Podróże po Imperium Liczb

Część 13. Nierówności

Rozdział 7

7. Różne nierówności wymierne

Andrzej Nowicki 4 maja 2013, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

7 Różne nierówności wymierne

7.1 Nierówności wymierne ze stałym iloczynem

W tym podrozdziale często zakładać będziemy, że iloczyn rozważanych liczb rzeczywistych jest równy 1. To założenie, że iloczyn danych liczb jest równy 1, można wysłowić przy pomocy innych równoważnych założeń. Zanotujmy kilka tego typu równoważności.

7.1.1. *Jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi różnymi od -1, to*

$$xy = 1 \iff \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = 1.$$

D. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = 1 \iff (1+y)+(1+x) = (1+x)(1+y) = 1+x+y+xy \iff xy = 1.$ ⊠

7.1.2. *Jeśli x, y, z są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, to*

$$xyz = 1 \iff \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$ ([MaS] 4/1993, [Mild]).

D. Załóżmy, że $xyz = 1$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} &= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{xy}{xy+xyz+xyzx} \\
&= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{xy}{1+x+xy} \\
&= \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1.
\end{aligned}$$

Niech $A = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$ oraz $s = xyz$. Załóżmy, że $A = 1$. Pokażemy, że $s = 1$.

Przypuśćmy, że $s > 1$. Wtedy mamy sprzeczność:

$$\begin{aligned}
1 = A &= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{xy}{xy+xyz+xyzx} \\
&= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{s+x+xy} + \frac{xy}{s+xs+xy} \\
&> \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{xy}{1+x+xy} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1.
\end{aligned}$$

Jeśli $s < 1$, to w ten sam sposób otrzymujemy sprzeczność $1 = A > 1$. Zatem $s = 1$. ⊠

Założenie o dodatniości liczb x, y, z jest tutaj istotne. Liczby $x = -2$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$ spełniają równość

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$$

i ich iloczyn jest różny od 1.

Dokładnie tak samo wykazujemy podobną równoważność dla czterech i więcej dodatnich liczb rzeczywistych. Zanotujmy to dla czterech liczb.

7.1.3. *Jeśli x, y, z, t są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, to $xyzt = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{1}{1+x+xy+xyz} + \frac{1}{1+y+yz+yzt} + \frac{1}{1+z+zt+ztx} + \frac{1}{1+t+tx+txy} = 1.$$

Zastępując w powyższych równoważnościach dodatnie liczby $x, y, z \dots$ odpowiednio ich odwrotnościami $x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}, \dots$, otrzymujemy:

7.1.4. *Dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z, t zachodzą następujące równoważności.*

$$\begin{aligned} xy = 1 &\iff \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = 1, \\ xyz = 1 &\iff \frac{xy}{xy+y+1} + \frac{yz}{yz+z+1} + \frac{zx}{zx+x+1} = 1, \\ xyzt = 1 &\iff \tfrac{xyz}{xyz+yz+z+1} + \tfrac{yzt}{yzt+zt+t+1} + \tfrac{ztx}{ztx+tx+x+1} + \tfrac{txy}{txy+xy+y+1} = 1. \end{aligned}$$

7.1.5. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant a + b + c$, *dla $a, b, c > 0$, $abc = 1$.* ([OM] Czechy-Słowacja 2003).

D. ([Rias]). Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną mamy:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = 3a.$$

Podobnie: $\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3b$ oraz $\frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} \geqslant 3c$. Dodajemy te trzy nierówności i otrzymujemy tezę. ⊠

7.1.6. *Jeśli $a, b, c > 0$, $abc = 1$, to:*

(1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \geqslant a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, ([ME] 12(4)(2007));

(2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 5 \geqslant (1+a)(1+b)(1+c)$, (Aaron Pixton, [Mild]).

7.1.7. *Jeśli $a, b, c > 0$, $abc = 1$, to:*

(1) $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$, ([IMO] Shortlist 1995, [OMm] 1995, [ME] 11(1)(2006));

(2) $\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leqslant 1$, ([IMO] Shortlist 1997, [Crux] 1998 s.460);

(3) $\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \leqslant 1$, ([OM] Rosja 1998);

(4) $\frac{a}{b^4+2} + \frac{b}{c^4+2} + \frac{c}{a^4+2} \geqslant 1$, ([Pkh] s.245);

(5) $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1$, ([IMO] 2000, [LeH2]);

(6) $\frac{1}{a(1+c)}+\frac{1}{b(1+a)}+\frac{1}{c(1+b)} \geqslant \frac{3}{2}$, ([Ko00], [OM] Kazachstan 2008, [MaOD] 42);

(7) $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1} \geqslant 1$, ([Pkh] s.40);

(8) $\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(b+1)(a+2)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)} \geqslant \frac{1}{2}$, ([Pkh] s.150);

(9) $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1} \geqslant 1$, ([Pkh] s.40);

(10) $\frac{6}{ab+bc+ca} \leqslant 1+\frac{3}{a+b+c}$, ([OM] Rumunia 2003);

(11) $\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$, ([Mild]);

(12) $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1} \geqslant 1$, ([Kw] 6/1997 M1597a);

(13) $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leqslant 1$, ([Kw] 6/1997 M1597a);

(14) $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leqslant \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$, ([OM] Bułgaria 1997);

(15) $\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1} \geqslant \frac{3}{2}$, ([ME] 12(4)(2007));

(16) $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)} \geqslant \frac{3}{4}$,
([OM] Czechy-Słowacja 2005, [MaOD] 12);

(17) $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \leqslant 1$, ([OM] Serbia i Czarnogóra 2005);

(18) $\frac{a^2}{b^3c+a+b}+\frac{b^2}{c^3a+b+c}+\frac{c^2}{a^3b+c+a} \leqslant 1$, ([Math] 2006);

(19) $\frac{ab}{a+1}+\frac{bc}{b+1}+\frac{ca}{c+1} \geqslant \frac{3}{2}$, ([OMm] 1996);

(20) $\frac{ab+1}{a+1}+\frac{bc+1}{b+1}+\frac{ca+1}{c+1} \geqslant 3$,
([OM] Ukraina 1998);

(21) $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geqslant \frac{3}{4}$,
([IMO] Shortlist 1998, [Djmp] 299(636)).

7.1.8. $\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)} > \frac{3}{\sqrt[3]{2}(1+\sqrt[3]{2})} > 1$, *dla* $a,b,c>0$ *i* $abc=2$.
([Ssm] 103(5)(2003) z.4748).

7.1.9. $\frac{a^2}{(a-1)^2}+\frac{b^2}{(b-1)^2}+\frac{c^2}{(c-1)^2}\geqslant 1$, *dla* $a,b,c\in\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$, $abc=1$.

([IMO] 2008).

7.1.10. $\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\leqslant 0$, *dla* $a,b,c>0$, $abc=8$.

([OM] Rumunia 2008, [MaOD] 43).

7.1.11. $\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2}\geqslant 0$, *dla* $a,b,c>0$, $abc\geqslant 1$.

([IMO] 2005, [ME] 11(1)(2006)).

