Podróże po Imperium Liczb

Część 13. Nierówności

Rozdział 6

6. Jednorodne nierówności wymierne

Andrzej Nowicki 4 maja 2013, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały można znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

6 Jednorodne nierówności wymierne

6.1 Jednorodne nierówności wymierne n zmiennych

6.1.1. $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b} \geqslant \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$, *dla* $a,b>0$, $x,y\in\mathbb{R}$.

D. ([MaOD] 34).Z oczywistej nierówności $(ay-bx)^2 \geqslant 0$ otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} x^2b^2+y^2a^2 &\geqslant 2abxy, \\ x^2ab+x^2b^2+y^2a^2+y^2ab &\geqslant x^2ab+2abxy+y^2ab, \\ x^2b(a+b)+y^2a(a+b) &\geqslant ab(x+y)^2. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz ostatnią z tych nierówności podzielić stronami przez $ab(a+b)$. ⊠

6.1.2. *Jeśli* $\lambda_1,\dots,\lambda_n>0$ *oraz* $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$, *to*

$$\frac{x_1^2}{\lambda_1}+\cdots+\frac{x_n^2}{\lambda_n} \geqslant \frac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{x_1}{\lambda_1}=\cdots=\frac{x_n}{\lambda_n}$. ([MaOD] 35).

D. ([MaOD] 34-35). Indukcja ze względu na n. Dla $n=1$ jest to oczywiste. Niech $n\geqslant 2$ i załóżmy, że rozważana nierówność jest prawdziwa dla $n-1$. Mamy wtedy (na mocy 6.1.1):

$$\frac{x_1^2}{\lambda_1}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{\lambda_{n-1}}+\frac{x_n^2}{\lambda_n} \geqslant \frac{(x_1+\cdots+x_{n-1})^2}{\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}+\frac{x_n^2}{\lambda_n} \geqslant \frac{(x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n)^2}{\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}+\lambda_n}$$

i to kończy dowód. ⊠

Podamy teraz kilka zastosowań nierówności 6.1.2.

6.1.3. $\dfrac{x_1}{y_1}+\cdots+\dfrac{x_n}{y_n} \geqslant \dfrac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}$, *dla dodatnich liczb* $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$. ([MaOD] 35).

D. $\dfrac{x_1}{y_1}+\cdots+\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{x_1^2}{x_1y_1}+\cdots+\dfrac{x_n^2}{x_ny_n} \geqslant \dfrac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}$. ⊠

6.1.4. $\dfrac{x_1}{y_1^2}+\cdots+\dfrac{x_n}{y_n^2} \geqslant \dfrac{1}{x_1+\cdots+x_n}\left(\dfrac{x_1}{y_1}+\cdots+\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2$,
dla dodatnich liczb $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$. ([MaOD] 35).

D. $\dfrac{x_1}{y_1^2}+\cdots+\dfrac{x_n}{y_n^2}=\dfrac{\frac{x_1^2}{y_1^2}}{x_1}+\cdots+\dfrac{\frac{x_n^2}{y_n^2}}{x_n} \geqslant \dfrac{1}{x_1+\cdots+x_n}\left(\dfrac{x_1}{y_1}+\cdots+\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2$. ⊠

6.1.5. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\geqslant\dfrac{n^2}{x_1+\cdots+x_n}$, *dla* $x_1,\dots,x_n>0$. ([Mat] 1/1957 71).

D. Nierówność 6.1.2 dla $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$. ⊠

6.1.6. *Jeśli* $x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_n$ *są dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że* $x_1+\cdots+x_n=y_1+\cdots+y_n$, *to*

$$\frac{x_1^2}{x_1+y_1}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_n+y_n}\geqslant\frac{1}{2}(x_1+\cdots+x_n).\quad\text{([A-P] 1991).}$$

D. ([MaOD] 36).

$$\frac{x_1^2}{x_1+y_1}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_n+y_n}\geqslant\frac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{(x_1+\cdots+x_n)+(y_1+\cdots+y_n)}=\frac{1}{2}(x_1+\cdots+x_n).\ ⊠$$

Szczególnym przypadkiem nierówności 6.1.6 jest następna nierówność.

6.1.7. $\dfrac{x_1^2}{x_1+x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_2+x_3}+\cdots+\dfrac{x_n^2}{x_n+x_1}\geqslant\dfrac{1}{2}(x_1+\cdots+x_n)$, *dla* $x_1,\dots,x_n>0$.
([Crux] 1998 s. 162).

6.1.8. *Jeśli* $x_1,\dots,x_n>0$, *to:*

(1) $\dfrac{1}{S-x_1}+\dfrac{1}{S-x_2}+\cdots+\dfrac{1}{S-x_n}\geqslant\dfrac{n^2}{(n-1)S}$,

gdzie $S=x_1+\cdots+x_n$, ([Mat] 5/1959 296);

(2) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{2}{x_1+x_2}+\cdots+\dfrac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}<4\left(\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)$,

([WaJ] 427(86));

(3) $n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\left(\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\right)\left(n+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$.

([Nord] 1999).

6.1.9. $(x_1+\cdots+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2$, *dla* $x_1,\dots,x_n>0$. (2.6.1, [MM] 42(3)(1969) 161).

6.1.10. $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)\geqslant\dfrac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x_1}{x_2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x_2}{x_3}}+\cdots+\sqrt[3]{\dfrac{x_n}{x_1}}\right)^3\geqslant n^2$,
dla $x_1,\dots,x_n>0$. (M. Bencze, [Crux] z.3086).

6.1.11. $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4ab}n^2$,
dla $x_1,\dots,x_n\in[a,b]$, *gdzie* $0<a<b$. ([Kw] 7/1979 25, [Khr2], [Khr1]).

6.1.12. $\dfrac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\dfrac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_nx_1}+\dfrac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2}\leqslant n-1$,
dla $x_1,\dots,x_n>0$. ([IMO] Shortlist 1985, [Djmp] s.192(478), [OM] Polska 1990).

6.1.13. $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\left(\frac{1}{x_1^2+x_1x_2}+\frac{1}{x_2^2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n^2+x_nx_1}\right)\geqslant\frac{n^2}{2}$,
dla $x_1,\dots,x_n>0$. (T. Mitev, [Crux] z.2937).

6.1.14. $\frac{x_1^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+\cdots+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}\geqslant\frac{1}{3}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,
dla $x_1,\dots,x_n>0$. ([OM] Węgry-Izrael 2003, [KoM] 2004 B3700, [Mild]).

