$.

Liczba pierwsza p dzieli liczbę

$$10^{3k} - 1 = \left(10^k - 1\right)\left(10^{2k} + 10^k + 1\right)$$

i nie dzieli liczby $10^k - 1$ (gdyż $3k$ jest długością okresu zasadniczego); musi więc dzielić czynnik $10^{2k} + 10^k + 1$. Mamy zatem liczbę naturalną $w = \dfrac{10^{2k} + 10^k + 1}{p}$ oraz równości

$$(a_1) \qquad \left(10^k - 1\right) w = v = A10^{2k} + B10^k + C = A\left(10^{2k} - 1\right) + B\left(10^k - 1\right) + (A + B + C),$$

z których wynika, że suma $A+B+C$ jest podzielna przez 10^k-1; niech $A+B+C = h(10^k-1)$, gdzie $h \in \mathbb{N}$. Wiemy, że $0 < A + B + C < 3(10^k - 1)$; zatem $h = 1$ lub $h = 2$. Wystarczy teraz wykazać, że przypadek $h = 2$ prowadzi do sprzeczności.

Przypuśćmy, że $h = 2$. Wtedy $A + B + C = 2\left(10^k - 1\right)$ i z równości (a_1), po podzieleniu przez $10^k - 1$, otrzymujemy równość

$$(a_2) \qquad \frac{10^{2k} + 10^k + 1}{p} = A10^k + A + B + 2.$$

Przypuśćmy, że $A = 0$. Ponieważ $B \leqslant 10^k - 1$, $C \leqslant 10^k - 1$ i $B + C = A + B + C = 2(10^k - 1)$, więc wtedy $B = 10^k - 1$ i mamy sprzeczność:

$$p = \frac{10^{2k} + 10^k + 1}{B + 2} = \frac{10^{2k} + 10^k + 1}{10^k + 1} = 1 + \frac{10^{2k}}{10^k + 1}.$$

Zatem $A \geqslant 1$. Wykażemy, że

$$(a_3) \qquad pA < 10^k.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. przypuśćmy, że $A \geqslant \frac{10^k}{p}$. Wtedy, wykorzystując (a_2), mamy:

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{10^{2k} + 10^k + 1}{p} - A10^k - 2 = 10^k \frac{10^k}{p} + \frac{10^k}{p} + \frac{1}{p} - A10^k - 2 \\ &\leqslant A10^k + A + \tfrac{1}{p} - A10^k - 2 \\ &= A + \frac{1}{p} - 2 \end{aligned}$$

i stąd mamy sprzeczność: $0 \leqslant B \leqslant \frac{1}{p} - 2 < 0$. Zatem istotnie $pA < 10^k$. W szczególności stąd wynika, że $p < 10^k$. Zauważmy teraz, że

$$C = 2(10^k - 1) - (A + B) > 2(10^k - 1) - \left(\frac{10^k}{p} + 10^k - 1\right) = 10^k - \frac{10^k}{p} - 1.$$

Zatem $10^k - \dfrac{10^k}{p} - 1 < C \leqslant 10^k - 1$. Po pomnożeniu tego przez p i po dodaniu jedynki, otrzymujemy:

$$(a_4) \qquad p10^k - 10^k - p + 1 < Cp + 1 \leqslant 10^k p - p + 1.$$

Spójrzmy jeszcze raz na początkową równość $10^{3k} - 1 = p\left(10^{2k}A + 10^k B + C\right)$. Z równości tej wynika, że liczba $Cp + 1$ jest podzielna przez 10^k. Istnieje więc liczba naturalna m taka, że $Cp + 1 = m10^k$. Wstawiając to do (a_4) i po podzieleniu przez 10^k, otrzymujemy:

$$p - 1 - \frac{p-1}{10^k} < m \leqslant p - \frac{p-1}{10^k},$$

stąd $p - 2 < m < p$ i stąd $m = p - 1$. Zatem $Cp + 1 = (p-1)10^k = p10^k - 10^k$ i stąd wynika, że p dzieli liczbę $10^k + 1$. Wiemy, że p dzieli również liczbę $10^{2k} + 10^k + 1$. Zatem p dzieli różnicę tych liczb, czyli liczbę 10^{2k}. Jest to jednak sprzeczne z tym, że p jest liczbą pierwszą różną od 2 i 5. Przypuszczenie, że $h = 2$ prowadzi więc do sprzeczności. Zatem $h = 1$ i mamy: $A + B + C = 10^k - 1$. ⊠

5.6.2. *Wszystkie liczby pierwsze, mniejsze od* 1000*, których odwrotności mają rozwinięcia dziesiętne o okresie zasadniczym długości podzielnej przez* 3 :

$$\begin{aligned} &7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 97, 109, 127, 151, 157, 163, 181, 193, 199, \\ &211, 223, 229, 241, 277, 283, 307, 313, 337, 367, 373, 379, 397, \\ &409, 433, 439, 487, 499, 523, 541, 571, 577, \\ &601, 613, 619, 631, 709, 727, 739, 757, 769, 787, \\ &811, 823, 829, 853, 877, 883, 919, 937, 991. \end{aligned}$$

Jest 58 *takich liczb.* (Maple).