7.1.12. $a^4+b^4+c^4+3(a+b+c)\geqslant \frac{a^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}+\frac{c^2}{b}$,

dla $a,b,c>0$ *i* $abc=-1$. ([OM] Iran 2003/2004, [Mild]).

7.1.13. *Niech* $x,y,z>0$, $xyz=1$. *Jeśli* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant x+y+z$, *to* $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\geqslant x^n+y^n+z^n$, *dla* $n\in\mathbb{N}$. ([OM] Rosja 1999).

7.1.14. *Niech* $a,b,c,d>0$, $abcd=1$. *Wtedy:*

(1) $\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+d)}+\frac{1}{d(1+a)}\geqslant 2$, ([ME] 12(4)(2007));

(2) $\frac{1+ab}{a+b}+\frac{1+bc}{b+c}+\frac{1+cd}{c+d}+\frac{1+da}{d+a}\geqslant 4$, ([IMO] 2002);

(3) $\frac{1+ab}{1+b}+\frac{1+bc}{1+c}+\frac{1+cd}{1+d}+\frac{1+da}{1+a}\geqslant 4$, ([OM] Rosja 1998);

(4) $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geqslant 1$, ([OM] Chiny 2004, [Pkh] s.161);

(5) $\frac{1}{(1+a)^k}+\frac{1}{(1+b)^k}+\frac{1}{(1+c)^k}+\frac{1}{(1+d)^k}\geqslant 2^{2-k}$, *dla* $k\geqslant 2$, (Mathlinks Lore, [Mild]).

7.1.15. *Niech* $x_1,\dots,x_n>0$, $x_1x_2\cdots x_n=1$. *Wtedy:*

(1) $x_1+\cdots+x_n\geqslant \frac{2}{1+x_1}+\frac{2}{1+x_2}+\cdots+\frac{2}{1+x_n}$, ([Pkh] s.146);

(2) $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1$, ([OM] Rumunia 1999, [Mild]);

(3) $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\leqslant n-1$, *dla* $n\geqslant 2$, ([OM] Rosja 1995);

(4) $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n+n}{4}$, *dla* $n\geqslant 2$, ([Mild]);

(5) $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant 1$, *dla* $n\geqslant 2$, ([Zw] 2006);

(6) $$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1, \ dla\ n\geqslant 4,$$

([OM] Rosja 2004, [ME] 12(4)(2007));

(7) $$\frac{x_1+3}{(x_1+1)^2}+\frac{x_2+3}{(x_2+1)^2}+\cdots+\frac{x_n+3}{(x_n+1)^2}\geqslant 3,$$ ([OM] W.Brytania 2005, [Pkh] s.198).

★ S. Malikic, *Inequalities with product condition*, [ME] 12(4)(2007).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.2 Nierówności wymierne n zmiennych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.2.1. $$\frac{1}{x_1^2+x_1}+\frac{1}{x_2^2+x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2+x_n}\geqslant\frac{1}{x_1^2+x_2}+\frac{1}{x_2^2+x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n^2+x_1},$$

dla $x_1,\dots,x_n>0$. ([Mat] 4/1997 z.1391).

7.2.2. $$\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant\frac{1}{1+\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}, \ dla\ x_1,\dots,x_n\geqslant 1.$$

([IMO] Shortlist 1998, [Djmp] s.299(636)).

7.2.3. $$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}.$$

([Cmj] 22(2)(1991) 171).

7.2.4. $$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}\geqslant\frac{n}{2n-1}, \ dla\ a_1,\dots,a_n>0,\ a_1+\cdots+a_n=1.$$ ([Balk] 1984).

7.2.5. $$\frac{a_1a_2\cdots a_n(1-(a_1+\cdots+a_n))}{(a_1+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)}\leqslant\frac{1}{n^{n+1}},$$

dla $a_1,\dots,a_n>0$ *i* $a_1+\cdots+a_n<1$. ([IMO] Shortlist 1998).

7.2.6. $$\frac{1}{a_1^k}+\frac{1}{a_2^k}+\cdots+\frac{1}{a_n^k}\geqslant n^{k+1}, \ dla\ a_1,\dots,a_n>0,\ n,k\in\mathbb{N}\ i\ a_1+\cdots+a_n=1.$$

([IMO] Longlist 1974).

7.2.7. $$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n\geqslant\frac{8(n-1)(1-a_1a_2\cdots a_n}{n^2}, \ dla\ a_1,\dots,a_n>0,\ n,k\in\mathbb{N}$$

oraz $a_1+\cdots+a_n=n$. (Pham Kim Hung [Pkh] s.209).

7.2.8. *Jeśli* $a_1+\cdots+a_n=1$, $a_1,\dots,a_n>0$, *to*

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Równość zachodzi tylko wtedy, gdy $a_1=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$. ([OM] ZSRR).

7.2.9. ([OM] Mołdawia 2002). *Jeśli* $a_1 + \cdots + a_n = 1$ *oraz* $u, v, a_1, \ldots, a_n > 0$, *to*

$$\frac{a_1^3}{ua_1 + va_2} + \frac{a_2^3}{ua_2 + va_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^3}{ua_{n-1} + va_n} + \frac{a_n^3}{ua_n + va_1} \geqslant \frac{1}{n(u+v)}.$$

7.2.10. ([OM] Mołdawia 2009) *Jeśli* $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_1, \ldots, a_n > 0$ *oraz* $a_1 + \cdots + a_n = 1$, *to*

$$\frac{a_1^{2-m} + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{1 - a_1} + \frac{a_2^{2-m} + a_3 + \cdots + a_n}{1 - a_2} + \cdots + \frac{a_n^{2-m} + a_1 \cdots + a_{n-2}}{1 - a_n} \geqslant n + \frac{n^m - 1}{n - 1}.$$

7.2.11. *Jeśli* $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ *są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, to*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \geqslant \frac{AB}{A+B},$$

gdzie $A = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B = \sum_{k=1}^{n} b_k$. ([Fom] 62/93).

7.2.12. *Niech* $a_1, \ldots, a_n$ *będą długościami boków n-kąta* $(n \geqslant 3)$ *i niech* $p = a_1 + \cdots + a_n$. *Wtedy:*

(1) $\displaystyle \frac{a_1}{p - 2a_1} + \cdots + \frac{a_n}{p - 2a_n} \geqslant \frac{n}{n-2}$, ([Kw] 2/1997 44);

(2) $\displaystyle \frac{p - a_1}{a_1} + \cdots + \frac{p - a_n}{a_n} \geqslant (n-1)^2 \left(\frac{a_1}{p - a_1} + \cdots + \frac{a_n}{p - a_n} \right)$, ([Ko03] 59);

(3) $\displaystyle \frac{n}{n-1} \leqslant \frac{a_1}{p - a_1} + \cdots + \frac{a_n}{p - a_n} \leqslant 2$, ([IMO] Longlist 1979).

7.2.13. *Jeśli* $n \geqslant 2$ *oraz* $x_1, \ldots, x_n > 0$, $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, *to*

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_3 + \cdots + x_n + x_1} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + \cdots + x_{n-1}} \geqslant \frac{1}{n(n-1)}.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. ([OM] Turcja, [Mild]).