6.1.15. *Jeśli* $x_n\geqslant x_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant x_1>0$, *to:*

(1) $\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1}+\frac{x_nx_1}{x_2}\geqslant x_1+x_2\cdots+x_n$, ([OM] St Petersburg 2000 91, [Ko04] 16);

(2) $\frac{x_1x_2}{x_n}+\frac{x_2x_3}{x_1}+\cdots+\frac{x_{n-1}x_n}{x_{n-2}}+\frac{x_nx_1}{x_{n-1}}\geqslant x_1+x_2\cdots+x_n$, ([OM] St Petersburg 2000);

(3) $\frac{x_1x_3}{x_2}+\frac{x_2x_4}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}x_1}{x_n}+\frac{x_nx_2}{x_1}\geqslant x_1+x_2\cdots+x_n$, ([OM] St Petersburg 2000);

(4) $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n}\geqslant\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}$. ([Uiuc] 2001, [Ko03] s.107).

6.1.16. $\frac{x_1^{s+1}}{x_2^s}+\frac{x_2^{s+1}}{x_3^s}+\cdots+\frac{x_{n-1}^{s+1}}{x_n^s}+\frac{x_n^{s+1}}{x_1^s}\geqslant\frac{x_1^s}{x_2^{s-1}}+\frac{x_2^s}{x_3^{s-1}}+\cdots+\frac{x_{n-1}^s}{x_n^{s-1}}+\frac{x_n^s}{x_1^{s-1}}$,
dla $s\geqslant 1$ *oraz* $x_1,\dots,x_n>0$. ([Cmj] 23(5)(1992) 439, [Mat] 4/1994 240).

D. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b zachodzi nierówność

$$\frac{a^s}{b^s}(a-b)\geqslant(a-b).$$

Wstawiając $a=x_i$, $b=x_{i+1}$, dla $i=1,\dots,n$, otrzymujemy n nierówności. Rozpatrywaną nierówność otrzymamy po dodaniu stronami wszystkich tych n nierówności. ⊠

6.1.17. $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$,
dla $s\geqslant 1$ *oraz* $x_1,\dots,x_n>0$. ([OM] Chiny 1984).

D. Jest to nierówność 6.1.16 dla $s=1$. Wynika to również natychmiast z 6.1.2. Inne dowody znajdziemy, na przykład, w [Liu1] s.84-85 (cztery różne dowody). ⊠

6.1.18. $\frac{x_1^3}{x_2}+\frac{x_2^3}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^3}{x_n}+\frac{x_n^3}{x_1}\geqslant\frac{1}{2}((x_1+1)^2+\ldots+(x_n+1)^2)-n$,
dla $x_1,\dots,x_n>0$. ([OM] Kijów 1996).

6.1.19. $\frac{x_1^3}{x_2}+\frac{x_2^3}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^3}{x_n}+\frac{x_n^3}{x_1}\geqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$,
dla $x_1,\dots,x_n>0$. ([Mat] 2/2005 z.1623).

6.1.20. *Dla dodatnich liczb $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$, zachodzi nierówność*

$$\Big(x_1 + \dots + x_n\Big)\Big(y_1 + \dots + y_n\Big) \geqslant \Big((x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n)\Big)\Big(\frac{x_1 y_1}{x_1 + y_1} + \dots + \frac{x_n y_n}{x_n + y_n}\Big).$$

(M. Kuczma, [Crux] 1997 s.112 z.2113).

6.1.21. *Dla dodatnich liczb $x_1, \dots, x_n$ zachodzi nierówność*

$$\binom{n}{2} \sum_{i<j} \frac{1}{x_i x_j} \geqslant 4 + \left(\sum_{i<j} \frac{1}{x_i + x_j}\right)^2.$$ ([IMO] Longlist 1959-1966, [Djmp] s.37).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.2 Nierówność Nesbitta i jej uogólnienia

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.2.1 (Nesbitt 1903)**.** *Dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność*

$$\boxed{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}}\,.$$

([Str1] 33, [BoW] s.81, [Siw] 16).

D. Niech $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$. Mamy wtedy:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big) + \Big(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\Big) + \Big(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\Big) - 3\Big) \geqslant \frac{1}{2}(2 + 2 + 2 - 3) = \frac{3}{2}.$$

Wykorzystaliśmy nierówność 2.1.8. ⊠

U. Dziesięć różnych dowodów tej nierówności znajdziemy w artykule Hojoo Lee [MC] 14(1)(2001) 30-36. W [LeH2] jest 13 dowodów. Dziesięć różnych dowodów znajdziemy również w [Ko04] (strony $19 - 24$). ⊠

Nierówność 6.2.1 jest szczególnym przypadkiem następującej ogólniejszej nierówności.

6.2.2. *Jeśli $u > 0$, $v > 0$, to*

$$\frac{a}{ub + vc} + \frac{b}{uc + va} + \frac{c}{ua + vb} \geqslant \frac{3}{u + v}$$

dla dodatich liczb rzeczywistych a, b, c.

D. ([Brad] 49, 171). Niech $x_1 = \sqrt{\frac{a}{ub+vc}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{b}{uc+va}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{c}{ua+vb}}$, $y_1 = \sqrt{a(ub + vc)}$, $y_2 = \sqrt{b(uc + va)}$, $y_3 = \sqrt{c(ua + vb)}$. Wtedy:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 = (a + b + c)^2,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \tfrac{a}{ub+vc} + \tfrac{b}{uc+va} + \tfrac{c}{ua+vb},$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (u + v)(ab + bc + ca) \leqslant \tfrac{u+v}{3}(a + b + c)^2$$

i teza wynika z nierówności Cauchy'ego: $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leqslant \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)$ (patrz 2.6.1). ⊠

6.2.3. $\dfrac{a^s}{b+c}+\dfrac{b^s}{c+a}+\dfrac{c^s}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$, *dla* $a,b,c>0,\ abc=1,\ s\geqslant 1$. ([AnC]).

6.2.4. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\geqslant 2$ *dla* $a,b,c>0$. ([MM] 84(1)(2011) 69).

6.2.5. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant 4abc\left(\dfrac{1}{(a+b)^3}+\dfrac{1}{(b+c)^3}+\dfrac{1}{(c+a)^3}\right)$, *dla* $a,b,c>0$.

6.2.6. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{d+a}+\dfrac{d}{a+b}\geqslant 2$, *dla* $a,b,c,d>0$. ([Kw] 7/1985 47, 2/1997 43).