5.6.3. *Wszystkie liczby pierwsze, mniejsze od* 3000*, których odwrotności mają rozwinięcia dziesiętne o okresie zasadniczym nieparzystej długości podzielnej przez* 3 :

$$\begin{aligned} &31, 37, 43, 67, 151, 163, 199, 277, 283, 307, 397, 439, 523, 613, 631, 757, 787, 853, 883, 919, 991, \\ &1039, 1093, 1123, 1279, 1399, 1471, 1609, 1693, 1747, 1759, 1867, 1933, 1951, 1999, \\ &2083, 2203, 2239, 2311, 2347, 2557, 2671, 2683, 2707, 2719, 2797, 2803. \end{aligned}$$

Jest 47 *takich liczb.* (Maple).

Przedstawiony tu dowód Ginsberga, jego twierdzenia 5.6.1, można z drobnymi zmianami przepisać i otrzymać dowód następującego twierdzenia dla dowolnych q-rozwinięć.

5.6.4. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$. Niech p będzie liczbą pierwszą, względnie pierwszą z q. Załóżmy, że q-rozwinięcie ułamka $\frac{1}{p}$ ma okres zasadniczy o długości równej $3k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Podzielmy ten okres na trzy części o długości k. Wtedy suma tych trzech części jest liczbą równą $q^k - 1$, tzn. suma ta jest taką liczbą, która w systemie numeracji o podstawie q jest zbudowana z samych cyfr $q-1$.*

D. Niech v będzie liczbą utworzoną z cyfr okresu zasadniczego q-rozwinięcia ułamka $\frac{1}{p}$. Wtedy $q^{3k} - 1 = pv$ i $0 < v < q^{3k} - 1$. Liczba v jest postaci $Aq^{2k} + Bq^k + C$, gdzie A, B, C są nieujemnymi liczbami całkowitymi mniejszymi od q^k. Ponieważ $0 < v < q^{3k} - 1$, więc

$$0 < A + B + C < 3\left(q^k - 1\right).$$

Wykażemy, że $A + B + C = q^k - 1$.

Liczba pierwsza p dzieli liczbę

$$q^{3k} - 1 = \left(q^k - 1\right)\left(q^{2k} + q^k + 1\right)$$

i nie dzieli liczby $q^k - 1$ (gdyż $3k$ jest długością okresu zasadniczego); musi więc dzielić czynnik $q^{2k} + q^k + 1$. Mamy zatem liczbę naturalną $w = \dfrac{q^{2k} + q^k + 1}{p}$ oraz równości

$$(b_1) \qquad \left(q^k - 1\right) w = v = Aq^{2k} + Bq^k + C = A\left(q^{2k} - 1\right) + B\left(q^k - 1\right) + (A + B + C),$$

z których wynika, że suma $A + B + C$ jest podzielna przez $q^k - 1$; niech $A + B + C = h(q^k - 1)$, gdzie $h \in \mathbb{N}$. Wiemy, że $0 < A + B + C < 3(q^k - 1)$; zatem $h = 1$ lub $h = 2$. Wystarczy teraz wykazać, że przypadek $h = 2$ prowadzi do sprzeczności.

Przypuśćmy, że $h = 2$. Wtedy $A + B + C = 2\left(q^k - 1\right)$ i z równości (b_1), po podzieleniu przez $q^k - 1$, otrzymujemy równość

$$(b_2) \qquad \frac{q^{2k} + q^k + 1}{p} = Aq^k + A + B + 2.$$

Przypuśćmy, że $A = 0$. Ponieważ $B \leqslant q^k - 1$, $C \leqslant q^k - 1$ i $B + C = A + B + C = 2(q^k - 1)$, więc wtedy $B = q^k - 1$ i mamy sprzeczność:

$$p = \frac{q^{2k} + q^k + 1}{B + 2} = \frac{q^{2k} + q^k + 1}{q^k + 1} = 1 + \frac{q^{2k}}{q^k + 1}.$$

Zatem $A \geqslant 1$. Wykażemy, że

$$(b_3) \qquad pA < q^k.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. przypuśćmy, że $A \geqslant \dfrac{q^k}{p}$. Wtedy, wykorzystując (b_2), mamy:

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{q^{2k} + q^k + 1}{p} - Aq^k - 2 = q^k \frac{q^k}{p} + \frac{q^k}{p} + \frac{1}{p} - Aq^k - 2 \\ &\leqslant Aq^k + A + \tfrac{1}{p} - Aq^k - 2 \\ &= A + \frac{1}{p} - 2 \end{aligned}$$

i stąd mamy sprzeczność: $0 \leqslant B \leqslant \frac{1}{p} - 2 < 0$. Zatem istotnie $pA < q^k$. W szczególności stąd wynika, że $p < q^k$. Zauważmy teraz, że

$$C = 2(q^k - 1) - (A + B) > 2(q^k - 1) - \left(\frac{q^k}{p} + q^k - 1\right) = q^k - \frac{q^k}{p} - 1.$$