7.2.14. *Jeśli* $a_1, \ldots, a_n > 0$ *i* $a_{n+1} = a_1$, *to*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \right) \geqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i). \quad \text{([MC] 12(1999) 28, [KoM] 1999(12) A224, [Ko03] 109).}$$

7.2.15. *Jeśli* $a_1, \ldots, a_n > 0$ *i* $a_{n+1} = a_1$, *to*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a_i^3}{a_{i+1}} \right) \geqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i a_{i+1}). \quad \text{([Ko03] 113).}$$

7.2.16. *Niech* $0 < p < q$ *i niech* $a_1, \dots, a_n \in [p, q]$. *Wtedy*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant n^2 + \frac{k_n(q-p)^2}{4pq},$$

gdzie $k_n = n^2$ *dla parzystych* n *oraz* $k_n = n^2 - 1$ *dla nieparzystych* n. ([Pkh] s.77).

7.2.17. *Jeśli* $b_1, \dots, b_n$ *jest permutacją dodatnich liczb* $a_1, \dots, a_n$, *to* $\frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n$. ([Kurs] 115(1935)).

★ Kin-Yin Li, *Using tangent lines to prove inequalities*, [ME] 10(5)(2005) 1-2.
N. Sato, *Tips on inequalities*, [Crux] 1998 161-167.
N. Siedrakjan, *O przekształceniu pewnej nierówności*, [Kw] 2(1997) 42-44.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.3 Nierówności wymierne jednej zmiennej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.3.1. $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geqslant 0$, *dla* $x \neq 0$. ([OM] Irlandia 1998).

7.3.2. $\dfrac{x^n + x^{-n} - 2}{x + x^{-1} - 2} \geqslant n^2$, *dla* $x > 0$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$. ([OM] Węgry-Izrael 1992).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.4 Nierówności wymierne dwóch zmiennych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.4.1. *Niech* $x, y > 0$ *i* $xy = 1$. *Jeśli* $\alpha \leqslant \beta$, *to*

$$x^\alpha + y^\alpha \leqslant x^\beta + y^\beta.$$

D. Niech $\beta = \alpha + \gamma$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} x^\alpha + y^\alpha \leqslant x^\beta + y^\beta \quad &\iff \quad \frac{x^{2\alpha}+1}{x^\alpha} \leqslant \frac{x^{2\beta}+1}{x^\beta} \iff x^\gamma(x^{2\alpha}+1) \leqslant x^{2\alpha+2\gamma} + 1 \\ &\iff \quad x^{2\alpha+\gamma} + x^\gamma \leqslant x^{2\alpha+2\gamma} + 1 \iff x^{2\alpha+2\gamma} - x^{2\alpha+\gamma} - x^\gamma + 1 \geqslant 0 \\ &\iff \quad (x^\gamma - 1)\left(x^{2\alpha+\gamma} - 1\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa. ⊠

7.4.2. *Niech* $x > 0$. *Jeśli* $\alpha \leqslant \beta$, *to*

$$x^\alpha + \frac{1}{x^\alpha} \leqslant x^\beta + \frac{1}{x^\beta}.$$

(Wynika z 7.4.1).

7.4.3. *Niech* $x_1, \dots, x_n > 0$, $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ *i* $\alpha \leqslant \beta$. *Czy prawdą jest, że wtedy*

$$x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha \leqslant x_1^\beta + \cdots + x_n^\beta\,?$$

Z 7.4.1 *wynika, że tak jest dla* $n = 2$.

7.4.4. $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \geqslant \dfrac{1}{1+ab}$ *dla* $a, b > 0$. ([Pkh] s.161).

7.4.5. $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \dfrac{1}{b}\right)^2 \geqslant \dfrac{25}{2}$, *dla* $a, b > 0$ *i* $a + b = 1$. ([OM] Indie 1988).

7.4.6. $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{a^2}{a+1} + \dfrac{b^2}{b+1} < \dfrac{1}{2}$, *dla* $a, b > 0$ *i* $a + b = 1$. ([OM] Indie 1997).

7.4.7. $\dfrac{1}{\frac{a}{x} + \frac{b}{y}} \leqslant ax + by$, *dla* $a, b, x, y > 0$, $a + b = 1$. ([OM] Grecja 2001).

7.4.8. $\dfrac{ab}{a+b+2} \leqslant \sqrt{2} - 1$, *gdy* $a^2 + b^2 = 4$ *i* $a, b > 0$. ([OM] Austria 1989).

7.4.9. *Jeśli* $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, *to:*

(1) $0 \leqslant \dfrac{b-a}{1-ab} \leqslant 1$,

(2) $0 \leqslant \dfrac{a}{1+b} + \dfrac{b}{1+a} \leqslant 1$,

(3) $0 \leqslant ab^2 - ba^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$. ([MaOD] 4).

7.4.10. $\dfrac{a^2}{b-1} + \dfrac{b^2}{a-1} \geqslant 8$, *dla* $a > 1$, $b > 1$. ([OM] ZSRR 1992).

7.4.11. $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^m \geqslant 2^{m+1}$, *dla* $a, b > 0$, $m \in \mathbb{Z}$.
([IMO] Shortlist 1968, [Djmp] s.53(263)).

7.4.12. $\dfrac{a}{b+ab} + \dfrac{b}{a+ab} \geqslant 1$, *dla* $a, b > 0$, $a + b \leqslant 2$. ([OM] St Petersburg 1995).

7.4.13. $\dfrac{a}{a^4+b^2} + \dfrac{b}{b^4+a^2} \leqslant \dfrac{1}{ab}$, *dla* $a, b > 0$. ([Kw] 5/1995).

7.4.14. $\dfrac{a^{s+1}}{x^s} + \dfrac{b^{s+1}}{y^s} \geqslant \dfrac{(a+b)^{s+1}}{(x+y)^s}$, *dla* $a, b, x, y, s > 0$. ([Bryn] 4.3).

7.4.15. $\dfrac{1}{1-a^2} + \dfrac{1}{1-b^2} \geqslant \dfrac{2}{1-ab}$, *gdy* $|a| < 1$ *i* $|b| < 1$.
([OM] Rosja 1993, [MaS] 2/1993).