U. W książce [Ko04] na stronach 24 - 29 znajduje się 8 różnych dowodów tej nierówności. ⊠

6.2.7. $\dfrac{a_1}{a_2+a_3}+\dfrac{a_2}{a_3+a_4}+\dfrac{a_3}{a_4+a_5}+\dfrac{a_4}{a_5+a_1}+\dfrac{a_5}{a_1+a_2}\geqslant\dfrac{5}{2}$, *dla* $a_1,\dots,a_5>0$. ([Ko00]).

U. W książce [Ko04] na stronach 29 - 34 znajduje się 5 różnych dowodów tej nierówności. ⊠

6.2.8. $\dfrac{a_1}{a_2+a_3}+\dfrac{a_2}{a_3+a_4}+\dfrac{a_3}{a_4+a_5}+\dfrac{a_4}{a_5+a_6}+\dfrac{a_5}{a_6+a_1}+\dfrac{a_6}{a_1+a_2}\geqslant 3$, *dla* $a_1,\dots,a_6>0$. ([Ko04] 34).

6.2.9. $\dfrac{a_1}{a_2+a_3}+\dfrac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\dfrac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2}$, *dla* $a_1,\dots,a_n>0$. ([Khr3] 22).

Pewne uogólnienie nierówności Nesbitta 6.2.1 zaproponował w 1954 roku H. S. Shapiro w [Mon] (Problem 4603, strona 571).

6.2.10 (Problem Shapiro). *Rozważmy nierówność:*

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\frac{n}{2}},$$

dla $a_1,\dots,a_n>0$.

(1) *Z powyższych faktów wynika, że nierówność ta jest prawdziwa dla* $n=3,4,5,6$.

(2) *Jeśli jest fałszywa dla pewnego nieparzystego* n, *to jest również fałszywa dla* $n+1$.

(3) *Jeśli jest fałszywa dla pewnego* n, *to jest również fałszywa dla* $n+2$.

(4) (D. Djekovicz 1961). *Dla* $n=8$ *jest prawdziwa.*

(5) (P. Novosad 1967). *Dla* $n=10$ *jest prawdziwa.*

(6) (V. Levin, E. Godunova 1974). *Dla* $n=12$ *jest prawdziwa.*

(7) (M. Lighthill, A. Zalauf). *Dla* $n=14$ *jest fałszywa.*

(8) *Nierówność ta jest fałszywa dla wszystkich parzystych* $n\geqslant 14$. *Dla pozostałych liczb parzystych* $n\geqslant 4$ *jest prawdziwa.*

(9) (L. Deykin 1971). *Dla* $n=25$ *jest fałszywa.*

(10) (K. Trosh 1989). *Dla* $n=23$ *jest prawdziwa.*

(11) *Nierówność ta jest fałszywa dla wszystkich nieparzystych* $n\geqslant 25$. *Dla pozostałych liczb nieparzystych* $n\geqslant 3$ *jest prawdziwa.*

([MiV] 132-138, [M-pf] 440-471, [Ko04]).

6.2.11. $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < 4$, *dla* $a, b, c, d, e > 0$. ([AuP] 2000).

6.2.12. $\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} > \frac{n}{4}$, *dla* $a_1, \ldots, a_n > 0$.
([WaJ] 128(69), [Dlt] 10/1994, [Ko04] 56).

6.2.13. $\frac{a_1}{a_n+a_2} + \frac{a_2}{a_1+a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}+a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}+a_1} \geqslant 2$, *dla* $n \geqslant 3$, $a_1, \ldots, a_n \geqslant 3$.
([TT] 1982).

6.2.14. $\frac{a_1}{a_2+a_n} + \frac{a_2}{a_3+a_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_{n-2}} + \frac{a_n}{a_1+a_{n-1}} \geqslant 2$, *dla* $n \geqslant 4$, $a_1, \ldots, a_n > 0$.
([Kw] 2/1997 43).

6.2.15 (Diananda 1959-1961). *Rozważmy nierówność:*

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4} + \frac{a_2}{a_3+a_4+a_5} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1+a_2} + \frac{a_n}{a_1+a_2+a_3} \geqslant \frac{n}{3}},$$

dla $a_1, \ldots, a_n > 0$.

(1) *Nierówność ta jest prawdziwa dla* $n = 4, 5, 6, 7, 8$.

(2) *Jeśli jest fałszywa dla pewnego* n, *to jest również fałszywa dla* $n+3$.

(3) *Dla* $n = 15$ *jest fałszywa.* ([Ko04]).

6.2.16. $\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$, *dla* $a_1, \ldots, a_n > 0$, *gdzie* $S = a_1 + \cdots + a_n$.
([Str1] s.72, [Kw] 9/1973 32, [OM] Australia 1993, [Crux] 1997 s.324).

6.2.17. $\left(\frac{a_1}{S-a_1}\right)^k + \left(\frac{a_2}{S-a_2}\right)^k + \cdots + \left(\frac{a_n}{S-a_n}\right)^k \geqslant \frac{n}{(n-1)^k}$,
dla $a_1, \ldots, a_n > 0$, $0 < k \leqslant 1$, *gdzie* $S = a_1 + \cdots + a_n$. ([IMO] Longlist 1989).

6.2.18. $\frac{S-a_1}{a_1} + \frac{S-a_2}{a_2} + \cdots + \frac{S-a_n}{a_n} \geqslant n(n-1)$,
dla $a_1, \ldots, a_n > 0$, *gdzie* $S = a_1 + \cdots + a_n$. ([OM] Australia 1993, [Crux] 1997 s.324).

★ P. H. Diananda, *Extensions of an inequality of H. S. Shapiro*, [Mon] 66(1959) 489-491.

P. H. Diananda, *On a conjecture of L. J. Mordell regarding an inequality involving quadratic forms*, [Jlms] 36(1961) 185-192.

P. H. Diananda, *Some cyclic and other inequalities*, [Pcam] 58(1962) 425-427.

J. Górnicki, *Nierówności cykliczne*, [Gorn] 69-71.

L. Kurlandczyk, *Problem Shapiro*, [Ko04], 9-106.

Hojoo Lee, *Ten different proofs of an inequality*, [MC] 14(1)(2001) 30-36.

