

---

Olsztyn, Toruń, 2011

---

## Podróże po Imperium Liczb

# 13. Nierówności

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Ostatnia aktualizacja: 4 maja 2013

<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>1 Nierówności i funkcje wypukłe</b>	<b>5</b>
1.1 Funkcje wypukłe i ich własności . . . . .	5
1.2 Funkcje J-wypukłe . . . . .	10
1.3 Funkcje wypukłe i ciągłość . . . . .	11
1.4 Funkcje wypukłe i druga pochodna . . . . .	11
1.5 Nierówność Karamaty . . . . .	13
<b>2 Klasyczne nierówności</b>	<b>17</b>
2.1 Średnia arytmetyczna i średnia geometryczna . . . . .	17
2.2 Średnia harmoniczna i średnia kwadratowa . . . . .	22
2.3 Średnie złożone . . . . .	23
2.4 Średnie potęgowe . . . . .	23
2.5 Nierówność Bernoulliego . . . . .	25
2.6 Nierówność Cauchy'ego . . . . .	26
2.7 Różne klasyczne nierówności . . . . .	29
<b>3 Twierdzenie Muirheada</b>	<b>33</b>
3.1 Podziały . . . . .	33
3.2 Wielomian symetryczny stowarzyszony z podziałem . . . . .	36
3.3 Twierdzenie Muirheada i jego dowód . . . . .	38
3.4 Twierdzenie Muirheada dla podziałów liczb całkowitych . . . . .	41
3.5 Twierdzenie Muirheada dla podziałów liczb wymiernych . . . . .	42
3.6 Nierówności cykliczne . . . . .	43
<b>4 Jednorodne nierówności wielomianowe</b>	<b>47</b>
4.1 Jednorodne nierówności wielomianowe $n$ zmiennych . . . . .	47
4.2 Problem Janousa . . . . .	49
4.3 Jednorodne nierówności wielomianowe dwóch zmiennych . . . . .	51
4.4 Jednorodne nierówności wielomianowe trzech zmiennych stopnia 2 . . . . .	52
4.5 Jednorodne nierówności wielomianowe trzech zmiennych stopnia 3 . . . . .	53
4.6 Jednorodne nierówności wielomianowe trzech zmiennych stopnia 4 . . . . .	55
4.7 Jednorodne nierówności wielomianowe trzech zmiennych stopnia 5 . . . . .	56
4.8 Jednorodne nierówności wielomianowe trzech zmiennych stopnia 6 . . . . .	56

4.9	Jednorodne nierówności wielomianowe trzech zmiennych stopnia $> 6$ . . . . .	57
4.10	Jednorodne nierówności wielomianowe trzech zmiennych stopnia $n$ . . . . .	57
4.11	Jednorodne nierówności wielomianowe czterech zmiennych . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Niejednorodne nierówności wielomianowe</b>	<b>59</b>
5.1	Nierówności wielomianowe $n$ zmiennych . . . . .	59
5.2	Nierówności wielomianowe jednej zmiennej . . . . .	60
5.3	Nierówności wielomianowe dwóch zmiennych . . . . .	60
5.4	Nierówności wielomianowe trzech zmiennych . . . . .	61
5.5	Nierówności wielomianowe dla boków trójkąta . . . . .	64
5.6	Nierówności wielomianowe czterech zmiennych . . . . .	65
5.7	Nierówności z liczbami $a^n + b^n$ . . . . .	66
5.8	Nierówności wielomianowe dla liczb całkowitych . . . . .	67
5.9	Różne nierówności wielomianowe . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Jednorodne nierówności wymierne</b>	<b>73</b>
6.1	Jednorodne nierówności wymierne $n$ zmiennych . . . . .	73
6.2	Nierówność Nesbitta i jej uogólnienia . . . . .	76
6.3	Jednorodne nierówności wymierne dwóch zmiennych . . . . .	79
6.4	Jednorodne nierówności wymierne trzech zmiennych . . . . .	79
6.5	Jednorodne nierówności wymierne czterech zmiennych . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Różne nierówności wymierne</b>	<b>89</b>
7.1	Nierówności wymierne ze stałym iloczynem . . . . .	89
7.2	Nierówności wymierne $n$ zmiennych . . . . .	93
7.3	Nierówności wymierne jednej zmiennej . . . . .	95
7.4	Nierówności wymierne dwóch zmiennych . . . . .	95
7.5	Nierówności wymierne trzech zmiennych . . . . .	97
7.6	Nierówności wymierne czterech zmiennych . . . . .	102
7.7	Nierówności wymierne dla liczb całkowitych . . . . .	103
<b>8</b>	<b>Nierówności z pierwiastkami</b>	<b>109</b>
8.1	Nierówności z pierwiastkami $n$ zmiennych . . . . .	109
8.2	Nierówności z pierwiastkami dwóch zmiennych . . . . .	110
8.3	Jednorodne nierówności z pierwiastkami trzech zmiennych . . . . .	110
8.4	Niejednorodne nierówności z pierwiastkami trzech zmiennych . . . . .	115
8.5	Nierówności z pierwiastkami czterech zmiennych . . . . .	118
8.6	Nierówności z pierwiastkami i liczbami naturalnymi . . . . .	118
8.7	Różne nierówności z pierwiastkami . . . . .	120
<b>9</b>	<b>Różne nierówności</b>	<b>121</b>
9.1	Pochodna i nierówności . . . . .	121
9.2	Nierówności z $\max$ i $\min$ . . . . .	122
9.3	Nierówności z bezwzględną wartością . . . . .	124
9.4	Nierówności z częścią całkowitą . . . . .	124
9.5	Nierówności z częścią ułamkową . . . . .	126
9.6	Nierówności potęgowe . . . . .	127