7.4.16. *Jeśli* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *jest funkcją rosnącą, to*

$$\frac{1}{f(a)+a} + \frac{1}{f(b)+b} \geqslant \frac{1}{f(a)+b} + \frac{1}{f(b)+a},$$

dla $a, b \in \mathbb{R}^+$. ([Bedn] 62).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.5 Nierówności wymierne trzech zmiennych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.5.1. *Jeśli $a, b, c > 0$, to:*

(1) $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geqslant \frac{9}{10}$, ([OM] Indie 1997);

(2) $\frac{a}{b^2+c} + \frac{b}{c^2+a} + \frac{c}{a^2+b} \geqslant \frac{9}{4}$, ([OM] Serbia i Czarnogóra);

(3) $1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geqslant \frac{6}{a+b+c}$, ([MaOD] 32);

(4) $\frac{1}{ab+a} + \frac{1}{bc+b} + \frac{1}{ca+c} \geqslant \frac{3}{1+abc}$,

(M. Aassila, [Crux] z.2362, [OM] Indie 1997, [KoM] 2003 A324);

(5) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) \geqslant \frac{9}{1+abc}$, (W. Janous, [Pkh] s.145);

(6) $a+b+c \geqslant a\frac{c+1}{a+1} + b\frac{a+1}{b+1} + c\frac{b+1}{c+1}$, ([OM] Rosja 1998);

(7) $3+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \frac{3(a+1)(b+1)(c+1)}{1+abc}$, ([Kw] 1988);

(8) $\frac{1+a^2}{a^2+b+1} + \frac{1+b^2}{b^2+c+1} + \frac{1+c^2}{c^2+a+1} \geqslant 2$, (IBMO 2002);

(9) $\frac{a^2-b^2}{2a^2+1} + \frac{b^2-c^2}{2b^2+1} + \frac{c^2-a^2}{2c^2+1} \leqslant 1$, ([OM] Grecja 2005);

(10) $\frac{1+bc}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1+ac}{b(b-a)b-c)} + \frac{1+ab}{c(c-a)(c-b)} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, *dla różnych a, b, c,*

([Ssm] 103(1)(2003));

(11) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqslant 2 + 2\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$, ([A-P] 1998, [Pkh] s.18).

7.5.2. $\frac{a^4}{(b-1)^2} + \frac{b^4}{(c-1)^2} + \frac{c^4}{(a-1)^2} \geqslant 48$, *dla $a, b, c > 1$.* ([ME] 13(5)(2009)).

7.5.3. $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$, *gdy $a, b, c > 0$ i $a < b + c$.*

(Stellenbosch, Léo Sauvé, [Crux] z.54).

7.5.4. $\frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{b^2+b} + \frac{1}{c^2+c} \geqslant \frac{1}{a^2+b} + \frac{1}{b^2+c} + \frac{1}{c^2+a}$, *dla $a, b, c > 0$.*

([Mat] 4/1997 z.1391).

7.5.5. $\frac{a^2+3ab}{a+b} + \frac{b^2+3bc}{b+c} + \frac{c^2+3ca}{c+a} \leqslant 2$, *dla $a, b, c > 0$, $a+b+c=1$.* ([Kw] 6/2008 14).

D. ([Kw]). Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{2xy}{x+y} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Mamy bowiem: $4xy \leqslant (x+y)^2 \iff 0 \leqslant x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$. Z tej nierówności wynika, że

$$\frac{x^2+3xy}{x+y} = \frac{(x^2+xy)+2xy}{x+y} = x + \frac{2xy}{x+y} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Mamy zatem: $\frac{a^2+3ab}{a+b} + \frac{b^2+3bc}{b+c} + \frac{c^2+3ca}{c+a} \leqslant \frac{3}{2}(a+b+c) + \frac{1}{2}(a+b+c) = 2.$ ⊠

7.5.6. *Jeśli $a, b, c > 0$ oraz $a+b+c=1$, to:*

(1) $\frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4b^2} + \frac{1}{1+4c^2} \geqslant 2$, ([Kw] 2/2007 24);

(2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{25}{1+48abc}$, ([Kw] 6/2006 19);

(3) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$, ([OM] Rosja 2003, [Kw] 2/2004 M1881);

(4) $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leqslant \frac{3}{4}$, ([OM] Polska 1987);

(5) $\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leqslant \frac{2a}{b} + \frac{2b}{c} + \frac{2c}{a}$, ([OM] Japonia 2004, [Pkh] s.42);

(6) $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \geqslant \frac{3}{5}$, ([OM] Rosja 1998);

(7) $\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} \leqslant \frac{1}{4}$, ([MOc] 2000, [OMm] 1998/1999);

(8) $\frac{a^2+b}{b+c} + \frac{b^2+c}{c+a} + \frac{c^2+a}{a+b} \geqslant 2$, ([AnC]);

(9) $\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leqslant \frac{3}{2}$, ([OM] Kanada 2008);

(10) $\frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2}{c+ab} \geqslant \frac{3}{4}$, ([Cmj] 19(3)(1988) 291-292);

(11) $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geqslant \frac{1}{2}$, ([OM] Chorwacja 1999, [MOc] 2002 z.161);

(12) $(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{a^2+a}\right) \geqslant \frac{3}{4}$, (G. Dospinescu, [Crux] z.3062);

(13) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \frac{100}{3}$, ([MaOD] 30);

(14) $\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5} + \frac{b^7+c^7}{b^5+c^5} + \frac{c^7+a^7}{c^5+a^5} \geqslant \frac{1}{3}$, ([OM] Kazachstan 2000).

7.5.7. $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geqslant 64$, *dla $a, b, c > 0$, $a+b+c=1$.* ([Crux] 1998 s.164).

7.5.8. $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geqslant 8$, *dla* $a, b, c > 0$, $a+b+c=1$. ([Crux] 1998 s.167).

7.5.9. $\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_5}-1\right) \geqslant 1024$, *dla* $a_1, \ldots, a_5 > 0$, $a_1+\cdots+a_5=1$. ([WyKM] 447-65).

7.5.10. *Jeśli* $a, b, c > 0$ *oraz* $a+b+c=3$, *to:*

(1) $\frac{1}{2+2a^2b^2}+\frac{1}{2+b^2c^2}+\frac{1}{2+c^2a^2} \geqslant 1$, (Pham Kim Hung, [Pkh] s.211);

(2) $\frac{ab+bc+ca}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3} \geqslant \frac{a^3+b^3+c^3}{36}$, (([Pkh] s.160);

(3) $\frac{1}{1+2b^2c}+\frac{1}{1+2c^2a}+\frac{1}{1+2a^2b} \geqslant 2$, ([Pkh] s.30);

(4) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant a^2+b^2+c^2$, (V. Cirtoaje, [Pkh] s.56);

(5) $\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{a+b^2+c}+\frac{1}{a+b+c^2} \leqslant 1$, ([Pkh] s.59);

(6) $\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ca} \leqslant \frac{3}{8}$, ([Pkh] s.62);

(7) $\frac{a}{1+b^3}+\frac{b}{1+c^3}+\frac{c}{1+a^3} \geqslant \frac{3}{2}$, ([Pkh] s.237);

(8) $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{2+a}{2+b}+\frac{2+b}{2+c}+\frac{2+c}{2+a}$, ([Pkh] s.147);

(9) $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \geqslant \frac{3}{2}$, ([OM] Bułgaria 2003, [Crux] z.2994, [Pkh] s.27);

(10) $\frac{a}{b^2+c}+\frac{b}{c^2+a}+\frac{c}{a^2+b} \geqslant \frac{3}{2}$, ((Pham Kim Hung, [Pkh] s.247);

(11) $\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}$, (([Pkh] s.35);

(12) $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \geqslant 3$, ([Pkh] s.30);

(13) $\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3} \geqslant 1$, ([Pkh] s.29);

(14) $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1} \geqslant \frac{3}{2}$, ([Crux] z.2994);

(15) $\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1} \geqslant \frac{3}{2}$, ([Crux] z.2994);

(16) $\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \geqslant 1$, ([Pkh] s.29);

(17) $\frac{a^2}{b+1}+\frac{b^2}{c+1}+\frac{c^2}{a+1} \geqslant \frac{3}{2}$. ([Crux] z.2994).