A. M. Nesbitt, *Problem* 15 114, Educational Times, 3(2)(1903), 37-38.

D. S. Mitrinović, *O nierówności Shapiro*, [Mitr], [Mit2] 299-300.

D. S. Mitrinović, J. E. Pećarić, A. M. Finc, *Shapiro's inequality*, [M-pf], 440-471.

D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Cyclic inequalities*, [MiV], 131-138.

F. H. Northover, *An invalid inequality*, [Mon] 63(3)(1956) 191-192.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.3 Jednorodne nierówności wymierne dwóch zmiennych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.3.1. $\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geqslant\frac{9}{4xy}$, *dla* $x,y>0$. ([OM] Rosja 1999).

6.3.2. *Dla* $x,y>0$*:*

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{x+y}$, ([Kw] 2/1997 42)*;*

(2) $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geqslant\frac{9}{x+y}$, ([Kw] 2/1997 42)*;*

(3) $\frac{2x^2+3y^2}{2x^3+3y^3}+\frac{2y^2+3x^2}{2y^3+3x^3}\leqslant\frac{4}{x+y}$, ([Math] 2006).

6.3.3. $x^4+y^4\leqslant\frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2}$, *dla* $x,y>0$. (3.6.9).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.4 Jednorodne nierówności wymierne trzech zmiennych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.4.1. *Jeśli* $a,b,c>0$*, to:*

(1) $\frac{a}{b^4}+\frac{b}{c^4}+\frac{c}{a^4}\geqslant\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}$, (3.6.9, [Mat] 2/1994 116)*;*

(2) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, ([MaOD] 34)*;*

(3) $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$, *gdy* $0<c<b<a$, ([OM] Moskwa 1993/1994)*;*

(4) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$, (7.1.5, [Math] 2006)*;*

(5) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{a+kb}{a+kc}+\frac{b+kc}{b+ka}+\frac{c+ka}{c+kb}$, *dla dowolnego* $k>0$, (Nguyen Viet Anh, [Pkh] s.149*;*

(6) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$, (3.6.9, [Nord] 1987, [Pa97])*;*

(7) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geqslant 12$, ([Pkh] s.193)*;*

(8) $\frac{ac}{b^2}+\frac{ba}{c^2}+\frac{cb}{a^2}\geqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$, (7.1.5)*;*

(9) $a+b+c\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\leqslant\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$, ([Ko00])*;*

(10) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c+4\frac{(a-b)^2}{a+b+c}$, ([Balk] 2005)*;*

(11) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^4}{a^3} \geqslant -a+2b+3c,$ ([OM] Ukraina 2005);

(12) $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geqslant \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a},$ (3.6.9, [OM] Kanada 2002, [Ko03] 49);

(13) $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geqslant a+b+c,$ (3.6.9, 6.1.16, [Zw] 2003);

(14) $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a},$ (3.6.9, 6.1.16, [Mat] 4/1994 239);

(15) $\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b} \geqslant a^2+b^2+c^2,$ *gdy* $a \geqslant b \geqslant c > 0,$ ([OM] Wietnam 1991);

(16) $\frac{a^{10}}{c}+\frac{b^{10}}{a}+\frac{c^{10}}{b} \geqslant a^8b+b^8c+c^8a,$ (3.6.9, [Ko03] 50).

6.4.2. $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geqslant x+y+z,$ *dla* $x,y,z \geqslant 0.$ ([MOc] z.556).

U. Analogiczna nierówność dla czterech liczb x,y,z,t nie zachodzi. Przykład: $x=1$, $y=216$, $z=6$, $t=18$. ([Ko04] 14). ⊠

6.4.3. $\frac{x^3}{yz}+\frac{a^3}{bc} \geqslant \frac{(x+a)^3}{(y+b)(z+c)},$ *dla* $x,y,z,a,b,c>0,$ *to* ([Ko03] 33).

6.4.4. $\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)},$ *dla* $a,b,c,x,y,z,>0.$ ([OM] Białoruś 2000).

D. ([AF00] 10). Korzystamy z nierówności Höldera:

$$\Big(x_1^3+x_2^3+x_3^3\Big)\Big(y_1^3+y_2^3+y_3^3\Big)\Big(z_1^3+z_2^3+z_3^3\Big) \geqslant \Big(x_1y_1z_1+x_2y_2z_++x_3y_3z_3\Big)^3,$$

zachodzącej dodatnich liczb rzeczywistych (patrz 2.7.2). Podstawiamy: $x_1 = a/\sqrt[3]{x}$, $x_2 = b/\sqrt[3]{y}$, $x_3 = c/\sqrt[3]{z}$, $y_1=y_2=y_3=1$, $z_1=\sqrt[3]{x}$, $z_2=\sqrt[3]{y}$, $z_3=\sqrt[3]{z}$ i mamy:

$$\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right)(1+1+1)(x+y+z) \geqslant (a+b+c)^3.$$

Dzielimy przez $3(x+y+z)$ i otrzymujemy tezę. ⊠

6.4.5. $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geqslant a+b+c,$ *dla* $a,b,c>0.$ ([Rias]).

D. ([Rias]).

$$\frac{a^3}{bc}+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}bc}=3a, \quad \frac{b^3}{ca}+c+a \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca}ca}=3b, \quad \frac{c^3}{ab}+a+b \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab}ab}=3c.$$

Po dodaniu do siebie tych trzech nierówności otrzymujemy tezę. ⊠

6.4.6. $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}$ *dla* $x,y,z>0.$
([OM] USA 1997, [RiM] July 2001).

6.4.7. *Jeśli $x, y, z > 0$, to:*

(1) $\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{y^2+z^2}+\dfrac{1}{z^2+x^2} \geqslant \dfrac{10}{(x+y+z)^2}$, (V.Cirtoaje, Nguyen Viet Anh, [Pkh] s.154);

(2) $\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{y^2+z^2}+\dfrac{1}{z^2+x^2}+\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} \geqslant \dfrac{6}{xy+yz+zx}$, ([Pkh] s.167);

(3) $\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{(y+z)^2}+\dfrac{1}{(z+x)^2} \geqslant \dfrac{9}{4(xy+yz+zx)}$, ([RiM] July 2001);

(4) $\dfrac{1}{(2x+y)^2}+\dfrac{1}{(2y+z)^2}+\dfrac{1}{(2z+x)^2} \geqslant \dfrac{1}{xy+yz+zx}$, ([Pkh] s.249);

(5) $\dfrac{1}{y(x+y)}+\dfrac{1}{z(y+z)}+\dfrac{1}{x(z+x)} \geqslant \dfrac{27}{2(x+y+z)^2}$, ([MOc] 2003 z.236);

(6) $\dfrac{1}{4x^2-xy+4y^2}+\dfrac{1}{4y^2-yz+4z^2}+\dfrac{1}{4z^2-zx+4x^2} \geqslant \dfrac{9}{7(x^2+y^2+z^2)}$,
(Vasile Cirtoaje, [Mild]).