Zatem $q^k - \dfrac{q^k}{p} - 1 < C \leqslant q^k - 1$. Po pomnożeniu tego przez p i po dodaniu jedynki, otrzymujemy:

$$(b_4) \qquad pq^k - q^k - p + 1 < Cp + 1 \leqslant q^k p - p + 1.$$

Spójrzmy jeszcze raz na początkową równość $q^{3k} - 1 = p\left(q^{2k}A + q^k B + C\right)$. Z równości tej wynika, że liczba $Cp + 1$ jest podzielna przez q^k. Istnieje więc liczba naturalna m taka, że $Cp + 1 = mq^k$. Wstawiając to do (b_4) i po podzieleniu przez q^k, otrzymujemy:

$$p - 1 - \frac{p-1}{q^k} < m \leqslant p - \frac{p-1}{q^k},$$

stąd $p - 2 < m < p$ i stąd $m = p - 1$. Zatem $Cp + 1 = (p-1)q^k = pq^k - q^k$ i stąd wynika, że p dzieli liczbę $q^k + 1$. Wiemy, że p dzieli również liczbę $q^{2k} + q^k + 1$. Zatem p dzieli różnicę tych liczb, czyli liczbę q^{2k}. Jest to jednak sprzeczne z tym, że $\mathrm{nwd}(p, q) = 1$. Przypuszczenie, że $h = 2$ prowadzi więc do sprzeczności. Zatem $h = 1$ i mamy: $A + B + C = q^k - 1$. ⊠

W twierdzeniach 5.6.1 i 5.6.4 rozpatrywane są rozwinięcia ułamków postaci $\frac{1}{p}$. Liczniki są równe 1. To założenie jest tutaj istotne. Ułamek $\frac{3}{7} = 0,(428571)$ ma okres zasadniczy o długości podzielnej przez 3, a suma $42 + 85 + 71 = 198$ nie jest liczbą zbudowaną z samych dziewiątek.

Czy istnieją podobne twierdzenia dla odwrotności potęg liczb pierwszych? Okres zasadniczy ułamka $\frac{1}{3^3} = 0,(037)$ ma długość podzielną przez 3, natomiast suma $0 + 3 + 7 = 10$ nie jest zbudowana z samych dziewiątek. Przykład ten dotyczy potęg liczby pierwszej $p = 3$. Okazuje się, że trójka jest tu liczbą wyjątkową. Udowodnimy, że dla potęg wszystkich innych liczb pierwszych (różnych od 3) również zachodzi rozważana własność i to dla dowolnych q-rozwinięć. Dowód polega tylko na drobnej modyfikacji przedstawionego tu dowodu Ginsberga jego twierdzenia 5.6.1.

5.6.5. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech p będzie liczbą pierwszą taką, że $p \nmid q$, $p \neq 3$ i długość okresu zasadniczego, q-rozwinięcia ułamka $\frac{1}{p}$, jest liczbą podzielną przez 3. Wtedy q-rozwinięcie każdego ułamka postaci $\frac{1}{p^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, ma okres zasadniczy o długości podzielnej przez 3.*

Niech $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że q-rozwinięcie ułamka $\frac{1}{p^n}$ ma okres zasadniczy o długości równej $3k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Podzielmy ten okres na trzy części o długości k. Wtedy suma tych trzech części jest liczbą równą $q^k - 1$, tzn. suma ta jest taką liczbą, która w systemie numeracji o podstawie q jest zbudowana z samych cyfr $q - 1$.

D. Oznaczmy przez d_1 i d_n długości okresów zasadniczych q-rozwinięć odpowiednio ułamków $\frac{1}{p}$ i $\frac{1}{p^n}$. Ponieważ $p^n \mid q^{d_n} - 1$, więc $p \mid q^{d_n} - 1$ i stąd $d_1 \mid d_n$. Z założenia $3 \mid d_1$. Zatem $3 \mid d_n$. Okres zasadniczy q-rozwinięcia ułamka $\frac{1}{p^n}$ ma więc długość podzielną przez 3.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i niech $3k$ będzie długością okresu zasadniczego q-rozwinięcia liczby $\frac{1}{p^n}$. Niech v będzie liczbą utworzoną z cyfr tego okresu zasadniczego. Wtedy $q^{3k} - 1 = p^n v$ i $0 < v < q^{3k} - 1$.

Liczba v jest postaci $Aq^{2k}+Bq^k+C$, gdzie A,B,C są nieujemnymi liczbami całkowitymi mniejszymi od q^k. Ponieważ $0<v<q^{3k}-1$, więc

$$0 < A+B+C < 3\left(q^k-1\right).$$

Wykażemy, że $A+B+C=q^k-1$.

Liczba p^n dzieli liczbę

$$q^{3k}-1=\left(q^k-1\right)\left(q^{2k}+q^k+1\right).$$

i nie dzieli liczby q^k-1 (gdyż $3k$ jest długością okresu zasadniczego); Zatem czynnik $q^{2k}+q^k+1$ jest podzielny przez p. Przypuśćmy, że q^k-1 również jest podzielne przez p. Wtedy $q^k\equiv 1 \pmod p$ i wtedy

$$0 \equiv q^{2k}+q^k+1 \equiv 1+1+1=3 \pmod p,$$

czyli $p\mid 3$ wbrew temu, że $p\neq 3$. Zatem $p\nmid q^k-1$ i z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że liczba $q^{2k}+q^k+1$ jest podzielna przez p^n. Mamy zatem liczbę naturalną $w=\dfrac{q^{2k}+q^k+1}{p^n}$.

Teraz powtarzamy to samo co było w dowodach twierdzeń 5.6.1 i 5.6.4.

Mamy równości

$$(c_1) \qquad \left(q^k-1\right)w=v=Aq^{2k}+Bq^k+C=A\left(q^{2k}-1\right)+B\left(q^k-1\right)+(A+B+C),$$

z których wynika, że suma $A+B+C$ jest podzielna przez q^k-1; niech $A+B+C=h(q^k-1)$, gdzie $h\in\mathbb{N}$. Wiemy, że $0<A+B+C<3(q^k-1)$; zatem $h=1$ lub $h=2$. Wykażemy, że przypadek $h=2$ prowadzi do sprzeczności.