7.5.11. $\dfrac{1}{2ab+ac+bc}+\dfrac{1}{2bc+ba+ca}+\dfrac{1}{2ca+cb+ab}\leqslant\dfrac{1}{abc}$,
dla $a,b,c>0,\ a+b+c=4$. ([MOc] z.556).

7.5.12. $\dfrac{a}{1+bc}+\dfrac{b}{1+ac}+\dfrac{c}{1+ab}\leqslant 2$, *dla* $a,b,c\in[0,1]$. ([Fom] 25/90).

7.5.13. $\dfrac{a}{b+c+1}+\dfrac{b}{c+a+1}+\dfrac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1$, *dla* $a,b,c\in[0,1]$. ([Mild]).

7.5.14. $\dfrac{a}{1+b+ca}+\dfrac{b}{1+c+ab}+\dfrac{c}{1+a+bc}\leqslant\dfrac{3}{a+b+c}$, *dla* $a,b,c\in(0,1]$.
([OM] Ukraina 1998, [Crux] 2003 s.445).

7.5.15. $\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{b}{1-b}+\dfrac{c}{1-c}\geqslant\dfrac{3x}{1-x}$, *dla* $a,b,c\in(0,1)$, *gdzie* $x=\sqrt[3]{abc}$. ([OM] Irlandia 2002).

7.5.16. $2\leqslant\dfrac{a+b}{1+c}+\dfrac{b+c}{1+a}+\dfrac{c+a}{1+b}\leqslant 3$, *dla* $a,b,c\in[\frac{1}{2},1]$. ([OM] Rumunia 2006).

7.5.17. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\leqslant 10$, *dla* $a,b,c\in[1,2]$. (Patrz 7.2.16, [Pkh] s.76).

7.5.18. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 6\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)$, *dla* $a,b,c\in[1,2]$.
([OM] Wietnam 2006, [Pkh] s.146).

7.5.19. *Liczby* a,b,c *są długościami boków trójkąta.*

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}+\dfrac{1}{a+b-c}$. ([OM] Polska 1993/1994);

(2) $2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\geqslant\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+3$, ([Kw]);

(3) $3\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}-1\right)\geqslant 2\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\right)$, (Vasile Cirtoaje, [Mild]);

(4) $\dfrac{3}{2}\leqslant\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<2$, ([OM] Indie 89, [OM] Norwegia 1993, [Pa97]);

(5) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\leqslant\dfrac{5}{2}$, ([Pkh] s.202);

(6) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\geqslant 3$, ([Kw]);

(7) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\geqslant\dfrac{b+c-a}{a}+\dfrac{c+a-b}{b}+\dfrac{a+b-c}{c}$, ([Zw] z.40);

(8) $\dfrac{a}{3a-b+c}+\dfrac{b}{3b-c+a}+\dfrac{c}{3c-a+b}\geqslant 1$, (S.Riasa,, [Pkh] s.41);

(9) $3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right) \geqslant (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$, ([MM] 44(3)(1971) 172);

(10) $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 3$, ([OM] Moskwa 1999);

(11) $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c} \geqslant 3\sqrt{3}R$, ([OM] Bośnia Hercegowina 1999).

7.5.20. *Jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to*

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{16}.$$ ([Ibe] 1989, [OMm] 1999/2000).

7.5.21. *Znaleźć największą liczbę naturalną n taką, że dla każdego trójkąta o bokach a, b, c zachodzi nierówność*

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{n}.$$

Odp. $n = 23$. (P. Kumor, [Mat] 4/2004 z.1629, rozw. [Mat] 3/2005).

7.5.22. *Jeśli $a^2+b^2+c^2=1$ i $a, b, c > 0$, to:*

(1) $\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c} \geqslant \frac{3\sqrt{3}+3}{2}$ ([Ko03] 47);

(2) $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca} \leqslant \frac{9}{2}$, (V. Cirtoaje, [Crux] z.3032);

(3) $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ([Crux] 2003 s.243, [OM] Brazylia 2004, [Ko03] 47);

(4) $\frac{a}{1-a^n}+\frac{b}{1-b^n}+\frac{c}{1-c^n} \geqslant \frac{(n+1)^{(n+1)/n}}{n}$ (T. Zvonaru, [Crux] z.2935);

(5) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$ (Hojoo Lee, [Crux] z.2532);

(6) $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \geqslant \frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})$, (Mediterranean Math. Comp. 2002);

(7) $\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ca}+\frac{c}{c^3+ab} \geqslant 3$, ([Pkh] s.171);

(8) $\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ac}+\frac{c^2}{1+2ab} \geqslant \frac{3}{5}$ ([OM] Bośnia Hercegowina 2002);

(9) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(a+b+c) \geqslant 2\sqrt{3}$ (P. E. Tsaoussoglou, [Crux] z.2946);

(10) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+(a+b+c) \geqslant 4\sqrt{3}$ (P. E. Tsaoussoglou, [Crux] z.2946);

(11) $a+b+c+\frac{1}{abc} \geqslant 4\sqrt{3}$. ([OM] Kazachstan 2000).

7.5.23. *Jeśli* $a^2+b^2+c^2=3$ *i* $a,b,c>0$, *to:*

(1) $\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geqslant 3$, ([Pkh] s.165);

(2) $\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\leqslant 1$, (V.Cirtoaje, [Pkh] s.200);

(3) $\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\leqslant \frac{1}{2}$, (Pham Kim Hung, [Pkh] s.145));

(4) $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geqslant \frac{3}{2}$, ([OM] Białoruś 1999);

(5) $\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geqslant 1$, ([OM] Estonia 2004);

(6) $\frac{1}{3-ab}+\frac{1}{3-bc}+\frac{1}{3-ca}+\frac{1}{3-a^2}+\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}\geqslant 3$, ([Pkh] s.181));

(7) $\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geqslant 1$, (Pham Kim Hung [Pkh] s.31).

7.5.24. $\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leqslant 1$, *dla* $a^4+b^4+c^4=3$ *i* $a,b,c>0$.
([OM] Mołdawia 2005, [Pkh] s.64).

7.5.25. $\frac{a^3}{1-a^8}+\frac{b^3}{1-b^8}+\frac{c^3}{1-c^8}\geqslant \frac{9\sqrt[4]{3}}{8}$, *dla* $a^4+b^4+c^4=1$ *i* $a,b,c>0$. ([Ko03] 47).

7.5.26. *Jeśli* $ab+bc+ca=1$ *i* $a,b,c>0$, *to:*

(1) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant \frac{5}{2}$, (Berkely Math. Circle, [Pkh] s.159);

(2) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b+c}\geqslant 3$, ([Pkh] s.159).