6.4.8. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$, *dla $a, b, c > 0$*. ([OM] Irlandia 1998, [Khr2], [Khr1]).

D. Wynika to z faktu 1.5.7 zastosowanego do wypukłej funkcji $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. ⊠

6.4.9. *Jeśli $a, b, c > 0$, to:*

(1) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} > \dfrac{3}{a+b+c}$, ([Siw] 76);

(2) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} > \dfrac{3}{2(a+b+c)}$, ([Kw] 2/1997 42);

(3) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} \geqslant \dfrac{9}{2(a+b+c)}$, ([OM] Irlandia 1998);

(4) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$, ([IMO] Longlist 1967, [Djmp] s.47(355), [Crux] z.413, [Siw] 18);

(5) $\dfrac{1}{a+b+x}+\dfrac{1}{b+c+x}+\dfrac{1}{c+a+x} \leqslant \dfrac{1}{x}$, *gdzie $x = \sqrt[3]{abc}$*, ([OM] Mołdawia 1998);

(6) $\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{b^2+a^2} \geqslant \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)$,
(Pham Kim Hung [Pkh] s.45);

(7) $\dfrac{a}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{(b+a)^2} \geqslant \dfrac{9}{4(a+b+c)}$, ([AnC]);

(8) $\dfrac{2a}{a^2+bc}+\dfrac{2b}{b^2+ca}+\dfrac{2c}{c^2+ab} \leqslant \dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}$, ([Balt] 2004);

(9) $\dfrac{a+b}{ab+c^2}+\dfrac{b+c}{bc+a^2}+\dfrac{c+a}{ca+b^2} \leqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, (Hojoo Lee, [Crux] z.2580);

(10) $$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}\leqslant\frac{9}{4(a+b+c)},$$
([RiM] July 2001);

(11) $$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geqslant 3\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

6.4.10. *Dla dodatnich liczb a, b, c zachodzą następujące nierówności.*

(1) $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}-\dfrac{a}{b+c}-\dfrac{b}{a+c}-\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{9}{2}$, ([Ko04] 17);

(2) $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}\geqslant 4\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)$, ([AnC], [MaOD] 32);

(3) $\dfrac{a+b}{a+c}+\dfrac{b+c}{b+a}+\dfrac{c+a}{c+b}\leqslant\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$, ([OM] Indie 2002, [Pkh] s.93);

(4) $\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{c+a}+\dfrac{c+a}{a+b}\leqslant\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$, ([Pkh] s.93);

(5) $\dfrac{a+b-2c}{b+c}+\dfrac{b+c-2a}{c+a}+\dfrac{c+a-2b}{a+b}\geqslant 0$, ([MaS] 4/1993 z.3797 [Ko00]);

(6) $\dfrac{a}{b+2a}+\dfrac{b}{c+2b}+\dfrac{c}{a+2c}\leqslant 1$, ([OM] Mołdawia 2002);

(7) $\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{c+2a}+\dfrac{c}{a+2b}\geqslant 1$, (6.2.2, [OM] Czechy-Słowacja 1999);

(8) $\dfrac{a}{2b+c}+\dfrac{b}{2c+a}+\dfrac{c}{2a+b}\geqslant 1$, (6.2.2);

(9) $\dfrac{a}{b+3c}+\dfrac{b}{c+3a}+\dfrac{c}{a+3b}\geqslant\dfrac{3}{4}$, (6.2.2);

(10) $\dfrac{a+2b}{c+2b}+\dfrac{b+2c}{c+2a}+\dfrac{c+2a}{c+2b}\geqslant 3$, (Pham Kim Hung, [Pkh] s.163);

(11) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 9$, (6.1.9, [BoW] 7 s.80).

6.4.11. $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}>0$, *dla* $a>b>c>0$. ([Pie2]).

6.4.12. *Dla dodatnich liczb a, b, c zachodzą następujące nierówności.*

(1) $\dfrac{a^2}{(a+b)^2}+\dfrac{b^2}{(b+c)^2}+\dfrac{c^2}{(c+a)^2}+\dfrac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 1$, ([Pkh] s.242);

(2) $\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ca}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}\geqslant 1$, ([OM] Mołdawia 1999);

(3) $$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geqslant 1\geqslant\frac{ab}{ab+c^2}+\frac{bc}{bc+a^2}+\frac{ca}{ca+b^2},$$
([OM] Bośnia Hercegowina 2000);

(4) $$\frac{a^2}{a^2+2(a+b)^2}+\frac{b^2}{b^2+2(b+c)^2}+\frac{c^2}{c^2+2(c+a)^2}\geqslant\frac{1}{3},$$
(Pham Kim Hung [Pkh] s.45);

(5) $$\frac{a^2+bc}{a^2+ab}+\frac{b^2+ca}{b^2+bc}+\frac{c^2+ab}{c^2+ca}\geqslant 3,$$ ([OM] Rosja 1998);

(6) $$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{c^2-ab}{a^2+b^2+2c^2}\geqslant 0,$$
(Pham Kim Hung [Pkh] s.35);

(7) $$\frac{a^2-bc}{\lambda a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{a^2+\lambda b^2+c^2}+\frac{c^2-ab}{a^2+b^2+\lambda c^2}\geqslant 0,\ dla\ 0\leqslant\lambda\leqslant 2,$$
(Pham Kim Hung [Pkh] s.59);

(8) $$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\geqslant\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c},$$ ([OM] Mołdawia 1999);

(9) $$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{3}{4},$$ ([OM] Moskwa 1999/2000);

(10) $$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{((c+a)^2}{b^2+ac}\geqslant 6,$$ (P.Scholze, D.Grinberg, [Pkh] s.207);

(11) $$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geqslant\frac{3}{5},$$
([OM] Japonia 1997, [RiM] July 2001, [Crux] 2003 s.225);

(12) $$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8,$$ ([OM] USA 2003);

(13) $$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2+\left(\frac{b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{b}\right)^2\geqslant 27,$$ ([OM] St Petersburg 1995);

(14) $$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\geqslant 2,$$ ((Pham Kim Hung, [Pkh] s.201);

(15) $$\frac{a(3a-b)}{c(a+b)}+\frac{b(3b-c)}{a(b+c)}+\frac{c(3c-a)}{b(c+a)}\leqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{abc},$$ (G. Perz, [Crux] z.1976);

(16) $$\frac{a(b+c-a)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a-b)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b-c)}{c^2+2ab}\geqslant 0,$$ ([Pkh] s.201);

(17) $$\left(2+\frac{a}{b}\right)^2+\left(2+\frac{b}{c}\right)^2+\left(2+\frac{c}{a}\right)^2\geqslant\frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca},$$ ([Pkh] s.180);

(18) $$\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2\geqslant\frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca},$$ ([Pkh] s.181);

(19) $$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geqslant\frac{9}{4},$$
([OM] Iran 1996, [Crux] 1997 s.367).