9.7	Nierówności z logarytmami . . . . .	128
9.8	Nierówności z sumą lub iloczynem cyfr . . . . .	129
9.9	Nierówności z silniami . . . . .	130
9.10	Nierówności z symbolami Newtona . . . . .	132
9.11	Nierówności z nwd i nww . . . . .	133
9.12	Nierówności z liczbami pierwszymi . . . . .	136
9.13	Nierówności z klasycznymi funkcjami arytmetycznymi . . . . .	138
9.14	Nierówności i ciągi rekurencyjne . . . . .	143
9.15	Nierówności z funkcjami trygonometrycznymi . . . . .	144
9.16	Inne nierówności . . . . .	145
<b>Spis cytowanej literatury</b>		<b>146</b>
<b>Skorowidz nazwisk</b>		<b>153</b>
<b>Skorowidz</b>		<b>156</b>

---

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń  
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

---

## Skorowidz

- Aassila M., 97  
Aleksiejew P., 102  
Andreescu T., 13, 146  
Andrica D., 146  
Annapurna U., 141  
Arslanagić S., 57  
Ashiba I., 31
- Baranowa I.W., 146  
Bateman P., 135  
Beckenbach E.F., 10, 16, 29, 146  
Bednarek W., 146  
Bellman R., 16, 29, 146  
Bencze M., 74  
Berent A., 41  
Bernik V.I., 146  
Bin X., 146  
Boltianski W.G., 146  
Bos L., 48, 55  
Bradley C.J., 146  
Browkin J., 146  
Bryński M., 147  
Bullen P.S., 13, 22, 24, 31, 41, 146, 147
- Carlitz L., 65  
Cauchy A., 26, 29  
Chandrasekharan K., 147  
Chau L.H., 147  
Chen H., 129  
Ciesielska D., 147  
Ciesielski K., 147  
Cirtoaje V., 55, 65, 81, 86, 87, 99–102, 112, 115, 146  
Cmyszlajew W.K., 29  
Cooper C., 151  
Critch A., 68  
Cucurezeanu I., 146  
Cynk S., 18  
Czakyryjan K., 147
- Delgado R.V., 149  
Deykin L., 77  
Diananda P.H., 78  
Djekovicz D., 77  
Djukić D., 147  
Doduniekow S., 147  
Dospinescu G., 98, 109, 146  
Družkowski L.M., 147  
Dworianinow S.W., 71, 147
- Eclund E.F., 133  
Eggleton R.B., 133  
Enescu B., 13, 146  
Erdős P., 135, 142
- Farhi B., 135  
Fejér, 144  
Feng Z., 146  
Fichtenholz G.M., 147  
Finc A.M., 10, 24, 26, 29, 78, 149  
Fomin D.V., 147  
Fuchs L., 147
- Galpieri G.A., 148  
Genkin S.A., 147  
Godunova E., 77  
Górnicki J., 10, 13, 26, 46, 78, 148  
Grigorjan A.A., 151  
Grinberg D., 61, 83, 111  
Gueron S., 16  
Guy R.K., 148
- Hadamard J., 11  
Hajłasz P., 31  
Hanson D., 134, 135  
Hardy G.H., 11, 13, 16, 22, 24, 41, 148  
Hegedüs Y., 71  
Hin L.C., 41
- Isaacs I.M., 148  
Itenberg I.W., 147  
Izboldin O.T., 10
- Jackson T., 144  
Jadrenko M.I., 152  
Janković V., 147  
Janous W., 49, 85, 97  
Jarski A., 71  
Jasinowyj E.A., 147  
Jeśmanowicz L., 148  
Jędrzejewicz P., 148  
Jegorow A.A., 152  
Jensen K.L., 8, 10
- Kalb J., 135  
Karamata J., 16, 148  
Kartaszow I.W., 152  
Kedlaya K., 21  
Kennedy R.E., 151  
Khoi L.H., 147