★ P. Aleksiejew, L. Kurlandczyk, *Boki trójkąta* (po rosyjsku), Matematiczeskij Kružok 3/99, 42-45.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.6 Nierówności wymierne czterech zmiennych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.6.1. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\leqslant \frac{1}{64abcd}$, *dla* $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d<1$. ([OM] Indie 1995).

7.6.2. $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geqslant \frac{1}{2}$, *dla* $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=1$.
Równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy $a=b=c=d=\frac{1}{4}$. ([OM] Irlandia 1999).

7.6.3. *Jeśli* $a,b,c,d>0$ *oraz* $a+b+c+d=4$, *to:*

(1) $\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\leqslant 1$, (V.Cirtoaje, [Pkh] s.27);

(2) $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}+\dfrac{1}{d^2+1}\geqslant 2$, ([Pkh] s.30);

(3) $\dfrac{a}{b^2+1}+\dfrac{b}{c^2+1}+\dfrac{c}{d^2+1}+\dfrac{d}{a^2+1}\geqslant 2$, ([Pkh] s.27);

(4) $\dfrac{1}{a^2+11}+\dfrac{1}{b^2+11}+\dfrac{1}{c^2+11}+\dfrac{1}{d^2+11}\leqslant \dfrac{1}{3}$, ([Pkh] s.55);

(5) $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{d^2+1}+\dfrac{d+1}{a^2+1}\geqslant 4$, ([Pkh] s.30);

(6) $\dfrac{a}{b^2c+1}+\dfrac{b}{c^2d+1}+\dfrac{c}{d^2a+1}+\dfrac{d}{a^2b+1}\geqslant 2$, ([Pkh] s.28);

(7) $\dfrac{1+ab}{1+b^2c^2}+\dfrac{1+bc}{1+c^2d^2}+\dfrac{1+c}{1+d^2a^2}+\dfrac{1+d}{1+a^2b^2}\geqslant 4$, ([Pkh] s.30).

7.6.4. $\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{c+d}{d+a}\leqslant 4\dfrac{a+c}{b+d}$, *dla* $a,b,c,d\in[1,2]$. ([OM] Ukraina 1992).

7.6.5. *Jeśli* $a,b,c,d>0$ *oraz* $a^2+b^2+c^2+d^2=4$, *to:*

(1) $\dfrac{1}{5-a}+\dfrac{1}{5-b}+\dfrac{1}{5-c}+\dfrac{1}{5-d}\leqslant 1$, (Pham Kim Hung [Pkh] s.61);

(2) $\dfrac{a^2}{b+c+d}+\dfrac{b^2}{c+d+a}+\dfrac{c^2}{d+a+b}+\dfrac{d^2}{a+b+c}\geqslant \dfrac{4}{3}$, ([Pkh] s.54);

(3) $\dfrac{1}{3-abc}+\dfrac{1}{3-bcd}+\dfrac{1}{3-cda}+\dfrac{1}{3-dab}\leqslant 2$, (Pham Kim Hung [Pkh] s.195).

7.6.6. $\dfrac{a^3}{b+c+d}+\dfrac{b^3}{c+d+a}+\dfrac{c^3}{d+a+b}+\dfrac{d^3}{a+b+c}\geqslant \dfrac{1}{3}$,
dla $a,b,c,d>0$, $ab+bc+cd+da=1$. ([IMO] Shortlist 1990, [Djmp] s.253(540)).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.7 Nierówności wymierne dla liczb całkowitych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.7.1. $\dfrac{1}{1999}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dots\cdot\dfrac{1997}{1998}<\dfrac{1}{44}$. ([OM] Kanada 1997).

7.7.2. $n^n>(n+1)^{n-1}+\dfrac{n}{n+1}$, *dla* $2\leqslant n\in\mathbb{N}$. ([Miss] z.153).

7.7.3. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n<2$, *dla* $n\in\mathbb{N}$, $n>1$. ([Bryn] 4.1).

7.7.4. $\left(1-\dfrac{1}{n_1^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n_k^2}\right)>\dfrac{1}{2}$, *gdzie* $k\geqslant 2$ *oraz* $n_1,\dots,n_k$ *są parami różnymi liczbami naturalnymi większymi od* 1. ([WyKM] z.553).

D. ([WyKM] s.161). Niech m będzie największą z liczb $n_1, \dots, n_k$. Wtedy $m \geqslant 3$ oraz

$$\left(1-\frac{1}{n_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{n_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n_k^2}\right) \geqslant \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m^2}\right).$$

Prawa strona tej nierówności jest równa

$$\frac{(1\cdot 3)(2\cdot 4)(3\cdot 5)\cdots((m-1)(m+1))}{2^2\cdot 3^2\cdot m^2} = \frac{m+1}{2m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}$$

i oczywiście $\frac{1}{2} + \frac{1}{2m} > \frac{1}{2}$. ⊠

7.7.5. $\dfrac{3n+1}{2n+2} < \left(\dfrac{1}{n}\right)^n + \left(\dfrac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^n < 2$, *dla* $n > 1$. ([Putn] 1962).

7.7.6. $\dfrac{2}{3+1} + \dfrac{2^2}{3^2+1} + \dfrac{2^3}{3^4+1} + \cdots + \dfrac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1} < 1$, *dla* $n \geqslant 1$. ([OM] Mołdawia 2009).

7.7.7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geqslant n\left(\frac{n}{s} + \frac{s}{n}\right)^2$, *dla* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, *gdzie* $s = a_1 + \cdots + a_n$. ([OM] Wietnam 1980).

7.7.8. *Jeśli* $x_1, \dots, x_n$ *są parami różnymi liczbami naturalnymi, to*

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \geqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$ ([Mon] 2/2005 z.11012).

7.7.9. $\dfrac{a_1^2}{1} + \dfrac{a_2^2}{2} + \cdots + \dfrac{a_n^2}{n} \geqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$, *gdy* $\{a_1, \dots, a_n\}$ *jest permutacją zbioru* $\{1, 2, \dots, n\}$. ([Bedn] 182).

7.7.10. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2+\dfrac{1}{y}\right)\left(3+\dfrac{1}{c}\right) \leqslant \dfrac{50}{3}$, *dla parami różnych liczb naturalnych* x, y, z.

D. (Sposób I). Niech $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $h(x) = \frac{1}{x}$ oraz

$$H(x,y,z) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(3+\frac{1}{z}\right).$$

Zauważmy, że $\frac{50}{3} = H(1,2,3)$. Teza wynika więc z twierdzenia **??**.

(Sposób II). Powtarzamy dowód twierdzenia **??**. Niech $H(x,y,z) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(3+\frac{1}{z}\right)$. Zauważmy, że $\frac{50}{3} = f(1,2,3)$. Niech x, y, z będą parami różnymi liczbami naturalnymi. Rozpatrzmy 6 przypadków.