6.4.13. *Dla parami różnych liczb dodatnich a,b,c zachodzą nierówności:*

(1) $$\frac{a^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2}{(c-a)^2}\geqslant 1,$$

(Le Huu Dien Khue, [Pkh] s.151);

$$(2)\quad (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\geqslant 4,$$

([OM] Wietnam 2008, [ChKh] 46, 131-132).

6.4.14. *Dla dodatnich liczb* a, b, c *zachodzą następujące nierówności.*

$$(1)\quad \frac{a^3}{b^3+c^3}+\frac{b^3}{c^3+a^3}+\frac{c^3}{a^3+b^3}\geqslant\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2},$$ ([Pkh] s.108);

$$(2)\quad \frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}\geqslant\frac{3}{8},$$ ([OM] Wietnam 2005);

$$(3)\quad \frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}+\frac{5abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 1,$$

(Pham Kim Hung, [Pkh] s.241);

$$(4)\quad \frac{a^3}{a^3+b^3+abc}+\frac{b^3}{b^3+c^3+abc}+\frac{c^3}{c^3+a^3+abc}\geqslant 1,$$

(Nguyen Van Thach, [Pkh] s.36);

$$(5)\quad \frac{a^3}{a^3+2b^3}+\frac{b^3}{b^3+2c^3}+\frac{c^3}{c^3+2a^3}\geqslant 1,$$ ([MaOD] 42);

$$(6)\quad \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geqslant 33,$$ (Hojoo Lee, [Crux] z.2645).

6.4.15. $\left(\frac{a+b}{c}\right)^n+\left(\frac{b+c}{a}\right)^n+\left(\frac{c+a}{b}\right)^n\geqslant 3\cdot 2^n$, *dla* $a, b, c>0$, $n\in\mathbb{N}$. ([MaS] 1/1998 z.4296).

6.4.16. $\frac{a^m}{b^m+c^m}+\frac{b^m}{c^m+a^m}+\frac{c^m}{a^m+b^m}\geqslant\frac{a^n}{b^n+c^n}+\frac{b^n}{c^n+a^n}+\frac{c^n}{a^n+b^n}$,
dla $m\geqslant n$ *oraz* $a, b, c>0$. (T. Zvonaru, [Crux] z.2970).

6.4.17. $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$, *dla* $a, b, c>0$. ([Nord] 2005).

D. ([Stee] 13, 227).

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\right)^2\\ &\leqslant \left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\Big((b+c)+(c+a)+(a+b)\Big)\\ &= 2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)(a+b+c).\end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy nierówność Cauchy'ego 2.6.1. ⊠

6.4.18. *Dla dodatnich liczb a, b, c zachodzą następujące nierówności:*

(1) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$, (Michael Rozenberg, [Mild]);

(2) $\frac{a^2}{b+3c} + \frac{b^2}{c+3a} + \frac{c^2}{a+3b} \geqslant \frac{3(ab+bc+ca)}{4(a+b+c)}$, ([OM] IMSA Intramural 2000);

(3) $\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b+c}{2}$, ([IMO] Longlist 1970, [Djmp] s.65);

(4) $\frac{a^2+3ab}{a+b} + \frac{b^2+3bc}{b+c} + \frac{c^2+3ca}{c+a} \leqslant 2(a+b+c)$, ([Kw] 6/2008 14);

(5) $\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leqslant \frac{1}{4}(a+b+c)$, ([AnC]);

(6) $\frac{ab}{a+4b+4c} + \frac{bc}{b+4c+4a} + \frac{ca}{c+4a+4b} \leqslant \frac{1}{9}(a+b+c)$, ([Pkh] s.197);

(7) $\frac{ab+c^2}{a+b} + \frac{bc+a^2}{b+c} + \frac{ca+b^2}{c+a} \geqslant a+b+c$, (Hojoo Lee, [Crux] z.2581);

(8) $\frac{a^2(b+c)}{bc} + \frac{b^2(c+a)}{ca} + \frac{c^2(a+b)}{ab} \geqslant 2(a+b+c)$; ([Ko03] 55),

(9) $\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} \geqslant 3a-4b+c$, *dla* $a \geqslant b \geqslant c > 0$,
([OM] Ukraina 1997, [Crux] 1997 s.76);

(10) $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$, *dla* $a, b, c > 0$, ([Ko00]);

(11) $\frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geqslant \frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$,
([AnC], [Crux] 2005 s.179);

(12) $\frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geqslant a+b+c$, ([Pkh] s.121);

(13) $\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2} + \frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2} + \frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2} \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)$,
(Nguyen Viet Anh, [Pkh] s.203);

(14) $\frac{2a^2(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b^2(c+a)}{(b+c)(b+a)} + \frac{2c^2(a+b)}{(c+a)(c+b)} \leqslant a+b+c$.
(V. N. Murty, [Crux] z.570).

6.4.19. $\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{c+a}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \geqslant 3\left(\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right)$,
dla $x, y, z, a, b, c > 0$. (W. Janous, [Crux] z.1672).

6.4.20. $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$,
dla $a, b, c > 0$. ([Kw] 6/1986 36, 2/1997 43, [Dlt] 9/1989 M192, [KoM] B3384 2000).

D. Wynika to z nierówności
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geqslant \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b,$$
która jest konsekwencją nierówności $(a+b)(a-b)^2 \geqslant 0$. ⊠

6.4.21. $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant (a+b+c)^2$, $a,b,c>0$. ([Mit2] s.108).

6.4.22. $\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, *dla* $a,b,c>0$. ([OM] Ukraina 1996).