Przypuśćmy, że $h=2$. Wtedy $A+B+C=2\left(q^k-1\right)$ i z równości (b_1), po podzieleniu przez q^k-1, otrzymujemy równość

$$(c_2) \qquad \frac{q^{2k}+q^k+1}{p^n}=Aq^k+A+B+2.$$

Przypuśćmy, że $A=0$. Ponieważ $B\leqslant q^k-1$, $C\leqslant q^k-1$ i $B+C=A+B+C=2(q^k-1)$, więc wtedy $B=q^k-1$ i mamy sprzeczność:

$$p^n=\frac{q^{2k}+q^k+1}{B+2}=\frac{q^{2k}+q^k+1}{q^k+1}=1+\frac{q^{2k}}{q^k+1}.$$

Zatem $A\geqslant 1$. Wykażemy, że

$$(c_3) \qquad p^nA<q^k.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. przypuśćmy, że $A\geqslant \frac{q^k}{p^n}$. Wtedy, wykorzystując (c_2), mamy:

$$\begin{aligned} A+B &= \frac{q^{2k}+q^k+1}{p^n}-Aq^k-2=q^k\frac{q^k}{p^n}+\frac{q^k}{p^n}+\frac{1}{p^n}-Aq^k-2 \\ &\leqslant Aq^k+A+\frac{1}{p^n}-Aq^k-2 \\ &= A+\frac{1}{p^n}-2 \end{aligned}$$

i stąd mamy sprzeczność: $0\leqslant B\leqslant \dfrac{1}{p^n}-2<0$. Zatem istotnie $p^nA<q^k$. W szczególności stąd wynika, że $p^n<q^k$. Zauważmy teraz, że

$$C=2(q^k-1)-(A+B)>2(q^k-1)-\left(\frac{q^k}{p^n}+q^k-1\right)=q^k-\frac{q^k}{p^n}-1.$$

Zatem $q^k - \dfrac{q^k}{p^n} - 1 < C \leqslant q^k - 1$. Po pomnożeniu tego przez p^n i po dodaniu jedynki, otrzymujemy:

$$p^n q^k - q^k - p^n + 1 < Cp^n + 1 \leqslant q^k p^n - p^n + 1. \tag{c_4}$$

Spójrzmy jeszcze raz na początkową równość $q^{3k} - 1 = p^n\left(q^{2k}A + q^k B + C\right)$. Z równości tej wynika, że liczba $Cp^n + 1$ jest podzielna przez q^k. Istnieje więc liczba naturalna m taka, że $Cp^n + 1 = mq^k$. Wstawiając to do (c_4) i po podzieleniu przez q^k, otrzymujemy:

$$p^n - 1 - \frac{p^n - 1}{q^k} < m \leqslant p^n - \frac{p^n - 1}{q^k},$$

stąd $p^n - 2 < m < p^n$ i stąd $m = p^n - 1$. Zatem $Cp^n + 1 = (p^n - 1)q^k = p^n q^k - q^k$ i stąd wynika, że p^n dzieli liczbę $q^k + 1$. Wiemy, że p^n dzieli również liczbę $q^{2k} + q^k + 1$. Zatem p^n dzieli różnicę tych liczb, czyli liczbę q^{2k}. Jest to jednak sprzeczne z tym, że $\mathrm{nwd}(p, q) = 1$. Przypuszczenie, że $h = 2$ prowadzi więc do sprzeczności. Zatem $h = 1$ i mamy: $A + B + C = q^k - 1$. ⊠

★ J. Lewittes, *Midy's theorem for periodic decimals*, preprint 2006.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.7 Cykliczność okresów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{7}$ jest równe $0,(142857)$. Okres zasadniczy ma długość 6. Przestawiając cyklicznie cyfry liczby tworzącej okres zasadniczy, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
0,(142857) &= 1/7,\\
0,(428571) &= 3/7,\\
0,(285714) &= 2/7,\\
0,(857142) &= 6/7,\\
0,(571428) &= 4/7,\\
0,(714285) &= 5/7.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wszystkie możliwe nieskracalne ułamki właściwe o mianowniku 7.

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{17}$ jest równe $0,(0588235294117647)$. Okres zasadniczy ma długość 16. Przestawiając cyklicznie cyfry liczby tworzącej okres zasadniczy, otrzymujemy:

$$\begin{array}{lcllcl}
0,(0588235294117647) &=& 1/17, & 0,(9411764705882352) &=& 16/17,\\
0,(5882352941176470) &=& 10/17, & 0,(4117647058823529) &=& 7/17,\\
0,(8823529411764705) &=& 15/17, & 0,(1176470588235294) &=& 2/17,\\
0,(8235294117647058) &=& 14/17, & 0,(1764705882352941) &=& 3/17,\\
0,(2352941176470588) &=& 4/17, & 0,(7647058823529411) &=& 13/17,\\
0,(3529411764705882) &=& 6/17, & 0,(6470588235294117) &=& 11/17,\\
0,(5294117647058823) &=& 9/17, & 0,(4705882352941176) &=& 8/17,\\
0,(2941176470588235) &=& 5/17, & 0,(7058823529411764) &=& 12/17.
\end{array}$$

Otrzymaliśmy wszystkie możliwe nieskracalne ułamki właściwe o mianowniku 17.