- Khrabrov A.I., 31, 148  
Kin-Yin Li, 95  
Klamkin M.S., 57, 65, 113, 122  
Koninck De J.-M., 148, 149  
Konjagin S.W., 151  
Kraśński T., 149  
Kryszewski W., 149  
Kuczma M., 50, 76  
Kumor P., 51, 101  
Kuratowski K., 149  
Kurlandczyk L., 10, 22, 24, 26, 29, 51, 78, 102, 122, 148  
Kurschak J., 149
- Lapin C.E., 146  
Lascu M., 146  
Le Huu Dien Khue, 84  
Le Trung Kien, 113, 117  
Lee G., 146  
Lee H., 10, 24, 31, 65, 76, 78, 81, 84, 85, 101, 149  
Leech J., 136  
LeLionnais F., 149  
Leman W.G., 146  
Levin V., 31, 77  
Li K.Y., 41  
Lighthill M., 77  
Littlewood J.E., 11, 13, 16, 22, 24, 41, 148  
Liu A., 149  
Łoś J., 148  
Lord N., 22  
Lore M., 92  
Łukaszewicz G., 31
- Mąkowski A., 141  
Malikic S., 93  
Manfrino R.B., 149  
Marghidanu D., 105  
Marshall A.W., 41, 149  
Martin G., 139  
Marzantowicz W., 149  
Matić I., 147  
Maurin K., 149  
Melnikow O.W., 146  
Mercier A., 148, 149  
Michaiłowski W.I., 152  
Mildorf T.J., 114, 149  
Minkowski, 30  
Mitev T., 21, 75  
Mitrinović D.S., 10, 11, 13, 22–24, 26, 29, 41, 78, 146, 149, 150  
Mollin R.A., 150  
Morozowa E.A., 150
- Muirhead R.E., 33, 38  
Murty V.N., 52, 85, 116  
Mushkarov O., 115
- Nair M., 135  
Narkiewicz W., 150  
Nathanson M.B., 150  
Nesbitt A.M., 76–78  
Newman D.J., 139  
Nguyen Anh Tuan, 114  
Nguyen Van Thach, 84  
Nguyen Viet Anh, 79, 81, 85  
Nicula V., 123  
Nihei M., 31  
Nikolov N., 115  
Northover F.H., 78  
Novosad P., 77  
Nowicki A., 41, 150
- Olkin I., 41, 149  
Opial Z., 31  
Ortega J.A.G., 149
- Pachpatte B.G., 11, 13, 31, 151  
Pawłowski H., 22, 151  
Pećarić J.E., 10, 24, 26, 29, 78, 149  
Perz G., 83  
Petrović N., 147  
Pham Kim Hung, 63, 66, 81–84, 86, 87, 93, 99, 102, 103, 111–113, 116–118, 122, 151  
Phan Hong Son, 116  
Phan Thanh Nam, 110, 115  
Phan Thanh Viet, 116  
Piegat E., 151  
Pietrakow I.S., 150  
Pinter L., 71  
Pixton A., 90  
Płoski A., 151  
Pogoda Z., 147  
Polya G., 11, 13, 16, 22, 24, 41, 148  
Pompe W., 50
- Rabinowicz W.L., 50  
Rademacher H., 151  
Rempała J., 146  
Riasa S., 100  
Riasat S., 112, 122, 151  
Rozenberg M., 63, 85
- Saadatmanesh M., 151  
Sadowniczyj W.A., 151  
Santos D.A., 152  
Sato N., 71, 95