6.4.23. $\left|\frac{a^3-b^3}{a+b}+\frac{b^3-c^3}{b+c}+\frac{c^3-a^3}{c+a}\right| \leqslant \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{4}$, *dla* $a,b,c>0$.

([OM] Mołdawia 2004).

6.4.24. $\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{n-1}$, *dla* $a,b,c>0$.

([OM] Grecja 1987, [Pa97]).

6.4.25. $\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$, *dla* $a,b,c>0$. ([MaS] 4/1993, [Ko04] 17).

6.4.26. $\frac{a^r}{a+b}+\frac{b^r}{b+c}+\frac{c^r}{c+a} \geqslant \frac{1}{2}\left(a^{r-1}+b^{r-1}+c^{r-1}\right)$ *dla* $r \geqslant \frac{3}{2}$.

(V.Cirtoaje, Pham Kim Hung [Pkh] s.168).

6.4.27. $\frac{a^{k+n}}{b^k}+\frac{b^{k+n}}{c^k}+\frac{c^{k+n}}{a^k} \geqslant a^n+b^n+c^n$, *dla* $a,b,c>0$, $n,k\in\mathbb{N}$. ([OM] Serbia-Czarnogóra 2002).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.5 Jednorodne nierówności wymierne czterech zmiennych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.5.1. *Jeśli* $a,b,c,d>0$, *to:*

(1) $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \geqslant \frac{a+b+c+d}{abcd}$, ([OM] Austria 2005);

(2) $\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3+c^3}+\frac{1}{a^3+d^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{b^3+d^3}+\frac{1}{c^3+d^3} \geqslant \frac{243}{(a+b+c+d)^3}$,

([Pkh] s.156).

6.5.2. *Jeśli* $a,b,c,d>0$, *to:*

(1) $\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+cd}+\frac{1}{d^2+da} \geqslant \frac{4}{ac+bd}$, ([Pkh] s.23);

(2) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2 \geqslant \frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2+b^2}+\frac{9}{a^2+b^2+c^2}+\frac{16}{a^2+b^2+c^2+d^2}$,

(Pham Kim Hung [Pkh] s.24);

(3) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2 \geqslant \frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2+b^2}+\frac{12}{a^2+b^2+c^2}+\frac{18}{a^2+b^2+c^2+d^2}$,

(Pham Kim Hung [Pkh] s.25).

6.5.3. *Jeśli $a, b, c, d > 0$, to:*

(1) $$\frac{12}{a+b+c+d} \leqslant \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d} \leqslant \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

([Kw] 2/1997 42);

(2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geqslant \frac{16}{a+b+c+d}$, ([Str1] s.73);

(3) $\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d} \geqslant \frac{16}{a+b+c+d}$, ([Str1] 34);

(4) $\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{a^2+c^2+d^2}+\frac{c}{a^2+b^2+d^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{4}{a+b+c+d}$,

(Pham Kim Hung [Pkh] s.37).

6.5.4. *Jeśli $a, b, c, d > 0$, to:*

(1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geqslant \frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}$, ([Math] 2006);

(2) $\frac{a^2b}{d}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2d}{b}+\frac{d^2a}{c} \geqslant ab+bc+cd+da$, (3.6.9, [Ko03]);

(3) $\frac{a^3b^2}{c}+\frac{b^3c^2}{d}+\frac{c^3d^2}{a}+\frac{d^3a^2}{b} \geqslant ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b$, (3.6.9, [Ko03] 50).

6.5.5. *Dla dodatnich liczb a, b, c, d zachodzą następujące nierówności.*

(1) $\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+d}+\frac{c}{2d+a}+\frac{d}{2a+b} \geqslant \frac{4}{3}$;

(2) $\frac{a}{a+2b+c}+\frac{b}{b+2c+d}+\frac{c}{c+2d+a}+\frac{d}{d+2a+b} \geqslant 2$, ([Ko04] 17);

(3) $\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{d+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}$,

([IMO] Shortlist 1993, [OM] USA 1993, [Pa97]);

(4) $1 < \frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d} < 2$, ([IMO] 1974, [Br80] 95);

(5) $\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a} \geqslant 4$, ([IMO] Shortlist 1971, [Balt] 1996);

(6) $\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b} \geqslant 0$, ([AnC], [OM] Chorwacja 2009);

(7) $\frac{b-a}{d+a}+\frac{c-b}{a+b}+\frac{d-c}{b+c}+\frac{a-d}{c+d} \geqslant 0$. ([Dlt] 2/2003 z.448);

(8) $\left(2+\frac{2a}{b+c}\right)\left(2+\frac{2b}{c+d}\right)\left(2+\frac{2c}{d+a}\right)\left(2+\frac{2d}{a+b}\right) \geqslant 9$,

(V.Cirtoaje, [Pkh] s.166);

(9) $\left(2+\frac{ka}{b+c}\right)\left(2+\frac{kb}{c+d}\right)\left(2+\frac{kc}{d+a}\right)\left(2+\frac{kd}{a+b}\right) \geqslant (k+1)^2$,

dla dowolnego $k \geqslant 0$, ([Pkh] s.166).

6.5.6. $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leqslant \dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$, *dla* $a,b,c,d>0$. ([OM] Wietnam 1962, [ChKh] 33, 85).

D. Standardowe przekształcenia sprowadzją tę nierówność do równoważnej oczywistej nierówności

$$\frac{(ad-bc)^2}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)} \geqslant 0. \boxtimes$$

6.5.7. $\dfrac{a^2}{b+c+d}+\dfrac{b^2}{c+d+a}+\dfrac{c^2}{d+a+b}+\dfrac{d^2}{a+b+c} \geqslant \dfrac{a+b+c+d}{3}$, *dla* $a,b,c,d>0$.