Wykażemy, że taką własność posiadają okresy zasadnicze odwrotności wszystkich specjalnych liczb pierwszych. Przypomnijmy, że liczbę pierwszą p nazywamy specjalną, jeśli okres zasadniczy, rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{1}{p}$, ma długość $p - 1$. Wykażemy również, że podobną własność posiadają okresy zasadnicze q-rozwinięć.

Liczba pierwsza 13 nie jest specjalna. Rozwinięcie dziesiętne jej odwrotności jest równe $0,(076923)$. Okres zasadniczy ma długość 6. Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{2}{13}$ jest równe $0,(153846)$. Okres zasadniczy ułamka $\frac{2}{13}$ nie powstaje przez cykliczne przestawienie cyfr poprzedniego okresu. Mamy tu jednak ciekawą sytuację:

$$\begin{array}{rclrcl}
0,(076923) &=& 1/13, & 0,(153846) &=& 2/13,\\
0,(769230) &=& 10/13, & 0,(538461) &=& 7/13,\\
0,(692307) &=& 9/13, & 0,(384615) &=& 5/13,\\
0,(923076) &=& 12/13, & 0,(846153) &=& 11/13,\\
0,(230769) &=& 3/13, & 0,(461538) &=& 6/13,\\
0,(307692) &=& 4/13, & 0,(615384) &=& 8/13.
\end{array}$$

Tutaj również otrzymaliśmy wszystkie możliwe nieskracalne ułamki właściwe o mianowniku 13. Ułamki te powstały przez cykliczne przestawianie cyfr dwóch okresów: (076923) i (153846). Z pierwszym okresem stowarzyszone są liczniki $1, 3, 4, 9, 10, 12$. Z drugim okresem stowarzyszone są liczniki $2, 5, 6, 7, 8, 11$.

Spójrzmy na rozwinięcia dziesiętne ułamków postaci $\frac{a}{41}$, gdzie $1 \leqslant a \leqslant 40$. Okres zasadniczy każdego takiego ułamka ma długość 5. Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{41}$ jest równe $0,(02439)$. Przestawiając cyklicznie cyfry okresu zasadniczego otrzymamy pięć liczb przy pomocy których uzyskamy pięć liczników. Wszystkich możliwych liczników jest $\varphi(41) = 40$. Chcąc więc tylko cyklicznie przestawiać cyfry musimy mieć najpierw $8 = 40/5$ różnych liczb pięciocyfrowych (dopuszczając zera na początku). Takich 8 liczb istotnie tu mamy:

$$\begin{array}{rclrclrcl}
0,(02439) &=& 1/41, & 0,(04878) &=& 2/41, & 0,(07317) &=& 3/41,\\
0,(24390) &=& 10/41, & 0,(48780) &=& 20/41, & 0,(73170) &=& 30/41,\\
0,(43902) &=& 18/41, & 0,(87804) &=& 36/41, & 0,(31707) &=& 12/41,\\
0,(39024) &=& 16/41, & 0,(78048) &=& 32/41, & 0,(17073) &=& 7/41,\\
0,(90243) &=& 37/41, & 0,(80487) &=& 33/41, & 0,(70731) &=& 29/41,\\
\\
0,(09756) &=& 4/41, & 0,(12195) &=& 5/41, & 0,(14634) &=& 6/41,\\
0,(97560) &=& 40/41, & 0,(21951) &=& 9/41, & 0,(46341) &=& 19/41,\\
0,(75609) &=& 31/41, & 0,(19512) &=& 8/41, & 0,(63414) &=& 26/41,\\
0,(56097) &=& 23/41, & 0,(95121) &=& 39/41, & 0,(34146) &=& 14/41,\\
0,(60975) &=& 25/41, & 0,(51219) &=& 21/41, & 0,(41463) &=& 17/41,\\
\\
0,(26829) &=& 11/41, & 0,(36585) &=& 15/41,\\
0,(68292) &=& 28/41, & 0,(65853) &=& 27/41,\\
0,(82926) &=& 34/41, & 0,(58536) &=& 24/41,\\
0,(29268) &=& 12/41, & 0,(85365) &=& 35/41,\\
0,(92682) &=& 38/41, & 0,(53658) &=& 22/41.
\end{array}$$

Otrzymaliśmy wszystkie możliwe nieskracalne ułamki właściwe o mianowniku 41. Ułamki te powstały przez cykliczne przestawianie cyfr ośmiu okresów:

$$(02439),\ (04878),\ (07317),\ (09756),\ (12195),\ (14634),\ (26829),\ (36585).$$

Z każdym takim okresem związane są odpowiednio następujące zbiory liczników:

$$\{1,10,16,18,37\},\quad \{2,20,32,33,36\},\quad \{3,7,13,29,30\},\quad \{4,23,25,31,40\},$$
$$\{5,8,9,21,39\},\quad \{6,14,17,19,26\},\quad \{11,12,28,34,38\},\quad \{15,22,24,27,35\}.$$

Rozpatrywaliśmy tylko odwrotności liczb pierwszych. Odwrotności dowolnych liczb naturalnych, względnie pierwszych z 10, też posiadają podobne własności. Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{21}$ jest równe $0,(047619)$. Okres zasadniczy ma długość 6. Liczb naturalnych mniejszych od 21 i względnie pierwszych z 21 jest $\varphi(21) = 12$. W tym przypadku mamy:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
0,(047619) &=& 1/21; & 0,(095238) &=& 2/21,\\
0,(476190) &=& 10/21; & 0,(952380) &=& 20/21,\\
0,(761904) &=& 16/21; & 0,(523809) &=& 11/21,\\
0,(619047) &=& 13/21; & 0,(238095) &=& 5/21,\\
0,(190476) &=& 4/21; & 0,(380952) &=& 8/21,\\
0,(904761) &=& 19/21; & 0,(809523) &=& 17/21.
\end{array}$$