Sauvé L., 97  
Scholze P., 83  
Schur I., 16  
Shapiro H.S., 77  
Siebriuk M., 31  
Siedrakjan N., 95  
Sierpiński W., 22, 151, 152  
Siwaszinskij I.H., 152  
Stachowski E., 152  
Steele J.M., 24, 29, 31, 46, 152  
Steinhaus H., 151  
Stellenbosch, 97  
Stenger A., 135  
Straszewicz S., 146, 152  
Suprun W.P., 152  
Szczepański J., 147  
Szego G., 15  
Szneperman L.B., 152  
Sznirelman L., 152

Tessler R., 16  
Tołpygo A.K., 148  
Toeplitz O., 151  
Tomalczyk W., 151  
Trosh K., 77  
Trost E., 152  
Tsaoussoglou P.E., 63, 101

Vaidya A.M., 139  
Vasić P.M., 11, 13, 22, 24, 26, 29, 41, 78, 146, 150  
Vo Quoc Ba Can, 111

Wang E.T.H., 62  
Wasilev N.B., 152  
Wilenkij I.J., 146  
Winogradow I., 152  
Wright E.M., 53, 148  
Wyszenskij W.A., 152

Yasinovyi E.A., 71  
Yee L.P., 146  
Young R.M., 22

Zalauf A., 77  
Zalewska A., 152  
Zarzycki P., 149  
Żuk I.K., 146  
Zvonaru T., 84, 101

## Skorowidz

- bezwzględna wartość, 10, 12, 27–29, 31, 67, 86, 101, 123–127, 144
- całka, 11, 31, 128
- ciąg, 47
- arytmetyczny, 67, 107, 120, 129, 145
  - Fibonacciego, 143
  - geometryczny, 145
  - kolejnych liczb pierwszych, 137, 138
  - nieograniczony, 131
  - nieskończony, 21, 23, 120
  - ograniczony, 127
  - rekurencyjny, 106, 143
  - skończony, 13–15, 22–24, 30, 33, 35, 36, 39, 41–46
  - wagowy, 43, 45, 48
- cyfry, 108, 129, 130
- część całkowita, 2, 59, 124–126, 141, 143
- część ułamkowa, 126, 127
- dwumian Newtona, 25
- funkcja
- $\varphi$ , 2, 107, 136, 138–141
  - $\mu$  Möbiusa, 138
  - $\pi$ , 136
  - $\sigma$ , 138, 140–142
  - $\tau$ , 138–141
  - arytmetyczna, 138
  - ciągła, 10, 11
  - J-wklęsła, 10
  - J-wypukła, 10
  - kosinus, 144, 145
  - liniowa, 6
  - malejąca, 69
  - nieparzysta, 145
  - parzysta, 145
  - przeciwna, 6
  - rosnąca, 7, 11, 12, 96, 127, 128
  - różniczkowalna, 31, 121
  - ściśle wklęsła, 6
  - ściśle wypukła, 6, 11, 12
  - sinus, 12, 144
  - stała, 6, 7
  - tangens, 144, 145
  - wklęsła, 6, 7, 10
  - wypukła, 6–15, 27, 41, 47, 53, 54, 64, 65, 81, 113, 117
- granica ciągu, 24, 135, 136, 145
- iloczyn cyfr, 129, 130
- IMO, 1, 48, 62–65, 87, 92, 107–109, 111, 112
- Longlist, 10, 20–22, 48, 52, 57, 58, 64, 76, 78, 81, 85, 93, 94, 125, 126, 129, 131, 132, 142
  - Shortlist, 59, 64, 65, 67, 74, 87, 88, 90, 91, 93, 96, 103, 123, 140–144
- indukcja matematyczna, 8, 17, 73
- indukcja wsteczna, 18
- kolejne liczby naturalne, 106–108
- liczba
- $\gamma$ , 145
  - $\pi$ , 12, 109, 120, 132, 133, 141, 144, 145
  - $e$ , 12, 13, 131, 145
  - dzielników naturalnych, 138
  - Fibonacciego, 143
  - kwadratowa, 107, 131, 137–140, 143
  - nieparzysta, 136
  - pierwsza, 127, 136–140
  - postaci  $a^n + b^n$ , 66
  - złożona, 140
  - zespolona, 29, 44, 124
- liczby względnie pierwsze, 107
- logarytm, 54, 120, 125, 126, 128, 129, 136, 138, 142, 145
- macierz, 44
- Maple, 1
- max, 23, 24, 31, 49, 50, 53, 59, 122, 123
- min, 23, 24, 31, 41, 59, 120, 122, 123
- największy dzielnik pierwszy, 138
- nierówność
- Bernoulliego, 25, 26
  - Cauchy’ego, 26, 27, 29, 55, 74, 76, 84, 88, 112, 118
  - Cauchy’ego-Buniakowskiego, 26
  - Cauchy’ego-Buniakowskiego-Schwarza, 26
  - Cauchy’ego-Schwarza, 26
  - cykliczna, 43, 46, 78, 115, 117, 120
  - Czebyszewa, 30
  - dla boków trójkąta, 15, 64, 65, 100, 101, 117, 127, 144, 145
  - dla liczb całkowitych, 67–71, 103–108, 119
  - dla liczb z odcinka, 63, 95, 100, 103, 110
  - Höldera, 29, 30, 80
  - Hadamarda, 11
  - Huyhensa, 20, 21