D. $(a+b+c+d)^2$

$$= \left(\tfrac{a}{\sqrt{b+c+d}}\sqrt{b+c+d}+\tfrac{b}{\sqrt{c+d+a}}\sqrt{c+d+a}+\tfrac{c}{\sqrt{d+a+b}}\sqrt{d+a+b}+\tfrac{d}{\sqrt{a+b+c}}\sqrt{a+b+c}\right)^2$$

$$\leqslant \left(\tfrac{a^2}{b+c+d}+\tfrac{b^2}{c+d+a}+\tfrac{c^2}{d+a+b}+\tfrac{d^2}{a+b+c}\right)\Big((b+c+d)+\cdots+(a+b+c)\Big)$$

$$= 3\left(\tfrac{a^2}{b+c+d}+\tfrac{b^2}{c+d+a}+\tfrac{c^2}{d+a+b}+\tfrac{d^2}{a+b+c}\right)(a+b+c+d).$$

Wykorzystaliśmy nierówność Cauchy'ego 2.6.1. $\boxtimes$

6.5.8. *Dla dodatnich liczb* a,b,c,d *zachodzą następujące nierówności.*

(1) $\dfrac{a^2}{b(a+c)}+\dfrac{b^2}{c(b+d)}+\dfrac{c^2}{d(c+a)}+\dfrac{d^2}{a(d+b)} \geqslant 2$, ([Ko04] 17);

(2) $\left(\dfrac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{b+c+d}\right)^2+\left(\dfrac{c}{c+d+a}\right)^2++\left(\dfrac{d}{d+a+b}\right)^2 \geqslant \dfrac{4}{9}$, ([Pkh] s.94);

(3) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\dfrac{a^2+b^2+d^2}{a+b+d}+\dfrac{a^2+c^2+d^2}{a+c+d}+\dfrac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} \geqslant a+b+c+d$,

([Cmj] 1978 s.238, [OMm] 1997/1998);

(4) $\dfrac{(a-b)(a-c)}{a+b+c}+\dfrac{(b-c)(b-d)}{b+c+d}+\dfrac{(c-d)(c-a)}{c+d+a}+\dfrac{(d-a)(d-b)}{d+a+b} \geqslant 0$,

([IMO] Shortlist 2008);

(5) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+d^2}+\dfrac{d^3}{d^2+a^2} \geqslant \dfrac{a+b+c+d}{2}$, ([Pkh] s.28).

Literatura

[A-P] Asian Pacific Mathematical Olympiad.

[AF00] T. Andreescu, Z. Feng, G. Lee Jr., *Mathematical Olympiads* 1999 − 2000*. Problems and Solutions From Around the World*, The Mathematical Association of America, 2003.

[AnC] T. Andreescu, V. Cirtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004.

[AuP] Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne.

[Balk] Balkan Mathematical Olympiad.

[Balt] Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich.

[BoW] W. G. Bołtiański, I. J. Wilenkij, *Symetria w Algebrze* (po rosyjsku), Nauka, Moskwa, 1967.

[Br80] J. Browkin, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom 5, 21-25, 69/70 - 73/74, WSiP, Warszawa, 1980.

[Brad] C. J. Bradley, *Introduction to Inequalities*, The United Kingdom Mathematics Trust, Handbooks 2, 2006.

[ChKh] Le Hai Chau, Le Hai Khoi, *Selected Problems of the Vietnamese Masthematical Olympiad* (1962 – 2009), Mathematical Olympiad Series 5, World Scietific 2010.

[Cmj] The College Mathematics Journal, The Mathematical Association of America.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Gorn] J. Górnicki, *Okruchy Matematyki*, PWN, Warszawa 1995.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[Jlms] Journal of the London Mathematical Society, (J. London. Math. Soc.)

[Khr1] A. I. Khrabrov, *Around mongolian inequality*, (Russian), Matemat. Prosv., 3(7)(2003), 149-162.

[Khr2] A. I. Khrabrov, *Around mongolian inequality*, (Russian), Appendix to: St Petersburg mathematical olympiad, 2002. Nevsky Dialekt, St Petersburg, 2002, 146-167.

[Khr3] A. I. Khrabrov, *Cauchy–Bunyakovsky inequality*, (Russian). Appendix to: St Petersburg mathematical olympiad, 2003. Nevsky Dialekt, St Petersburg, 2003, 118-152.

[Ko00] L. Kourliandtchik, *Wędrówki po Krainie Nierówności*, Aksjomat, Toruń, 2000.

[Ko03] L. Kourliandtchik, *Powrót do Krainy Nierówności*, Aksjomat, Toruń, 2001.

[Ko04] L. Kourliandtchik, *Słynne Nierówności*, Aksjomat, Toruń, 2002.

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2012.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[LeH2] H. Lee, *Topics in Inequalities - Theorems and Techniques*, Internet 2009.

[Liu1] A. Liu, *Chinese Mathematics Competitions and Olympiads* 1981−1993, Australian Mathematic Trust Publications, 1998.

[M-pf] D. S. Mitrinović, J. E. Pećarić, A. M. Finc, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[MaOD] R. B. Manfrino, J. A. G. Ortega, R. V. Delgado, *Inequalities. A Mathematucal Olympiad Approach*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2009.

[MaS] Matematyka w Szkole, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[Math] The Mathscope. All the best from Vietnamese Problem Solving Journals. http://imocompendium.com/othercomp/Journ/mathscope.pdf.

[MC] Mathematics Competitions, popularne czasopismo matematyczne

[Mild] T. J. Mildorf, *Olympiad inequalities*, August 4, 2006, http://web.mit.edu/tmildorf/www.

[Mit2] D. S. Mitrinović, *Elementarne Nierówności*, PWN, Warszawa, 1972.

[Mitr] D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, P. Noordhoff LTD - Groningen, The Netherlands, 1964.

[MiV] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, 1970.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2012.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[Nord] Nordic Mathematical Competition.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[OMm] Mała Olimpiada Matematyczna.

[Pa97] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata*, Tutor, Toruń, 1997.

[Pcam] Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, (Proc. Cambridge Ph. Soc.).

[Pie2] E. Piegat, *Zadania Hugona Steinhausa Znane i Nieznane*, Opracował Edward Piegat, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005.

[Pkh] Pham Kim Hung, *Secrets in Inequalities*, Vol. 1. *Basic Inequalities*, GIL Publishing House, Romania 2007.

[Rias] S. Riasat, *Basics of Olympiad Inequalities*, Preprint, 2008.

[RiM] R i M, rumuńskie czasopismo matematyczne.

[Siw] I. H. Siwaszinskij, *Nierówności w Zadaniach* (po rosyjsku), Nauka, Moskwa, 1967.

[Stee] J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class. An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press, 2004.

[Str1] S. Straszewicz, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom II, 6-10, 54/55 - 58/59, PZWS, Warszawa, 1961.

[TT] Tournament of the Towns.

[Uiuc] UIUC Undergraduate Math Contest, University of Illinois at Urbana-Champaign.

[WaJ] N. B. Wasilev, A. A. Jegorow, *Zadania Olimpiad Matematycznych Związku Radzieckiego* (po rosyjsku), 1961-1987, Moskwa, Nauka, 1988.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.