Otrzymaliśmy wszystkie możliwe nieskracalne ułamki właściwe o mianowniku 21. Ułamki te powstały przez cykliczne przestawianie cyfr dwóch okresów: (047619) i (095238). Z pierwszym okresem stowarzyszone są liczniki $1,4,10,13,16,19$. Z drugim okresem stowarzyszone są liczniki $2,5,8,11,17,20$.

Podobne własności posiadają wszystkie q-rozwinięcia nieprzywiedlnych ułamków o mianownikach względnie pierwszych z q. Ma to dość proste uzasadnienie, które teraz przedstawimy.

Załóżmy, że $q \geqslant 2$, $m \geqslant 2$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi i niech

$$U_m = \{a \in \mathbb{N};\ 1 \leqslant a < m,\ \mathrm{nwd}(a,m) = 1\},$$

tzn. U_m jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych mniejszych od m i względnie pierwszych z liczbą m. Zbiór ten posiada dokładnie $\varphi(m)$ elementów.

Rozpatrzmy q-rozwinięcie ułamka $\frac{1}{m}$. Rozwinięcie to jest okresowe i okres zasadniczy jest czysty (patrz 4.4.9). Oznaczmy przez d długość okresu zasadniczego. Dla $d = 1$ rozważane zagadnienie jest oczywiste. Zakładać będziemy, że $d \geqslant 2$.

Liczba d jest długością okresu zasadniczego q-rozwinięcia każdego ułamka postaci $\frac{a}{m}$, gdzie $a \in U_m$ (patrz 4.4.9). Dla każdego $a \in U_m$ mamy więc okres zasadniczy

$$b^{(a)} = \left(b_1^{(a)}, b_2^{(a)}, \dots, b_d^{(a)}\right),$$

długości d; liczby $b_1^{(a)}, \dots, b_d^{(a)}$ należą do zbioru $\{0,1,\dots,q-1\}$ i co najmniej dwie z nich są różne (patrz 4.2.5). Zbiór wszystkich takich okresów oznaczmy przez $\mathcal{B}_m$, tzn.

$$\mathcal{B}_m = \left\{b^{(a)};\ a \in U_m\right\}.$$

Zbiór $\mathcal{B}_m$ posiada dokładnie $\varphi(m)$ elementów.

Dla każdego $a \in U_m$, przez $v^{(a)}$ oznaczać będziemy liczbę

$$b_1^{(a)}q^{d-1} + b_2^{(a)}q^{d-2} + \cdots + b_{d-1}^{(a)}q + b_d^{(a)},$$

czyli liczbę utworzoną z cyfr okresu zasadniczego $b^{(a)}$. Przy takich oznaczeniach, dla każdego $a \in U_m$ zachodzi równość

$$\frac{a}{m} = \frac{v^{(a)}}{q^d - 1}$$

(patrz 4.4.9) i ponadto $0 < v^{(a)} < q^d - 1$. Zauważmy, że

$$\frac{v^{(a)}}{q^d - 1} = \frac{a}{m} = a \cdot \frac{1}{m} = \frac{av^{(1)}}{q^d - 1}.$$

Mamy więc następujące stwierdzenie.

5.7.1. *Dla każdego $a \in U_m$ zachodzi równość $av^{(1)} = v^{(a)}$.*

Jeśli $y = (y_1, \dots, y_n)$ jest dowolnym ciągiem długości d, to przez $T(y)$ oznaczać będziemy ciąg $(y_2, y_3, \dots, y_d, y_1)$. Mówić będziemy w tym przypadku, że ciąg $T(y)$ jest *cyklicznym przestawieniem* ciągu y. Ciąg powstały z ciągu y przez dwukrotne zastosowanie operacji T oznaczać będziemy przez $T^2(y)$, tzn. $T^2(y) = T(T(y))$. Analogicznie:

$$T^3(y) = T(T^2(y)) = T(T(T(y))),$$

itd. W szczególności $T^d(y) = y$.

Istotną rolę odgrywa następujące stwierdzenie.

5.7.2. *Jeśli b jest ciągiem należącym do zbioru $\mathcal{B}_m$, to ciąg $T(b)$ jest różny od ciągu b i również należy do zbioru $\mathcal{B}_m$.*

D. Niech $b = (b_1, \dots, b_n)$ będzie ciągiem postaci $b^{(a)}$ dla pewnego $a \in U_m$ i niech $v = v^{(a)}$, $x = \frac{a}{m}$. Mamy wtedy: $b_i = b_i^{(a)}$ dla $i = 1, \dots, d$ oraz $\frac{a}{m} = \frac{v}{q^d-1}$.

Oznaczmy przez b' ciąg $T(b) = (b_2, b_3, \dots . b_d, b_1)$. Ponieważ co najmniej dwa wyrazy ciągu b są różne, więc jest oczywiste, że $b' \neq b$.