- Janouša, 50  
 jednorodna, 47, 49–52, 57, 76, 79, 85, 111  
 Jensena, 8, 10, 27, 47  
 Karamaty, 13–16, 54, 64, 65, 81, 113, 117  
 Minkowskiego, 30  
 Nesbitta, 76, 77  
 Opiała, 31  
 rearrangement, 30  
 Schura, 53, 55–57, 114  
 trójkąta, 27, 28  
 z iloczynem równym jeden, 17, 19, 20, 63, 66, 90, 92, 109, 116  
 z zerową sumą, 62, 65, 145  
 ze stałą sumą, 50, 61–63, 65, 66, 93, 94, 97, 98, 102, 109, 115, 116, 118, 127  
 ze stałą sumą kwadratów, 64, 94, 96, 103, 117, 123  
 ze stałym iloczynem, 66, 89, 90, 92, 116, 117  
 nierówności równoważne, 18, 19  
 nwd, 2, 108, 133, 135, 138  
 nww, 2, 133–135
- Olimpiada Matematyczna  
 Anglia, 62  
 Australia, 78  
 Austria, 86, 96  
 Belgia, 130  
 Białoruś, 63, 80, 102, 126, 141  
 Bośnia Hercegowina, 82, 101, 115, 126  
 Brazylia, 101  
 Bułgaria, 91, 99, 138  
 Chiny, 20, 59, 61, 62, 65, 75, 92, 109, 112, 116  
 Chorwacja, 87, 98, 110  
 Czechosłowacja, 110, 131, 145  
 Czechy-Słowacja, 65, 82, 90, 91, 143  
 Estonia, 102, 110  
 Finlandia, 143  
 Grecja, 86, 96, 97, 108  
 Hiszpania, 133, 134  
 Holandia, 131  
 Hong Kong, 63, 65, 68  
 IMSA Intramural, 85  
 Indie, 50, 61, 63, 82, 96, 97, 100, 102, 109  
 Iran, 48, 83, 92, 123  
 Irlandia, 52, 61, 81, 95, 100, 102, 108, 113, 129, 131  
 Izrael, 106  
 Japonia, 83, 98  
 Jugosławia, 138  
 Kanada, 54, 62, 71, 80, 98, 103, 134  
 Kanada-USA, 120  
 Kazachstan, 91, 98, 101
- Kijów, 75  
 Korea, 47, 144  
 Litwa, 107  
 Macedonia, 145  
 Meksyk, 115  
 Mołdawia, 22, 47, 60, 81–83, 86, 94, 102, 104, 107, 109  
 Moskwa, 24, 62, 64, 71, 79, 83, 101, 124, 126, 135  
 Niemcy, 132  
 Norwegia, 58, 100  
 Polska, 58, 60, 61, 66, 74, 98, 100, 113, 115, 123, 124,  
 Rosja, 20, 55, 61, 68, 79, 83, 90, 92, 93, 96–98, 110,  
 Rumunia, 63, 68, 91, 92, 100, 112, 117, 124  
 Słowenia, 117, 119  
 Serbia-Czarnogóra, 62, 86, 91, 97, 113  
 St Petersburg, 48, 49, 58, 61, 62, 66, 75, 83, 96, 110,  
 Szwecja, 62, 127  
 Turcja, 94  
 Ukraina, 64, 80, 85, 86, 91, 100, 103, 116, 132  
 USA, 57, 61, 66, 80, 83, 87, 123, 125, 127  
 W. Brytania, 55, 62, 65, 93  
 Węgry, 64  
 Węgry-Izrael, 75, 95, 114, 126  
 Wietnam, 64, 80, 84, 88, 100, 104, 110, 143  
 ZSRR, 60–62, 93, 96, 114, 128, 144
- permutacja, 31, 36, 37, 42, 43, 68–70, 95, 104  
 pierścień wielomianów, 39, 61  
 pierwiastek z jedyńki, 44  
 pochodna, 11, 12, 31, 121, 122  
 podzbiór, 5, 135  
 podziały, 33, 34, 36–39, 41–43  
   sąsiednie, 35, 36, 38  
 podzielność, 129, 134, 135, 142  
 postulat Bertranda, 136  
 potęga  
   dwójki, 18, 20, 67, 84, 92, 104, 119, 120, 129, 130, 132, 134, 137, 139–141, 143  
   dziewiątki, 130  
   liczby pierwszej, 137, 141  
   trójki, 20, 104, 130, 134  
 problem Janouša, 49, 51  
 problem Shapiro, 76–78  
 przedział, 5, 6, 8–15, 53  
    $(-\infty, a)$ , 5  
    $(-\infty, a]$ , 5  
    $(0, 1)$ , 63, 100, 110, 117  
    $(0, 1]$ , 100