Przypadek 1: $x < y < z$. W tym przypadku $x \geqslant 1$, $y \geqslant 2$ oraz $z \geqslant 3$. Mamy więc:

$$\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\left(2+\tfrac{1}{y}\right)\left(3+\tfrac{1}{z}\right) \leqslant \left(1+\tfrac{1}{1}\right)\left(2+\tfrac{1}{2}\right)\left(3+\tfrac{1}{3}\right) = f(1,2,3) = \tfrac{50}{3}.$$

Przypadek 2: $x < z < y$. W tym przypadku $x \geqslant 1$, $y \geqslant 3$ oraz $z \geqslant 2$. Mamy więc:

$$\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\left(2+\tfrac{1}{y}\right)\left(3+\tfrac{1}{z}\right) \leqslant \left(1+\tfrac{1}{1}\right)\left(2+\tfrac{1}{3}\right)\left(3+\tfrac{1}{2}\right) = f(1,3,2) = \tfrac{49}{3} < \tfrac{50}{3}.$$

Przypadek 3: $y < x < z$. W tym przypadku $x \geqslant 2$, $y \geqslant 1$ oraz $z \geqslant 3$. Mamy więc:

$$\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\left(2+\tfrac{1}{y}\right)\left(3+\tfrac{1}{z}\right) \leqslant \left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(2+\tfrac{1}{1}\right)\left(3+\tfrac{1}{3}\right) = f(2,1,3) = 15 < \tfrac{50}{3}.$$

W ten sam sposób postępujemy w następnych trzech przypadkach. ⊠

7.7.11. $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(3+\frac{1}{z}\right) \leqslant \frac{91}{8}$, *dla parami różnych liczb naturalnych* x, y, z *większych od* 1. (D. Marghidanu, [Crux] z.3040).

D. Niech $H(x,y,z) = \left(1+\frac{1}{1+x}\right)\left(2+\frac{1}{1+y}\right)\left(3+\frac{1}{1+z}\right)$. Zauważmy, że $H(1,2,3) = \frac{91}{8}$. Teza wynika więc z twierdzenia **??**. ⊠

Następne dwie nierówności również są konsekwencjami twierdzenia **??**.

7.7.12. $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{c}\right)\left(4+\frac{1}{d}\right) \leqslant \frac{425}{6}$, *dla parami różnych liczb naturalnych* a, b, c, d.

7.7.13. $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{c}\right)\left(4+\frac{1}{d}\right) \leqslant 40$, *dla parami różnych liczb naturalnych* a, b, c, d, *większych od* 2.

Zanotujmy podobnego typu nierówności dla pięciu i sześciu zmiennych.

7.7.14. *Jeśli* $x_1, x_2, \dots, x_5$ *są parami różnymi liczbami naturalnymi, to*

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right)\left(4+\frac{1}{x_4}\right)\left(5+\frac{1}{x_5}\right) \leqslant \frac{1105}{3}.$$

D. Niech $H(x_1,\dots,x_5) = \left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(5+\frac{1}{x_5}\right)$. Zauważmy, że $H(1,2,3,4,5) = \frac{1105}{3}$. Teza wynika więc z twierdzenia **??**. ⊠

7.7.15. *Jeśli* $x_1, x_2, \dots, x_6$ *są parami różnymi liczbami naturalnymi większymi od* 2, *to*

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right)\left(4+\frac{1}{x_4}\right)\left(5+\frac{1}{x_5}\right)\left(6+\frac{1}{x_6}\right) \leqslant 1260.$$

D. Niech $H(x_1,\dots,x_6) = \left(1+\frac{1}{2+x_1}\right)\left(2+\frac{1}{2+x_2}\right)\cdots\left(6+\frac{1}{2+x_6}\right)$. Wtedy $H(1,2,3,4,5,6) = 1260$ i teza wynika więc z twierdzenia **??**. ⊠

7.7.16. *W poniższych tabelkach podano przykłady takich trójek* (n, m, c), *że nierówność*

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{x_n}\right) < c$$

zachodzi dla parami różnych liczb naturalnych większych od m.

n	m	c
3	0	17
4	0	71
5	0	269
6	0	2272

n	m	c
3	1	12
4	1	48
5	1	247
6	1	1517

n	m	c
3	2	10
4	2	41
5	2	206
6	2	1261

n	m	c
3	3	9
4	3	37
5	3	185
6	3	1130

n	m	c
3	4	9
4	4	34
5	4	173
6	4	1051

7.7.17. *W poniższych tabelkach podano przykłady takich trójek* (n, m, c), *że nierówność*

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{x_3}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant c$$

zachodzi dla parami różnych liczb naturalnych większych od m.

n	m	c	n	m	c	n	m	c
3	0	16/9	3	1	125/144	3	2	3/5
4	0	625/576	4	1	9/20	4	2	2401/8640
5	0	27/50	5	1	16807/86400	5	2	512/4725
6	0	117649/518400	6	1	1024/14175	6	2	6561/179200

Każdą liczbę wymierną postaci $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, nazywamy *ułamkiem prostym*. Przedstawiamy nierówności z ułamkami prostymi, które pojawiły się w [N-1].

7.7.18. *Jeśli* (a_n) *jest ciągiem takim, że* $a_1 = 2$ *i* $a_{n+1} = a_1a_2\cdots a_n + 1$, *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1.$$

([Fom] 38/86, [N-1]).

7.7.19. *Jeśli* x, y *są liczbami naturalnymi takimi, że* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<1$, *to* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqslant\frac{5}{6}$.

7.7.20. *Jeśli* x, y, z *są liczbami naturalnymi takimi, że* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<1$, *to* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{41}{42}$.
([Fom] 15/86).

7.7.21. *Niech* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *będą takimi liczbami naturalnymi, że żadna z nich nie jest początkowym fragmentem żadnej innej (na przykład* 12 *jest początkowym fragmentem liczb* 12, 125 *lub* 12405). *Zachodzi wtedy nierówność:*

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}<3.$$ ([Balt] 2000).

7.7.22. $\frac{1}{kn}+\frac{1}{kn+1}+\frac{1}{kn+2}+\cdots+\frac{1}{kn+n-1}\geqslant n\left(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}}-1\right)$, *dla* $n, k \in \mathbb{N}$.

([OM] Izrael 1995).

7.7.23. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, *dla* $n \geqslant 2$. ([BaL] 463, [Szn] 1.70, [G-if] 102).

7.7.24. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$, *dla* $n \geqslant 3$. ([G-if] 204, [N-1]).

7.7.25. $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1$. ([Kurs] 125(1938)).

7.7.26. $1 < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{3n+1} < 2$. ([BoL] 51 s.55, [Szn] 1.70).

7.7.27. *Dla dowolnej liczby naturalnej n oznaczmy:*

$$h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Przyjmujemy dodatkowo, że $h(0) = 0$.

(1) $n(n+1)^{\frac{1}{n}} < n + h(n)$, *dla* $n \geqslant 2$. ([Putn] 1975).

(2) $(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}} < n - h(n)$, *dla* $n \geqslant 3$. ([Putn] 1975).

(3) $n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < h(n) < n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) + 1$. ([Kw] 8/77 45).

(4) $\dfrac{n}{2} < h\left(2^n - 1\right) < n$, *dla* $n \geqslant 2$. ([BoL] 40 s.55).

(5) *Jeśli* $h(n) > m$, *to* $h(3n) > m + 1$. ([OM] Litwa 1993).