Niech v' będzie liczbą, której cyframi, w zapisie numeracji o podstawie q, są kolejne wyrazy ciągu b', tzn.

$$v' = b_2 q^{d-1} + b_3 q^{d-2} + \cdots + b_d q + b_1.$$

Zauważmy, że $v' = qv - (q^d - 1)b_1$.

Rozpatrzmy nową liczbę wymierną

$$x' = \frac{v'}{q^d - 1}.$$

Wykażemy, że ta liczba jest postaci $\frac{a'}{m}$ dla pewnego $a' \in U_m$.

Z nierówności $v < q^d - 1$ wynika nierówność $v' < q^d - 1$ i stąd $0 < x' < 1$. Niech $a' = qa - b_1 m$. Mamy wtedy:

$$x' = \frac{v'}{q^d - 1} = \frac{qv - (q^d - 1)b_1}{q^d - 1} = q\frac{v}{q^d - 1} - b_1 = q\frac{a}{m} - b_1 = \frac{qa - b_1 m}{m} = \frac{a'}{m},$$

czyli $x' = \frac{a'}{m}$. Ale $0 < x' < 1$, więc a' jest liczbą naturalną i mniejszą od m. Ponadto,

$$\text{nwd}(a', m) = \text{nwd}(ga - b_1 m, m) = \text{nwd}(ga, m) = 1.$$

Licznik a' należy więc do zbioru U_m. Z równości $\frac{a'}{m} = x' = \frac{v'}{q^d - 1}$ wynika, że ciąg b' jest okresem zasadniczym q-rozwinięcia liczby $\frac{a'}{m}$. Zatem $T(b) = b' \in \mathcal{B}_m$. ⊠

Niech $b = b^{(a)}$, $b' = b^{(a')}$ będą okresami należącymi do zbioru $\mathcal{B}_m$. Mówić będziemy, że okresy te są *równoważne* i pisać $b \sim b'$, jeśli istnieje liczba naturalna k taka, że

$$b' = T^k(b).$$

Innymi słowy, okresy b i b' są równoważne jeśli jeden z nich powstaje z drugiego przez przestawienie pewnych początkowych wyrazów na koniec. Jest jasne, że $\sim$ jest relacją typu równoważności w zbiorze $\mathcal{B}_m$. Mamy więc klasy abstrakcji względem tej relacji. Każda klasa abstrakcji jest, na mocy stwierdzenia 5.7.2, d-elementowym zbiorem postaci

$$\left\{ b, T(b), T^2(b), \dots, T^{d-1}(b) \right\},$$

gdzie $b \in \mathcal{B}_m$. Ponieważ wszystkich elementów zbioru $\mathcal{B}_m$ jest $\varphi(m)$, różnych klas abstrakcji jest dokładnie $\varphi(m)/d$. Przypomnijmy w tym miejscu (patrz 4.4.9), że liczba d jest dzielnikiem liczby $\varphi(m)$. Udowodniliśmy zatem:

5.7.3. *Relacja równoważności $\sim$ dzieli zbiór $\mathcal{B}_m$ na $\frac{\varphi(m)}{d}$ parami różnych klas abstrakcji. Każda klasa abstrakcji ma dokładnie d elementów.*

W szczególnym przypadku, gdy $d = \varphi(m)$, mamy tylko jedną klasę abstrakcji. Tak jest, na przykład, gdy m jest specjalną liczbą pierwszą. Konsekwencją stwierdzeń 5.7.3 i 5.7.1 jest następujące twierdzenie.

5.7.4. *Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech p będzie q-specjalną liczbą pierwszą, tzn. okres zasadniczy q-rozwinięcia ułamka $\frac{1}{p}$ ma dokładnie $p-1$ cyfr. Niech v będzie liczbą utworzoną, w systemie numeracji o podstawie q, z kolejnych cyfr okresu zadadniczego tego q-rozwinięcia (jeśli na początku występują zera, to je zostawiamy). Wtedy każda z liczb*

$$2v,\ 3v,\ \dots,\ (p-1)v,$$

w systemie numeracji o podstawie q, powstaje z liczby v przez przestawienie pewnej grupy początkowych cyfr liczby v na koniec.

Zanotujmy to samo dla rozwinięć dziesiętnych.

5.7.5. *Załóżmy, że $p \geqslant 7$ jest taką liczbą pierwszą, że okres zasadniczy rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{1}{p}$ ma długość równą $p-1$ (tzn. p jest specjalną liczbą pierwszą). Niech v będzie liczbą utworzoną z kolejnych cyfr okresu zasadniczego rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{1}{p}$ (jeśli na początku występują zera, to je zostawiamy). Wtedy każda z liczb*

$$2v,\ 3v,\ \dots,\ (p-1)v,$$

powstaje z liczby v przez przestawienie pewnej grupy początkowych cyfr liczby v na koniec.

Spójrzmy na dwa przykłady ilustrujące twierdzenie 5.7.5.

Wiemy, że liczba pierwsza 7 jest specjalna. Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{7}$ jest równe $0,(142857)$. Okres zasadniczy ma długość 6. Liczba v utworzona z tego okresu jest tutaj równa 142857. Mamy 6 równości:

$$\begin{array}{rclrcl} 1\cdot 142857 &=& 142857, & 4\cdot 142857 &=& 571428,\\ 2\cdot 142857 &=& 285714, & 5\cdot 142857 &=& 714285,\\ 3\cdot 142857 &=& 428571, & 6\cdot 142857 &=& 857142. \end{array}$$

Liczby występujące po prawej stronie każdej z tych równości powstają z liczby 142857 przez przestawienie pewnej grupy jej początkowych cyfr na koniec.