- $(0, \infty)$ , 12, 15, 47, 54, 64, 65, 81, 113, 117  
 $(a, \infty)$ , 5  
 $(a, b)$ , 5  
 $[a, b]$ , 5  
 $[0, 1]$ , 11, 14, 59, 63, 100, 110, 117  
 $[0, 2]$ , 109  
 $[a, \infty)$ , 5, 115  
 $[a, b)$ , 5  
 $[a, b]$ , 5, 11, 31, 63, 74, 95  
pytanie, 95, 145
- rearrangement inequality, 30  
relacja, 34, 44  
    częściowego porządku, 13, 44  
równanie diofantyczne, 108  
rozwińnięcie dziesiętne, 108, 145
- silnia, 36, 129–132, 135, 141  
średnia, 110, 118, 128  
    arytmetyczna, 17, 20–23, 40, 46, 47, 68, 128  
    geometryczna, 10, 17, 20–23, 40, 46, 128  
    harmoniczna, 22, 23, 128  
    kwadratowa, 22, 23, 68  
    logarytmiczna, 128  
    potęgowa, 23, 24  
    złożona, 23
- stopień wielomianu, 39  
suma cyfr, 129, 130  
superabundant numbers, 142  
symbol Newtona, 25, 76, 132, 133  
sześcián liczby całkowitej, 108  
szereg, 28, 108, 119, 143
- tożsamość Abela, 14  
trójkąt, 15, 64, 65, 100–102, 117, 123, 144, 145  
trójmian kwadratowy, 61  
twierdzenie  
    Czebyszewa, 136, 137  
    Jensena, 8, 10  
    Karamaty, 14  
    Lagrange’a o wartości średniej, 11  
    Muirheada, 33, 38–43, 51–53, 55, 56  
    o nierówności cyklicznej, 46, 48, 53, 55–57,  
        79, 80, 87
- ułamek prosty, 106–108, 132, 138, 141  
układ Cramera, 45
- warunek Lipschitza, 10  
warunki równoważne, 6, 8, 9, 12, 22–26, 30, 38,  
    41, 42, 44, 45, 62, 65, 67, 127, 135, 137,  
    141, 144  
wielokąt, 94  
wielomian, 28, 61, 140  
    symetryczny, 36, 37  
wklęsłość w sensie Jensena, 10  
wypukłość w sensie Jensena, 10  
wyznacznik, 9, 44, 45
- zbiór  
     $\mathbb{N}_0$ , 1  
     $\mathbb{P}(n, k)$ , 33, 34, 41–46  
     $\mathbb{R}^+$ , 5, 10, 55, 96, 121, 127  
    liczb całkowitych, 1, 96, 127  
    liczb naturalnych, 1, 67, 103, 119  
    liczb pierwszych, 1  
    liczb rzeczywistych, 1, 5, 6, 8–15, 23, 31, 39,  
        47, 54, 64, 65, 81, 113, 117, 145  
    liczb wymiernych, 1, 10, 42–46  
    liczb zespolonych, 1, 29, 124  
    nieskończony, 125, 129, 130, 138, 139, 142