(6) $h(n)^2 > 2\left(\dfrac{1}{2}h(2) + \dfrac{1}{3}h(3) + \cdots + \dfrac{1}{n}h(n)\right)$, *dla* $n > 2$. ([OM] Mołdawia 1998).

7.7.28. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność*

$$\sum \frac{1}{k} \geqslant \frac{\varphi(m)}{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

gdzie sumowanie po lewej stronie przebiega wszystkie liczby naturalne k takie, że $1 \leqslant k \leqslant n$ i $\mathrm{nwd}(k, m) = 1$. Przez $\varphi(m)$ oznaczamy liczbę wszystkich liczb naturalnych mniejszych lub równych m i względnie pierwszych z m. ([IMO] 1978, [KoM] 2000(5) A240).

7.7.29. $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{2}{3}$. ([Kw] 8/78 47).

7.7.30. $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 2 - \dfrac{1}{n}$. ([Crux] 1998 s.170).

7.7.31. $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{3n}{2n+1}$. ([Crux] z.108).

7.7.32. $\dfrac{m}{(n+1)(n+m+1)} < \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+m)^2} < \dfrac{m}{n(n+m)}$. ([Siw] 75).

7.7.33. $\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n+1)^2} < \dfrac{1}{4}$. ([BoL] 41 s.55, [Dlt] 1/77 6).

7.7.34. *Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o wyrazach dodatnich i różnicy $r > 0$, to*

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{ra_1}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. ([Bedn] 103).

7.7.35. *Jeśli x, y, z są liczbami naturalnymi takimi, że* $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{1}{z^2}$, *to* $\operatorname{nwd}(x, y) \geqslant 2$.

7.7.36. $\dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{5}{4}$. ([IMO] Longlist 1969, [OM] Grecja 2005).

7.7.37. $\dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{12}$. ([OM] Irlandia 1990).

7.7.38. $\left(1 - \dfrac{1}{2^3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4^3}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right) > \dfrac{1}{2}$. ([IMO] Longlist 1971).

7.7.39. *Oznaczmy przez $a(n)$ sumę $1^1 + 2^2 + \cdots + n^n$. Dla $n > 3$ zachodzą następujące nierówności.*

(1) $3a(n) > (n+1)^n$.

(2) $2a(n) < (n+1)^n$.

(3) $\dfrac{1}{n^n} > \dfrac{1}{a(n)} + \dfrac{1}{a(n+1)} + \dfrac{1}{a(n+2)} + \cdots$. ([Kw] 6/95 M1493).

7.7.40. *Niech (a_n) będzie ciągiem parami różnych liczb naturalnych, których rozwinięcia dziesiętne nie zawierają cyfry 0. Wtedy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 29.$$

([Br80] 89, [B-rs] 236).

7.7.41. *Niech (a_n) będzie ciągiem parami różnych liczb naturalnych, których rozwinięcia dziesiętne nie mają na początku cyfry 9. Wtedy szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ *jest zbieżny.* ([MM] 21(2)(1947) s.112).

7.7.42. *Niech (a_n) będzie ciągiem parami różnych liczb naturalnych, których rozwinięcia dziesiętne nie zawierają cyfry 9. Wtedy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 28.$$

([Br83] s.77).

Literatura

[A-P] Asian Pacific Mathematical Olympiad.

[AnC] T. Andreescu, V. Cirtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004.

[B-rs] J. Browkin, J. Rempała, S. Straszewicz, *25 lat Olimpiady Matematycznej*, WSiP, Warszawa, 1975.

[BaL] I. W. Baranowa, C. E. Lapin, *Zadania z Algebry* (po rosyjsku), Leningrad, 1954.

[Balk] Balkan Mathematical Olympiad.

[Balt] Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich.

[Bedn] W. Bednarek, *Zbiór Zadań dla Uczniów Lubiących Matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk, 1995.

[BoL] W. G. Bołtiański, W. G. Leman, *Zbiór Zadań Moskiewskich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), Moskwa, 1965.

[Br80] J. Browkin, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom 5, 21-25, 69/70 - 73/74, WSiP, Warszawa, 1980.

[Br83] J. Browkin, *Zbiór Zadań z Olimpiad Matematycznych*, tom 6, 26-30, 74/75 - 78/79, WSiP, Warszawa, 1983.

[Bryn] M. Bryński, *Olimpiady Matematyczne*, tom 7, 31-35, 79/80 - 83/84, WSiP, Warszawa, 1995.

[Cmj] The College Mathematics Journal, The Mathematical Association of America.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Fom] D. V. Fomin, *Sankt-Petersburskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Politechnika, Sankt-Petersburg, 1994.

[G-if] S. A. Genkin, I. W. Itenberg, D. V. Fomin, *Leningradzkie Kółka Matematyczne* (po rosyjsku), Kirow, ASA, 1994.

[Ibe] Iberoamerican Mathematical Olympiad.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[Ko00] L. Kourliandtchik, *Wędrówki po Krainie Nierówności*, Aksjomat, Toruń, 2000.

[Ko03] L. Kourliandtchik, *Powrót do Krainy Nierówności*, Aksjomat, Toruń, 2001.

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2012.

[Kurs] J. Kürschak, *Węgierskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), MIR, Moskwa, 1976.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[LeH2] H. Lee, *Topics in Inequalities - Theorems and Techniques*, Internet 2009.

[MaOD] R. B. Manfrino, J. A. G. Ortega, R. V. Delgado, *Inequalities. A Mathematucal Olympiad Approach*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2009.

[MaS] Matematyka w Szkole, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[Math] The Mathscope. All the best from Vietnamese Problem Solving Journals. `http://imocompendium.com/othercomp/Journ/mathscope.pdf`.

[MC] Mathematics Competitions, popularne czasopismo matematyczne

[ME] Mathematical Excalibur, chińskie popularne czasopismo matematyczne, Hong Kong.

[Mild] T. J. Mildorf, *Olympiad inequalities*, August 4, 2006, `http://web.mit.edu/tmildorf/www`.

[Miss] Missouri Journal of Mathematical Sciences.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2012.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N-1] A. Nowicki, *Liczby Wymierne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.1, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2008; Wydanie drugie 2012.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[OMm] Mała Olimpiada Matematyczna.

[Pa97] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata*, Tutor, Toruń, 1997.

[Pkh] Pham Kim Hung, *Secrets in Inequalities*, Vol. 1. *Basic Inequalities*, GIL Publishing House, Romania 2007.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition.

[Rias] S. Riasat, *Basics of Olympiad Inequalities*, Preprint, 2008.

[Siw] I. H. Siwaszinskij, *Nierówności w Zadaniach* (po rosyjsku), Nauka, Moskwa, 1967.

[Ssm] School Science and Mathematics Journal, School Science and Mathematics Association.

[Szn] L. B. Szneperman, *Zbiór Zadań z Algebry i Teorii Liczb* (po rosyjsku), Minsk, 1982.

[WyKM] W. A. Wyszenskij, I. W. Kartaszow, W. I. Michaiłowskij, M. I. Jadrenko, *Zbiór Zadań Kijowskich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), 1935-1983, Kijów, 1984.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.