Liczba pierwsza 17 jest również specjalna. Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{17}$ jest równe $0,(0588235294117647)$. Okres zasadniczy ma długość 16. Liczba v utworzona z tego okresu jest tutaj równa 0588235294117647. Mamy 16 równości:

$$\begin{array}{rclrcl} 1\cdot v &=& 0588235294117647, & 9\cdot v &=& 5294117647058823,\\ 2\cdot v &=& 1176470588235294, & 10\cdot v &=& 5882352941176470,\\ 3\cdot v &=& 1764705882352941, & 11\cdot v &=& 6470588235294117,\\ 4\cdot v &=& 2352941176470588, & 12\cdot v &=& 7058823529411764,\\ 5\cdot v &=& 2941176470588235, & 13\cdot v &=& 7647058823529411,\\ 6\cdot v &=& 3529411764705882, & 14\cdot v &=& 8235294117647058,\\ 7\cdot v &=& 4117647058823529, & 15\cdot v &=& 8823529411764705,\\ 8\cdot v &=& 4705882352941176, & 16\cdot v &=& 9411764705882352. \end{array}$$

Liczby występujące po prawej stronie każdej z tych równości powstają z liczby v przez przestawienie pewnej grupy jej początkowych cyfr na koniec.

Zatrzymajmy się na rozwinięciach dziesiętnych i i powróćmy do zbioru $\mathcal{B}_m$, wszystkich okresów rozwinięć dziesiętnych właściwych ułamków nieprzywiedlnych postaci $\frac{a}{m}$; liczba m jest względnie pierwsza z 10. Zbiór ten jest sumą mnogościową parami różnych klas abstrakcji wyznaczonych przez relację $\sim$. Z każdej klasy abstrakcji wybierzmy dokładnie jeden okres i zbiór wszystkich tak wybranych okresów oznaczmy przez A. W tym przypadku A nazwany jest *zbiorem reprezentantów* zbioru $\mathcal{B}_m$ względem relacji $\sim$.

5.7.6 (J.K. Schiller 1959)**.** *Niech $p \geqslant 7$ będzie liczbą pierwszą. Przedstawmy ją w postaci $p = 10k + r$, gdzie $k, r \in \mathbb{N}_0$, $< r < 10$. Niech A będzie dowolnym zbiorem reprezentantów zbioru $\mathcal{B}_p$ względem relacji $\sim$.*

Wtedy w zbiorze $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ istnieje dokładnie $11-r$ cyfr występujących, we wszystkich okresach należących do zbioru A, dokładnie k razy i istnieje dokładnie $r-1$ cyfr występujących dokładnie $k+1$ razy. ([Mon] 66(9)(1959) 798).

Dla $p = 13 = 1 \cdot 10 + 3$ rozważanym zbiorem reprezentantów jest, na przykład, zbiór

$$A = \{(076923),\ (153846)\}.$$

Dwie cyfry, 3 i 6, występują tu dokładnie dwa razy. Każda z pozostałych cyfr występuje dokładnie jeden raz.

Dla $p = 41 = 4 \cdot 10 + 1$ rozważanym zbiorem reprezentantów jest, na przykład, zbiór

$$A = \{(02439),\ (04878),\ (07317),\ (09756),\ (12195),\ (14634),\ (26829),\ (36585)\}.$$

Każda cyfra układu dziesiętnego pojawia się tu dokładnie 4 razy.

★ A. Balfour, *Rapid decimal expansions...*, [MG] 87(509)(2003) 300-305.
L. E. Dickson, *Periodic decimal fractions*, [Dic1] 159-179.
G. H. Hardy, E. M. Wright, *The representations of numbers by decimals*, [HW5] 107-128.
J. Lewittes, *Distribution of digits in periodic decimals*, [PorM] 62(3)(2005) 325-335.
H. Rademacher, O. Toeplitz, *Okresy rozwinięć dziesiętnych liczb wymiernych*, [RaT] 182-200.
J. K. Schiller, *A theorem in the decimal representation of rationals*, [Mon] 66(9)(1959) 797-798.

Literatura

[Cmj] The College Mathematics Journal, The Mathematical Association of America.

[Dic1] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. I. *Divisibility and primality*, Carnegie Institute of Washington, 1919. Reprinted by AMS Chelsea Publishing, New York, 1992.

[FieK] R. M. Fedorov, A. J. Kanel-Belov, A. K. Kovaldzhi, I. W. Yashchenko, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* 1993 – 2005 (po rosyjsku), MCNMO Moskwa, 2006.

[Gins] B. D. Ginsberg, *Midy's (Nearly) theorem: an extension after* 165 *years*, The College Mathematics Journal, 35(1)(2004), 26-30.

[Gy04] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 2004.

[HW5] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1979.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N-3] A. Nowicki, *Liczby Kwadratowe*, Podróże po Imperium Liczb, cz.3, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2009.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[PorM] Portugaliae Mathematica, portugalskie czasopismo matematyczne wychodzące od 1937 roku.

[RaT] H. Rademacher, O. Toeplitz, *O Liczbach i Figurach*, PWN, Warszawa, 1956.

[S50] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa - Wrocław, 1950.

[Shan] D. Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, Chelsea, New York, 1978.

[Wino] I. Winogradow, *Elementy Teorii Liczb*, PWN, Warszawa, 1954.