

## Podróże po Imperium Liczb

### 06 Podzielność w Zbiorze Liczb Całkowitych

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

wersja poprawiona i uzupełniona

10 maja 2012

<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>1 Relacja podzielności</b>	<b>5</b>
1.1 Potęgi i podzielność . . . . .	5
1.2 Liczby postaci $n^n + (n+1)^{n+1}$ i podzielność . . . . .	9
1.3 Funkcje liniowe i podzielność . . . . .	10
1.4 Ciągi i podzielność . . . . .	11
1.5 Pewne cechy podzielności . . . . .	12
1.6 Reszty . . . . .	14
1.7 Pary liczb całkowitych . . . . .	16
1.8 Trójki liczb całkowitych . . . . .	22
1.9 Czwórki liczb całkowitych . . . . .	23
1.10 Największy nieparzysty dzielnik . . . . .	23
1.11 Różne fakty i zadania dotyczące podzielności liczb . . . . .	24
<b>2 Nwd i nww</b>	<b>27</b>
2.1 Podstawowe własności nwd i nww . . . . .	27
2.2 Następne własności nwd i nww . . . . .	30
2.3 Równości z nwd i nww . . . . .	34
2.4 Nierówności z nwd i nww . . . . .	36
2.5 Równania postaci $(x,y)=d$ i $[x,y]=w$ . . . . .	38
2.6 Równanie $[x,y] - (x,y) = m$ . . . . .	38
2.7 Różne równania z nwd i nww . . . . .	40
2.8 Algorytm Euklidesa . . . . .	40
2.9 Wyznaczniki z dzielnikami, nwd i nww . . . . .	41
2.10 Ciągi z nwd i nww . . . . .	42
2.11 Szeregi z nwd i nww . . . . .	43
2.12 Struktury algebraiczne z nwd i nww . . . . .	43
2.13 Różne fakty i zadania . . . . .	45

<b>3</b>	<b>Liczby względnie pierwsze</b>	<b>47</b>
3.1	Elementarne własności i przykłady . . . . .	47
3.2	Liczby względnie pierwsze oraz sumy, różnice i iloczyny . . . . .	48
3.3	Formy liniowe . . . . .	50
3.4	Liczby względnie pierwsze i ciągi arytmetyczne . . . . .	51
3.5	Nieskończone ciągi liczb parami względnie pierwszych . . . . .	51
3.6	Ciągi $a_1+n, \dots, a_s+n$ . . . . .	54
3.7	Istnienie lub nieistnienie pewnych liczb względnie pierwszych . . . . .	55
3.8	Liczba 24 . . . . .	56
3.9	Różne fakty i zadania o liczbach względnie pierwszych . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Kongruencje</b>	<b>59</b>
4.1	Własności i przykłady kongruencji . . . . .	59
4.2	Kongruencje liniowe . . . . .	60
4.3	Twierdzenie chińskie o resztach . . . . .	61
4.4	Układy kongruencji liniowych . . . . .	63
4.5	Bazowe systemy kongruencji . . . . .	64
4.6	Kongruencje w zbiorach z działaniami . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Podzielność i wielomiany</b>	<b>73</b>
5.1	Przykłady . . . . .	73
5.2	Funkcje wielomianowe i podzielność . . . . .	74
5.3	Pierwiastki wielomianów . . . . .	75
5.4	Istnienie pewnych wielomianów o danych wartościach . . . . .	76
5.5	Wartości wielomianów i podzielność . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Kongruencje wielomianowe</b>	<b>79</b>
6.1	Podstawowe pojęcia i fakty . . . . .	79
6.2	Kongruencje o module złożonym . . . . .	80
6.3	Kongruencje z potęgą liczby pierwszej w module . . . . .	81
6.4	Kongruencja $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$ . . . . .	83
6.5	Kongruencja $x^3 \equiv a \pmod{3^n}$ . . . . .	85
6.6	Kongruencja $x^5 \equiv a \pmod{5^n}$ . . . . .	86
6.7	Kongruencja $x^p \equiv a \pmod{p^n}$ . . . . .	86
6.8	Różne fakty dotyczące kongruencji . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Macierze o współczynnikach całkowitych</b>	<b>91</b>
7.1	Liczby $D_k(A)$ . . . . .	91
7.2	Równoważność macierzy o współczynnikach całkowitych . . . . .	93
7.3	Postać kanoniczna macierzy o współczynnikach całkowitych . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Liniowe równania diofantyczne</b>	<b>99</b>
8.1	Ogólne fakty o układach jednorodnych . . . . .	99
8.2	Ogólne fakty o układach niejednorodnych . . . . .	101
8.3	Równanie $ax + by = c$ . Rozwiązania całkowite . . . . .	103
8.4	Równanie $ax + by = c$ . Rozwiązania nieujemne . . . . .	104
8.5	Równanie $ax + by = c$ . Rozwiązania naturalne . . . . .	106

8.6	Równanie $ax + by + cz = d$ . Rozwiązania całkowite . . . . .	108
8.7	Równanie $ax + by + cz = d$ . Rozwiązania nieujemne . . . . .	110
8.8	Układy równań liniowych trzech zmiennych . . . . .	111
8.9	Równania liniowe $n$ zmiennych . . . . .	112
<b>9</b>	<b>Systemy numeracji</b>	<b>115</b>
9.1	System numeracji o danej podstawie . . . . .	115
9.2	Systemy numeracji i liczby z rosnącymi cyframi . . . . .	117
9.3	Systemy numeracji i liczby z malejącymi cyframi . . . . .	119
9.4	Systemy numeracji i liczby palindromiczne . . . . .	120
9.5	Uogólnione systemy pozycyjne . . . . .	121
9.6	Uogólnione systemy pozycyjne z jednoznacznością rozkładu . . . . .	124
<b>10</b>	<b>Sporadyczne ciągi arytmetyczne</b>	<b>127</b>
10.1	Pewne specjalne ciągi arytmetyczne . . . . .	127
10.2	Ciągi kolejnych liczb naturalnych długości mniejszej od 17 . . . . .	132
10.3	Twierdzenie Pillaia-Brauera . . . . .	133
10.4	Siedemnaście kolejnych liczb naturalnych . . . . .	134
10.5	Osiemnaście kolejnych liczb naturalnych . . . . .	136
10.6	Pierwszy dowód twierdzenia Pillaia-Brauera . . . . .	136
10.7	Standardowe i sporadyczne $(k,a)$ -systemy . . . . .	138
10.8	Drugi dowód twierdzenia Pillaia-Brauera . . . . .	142
10.9	Ciągi arytmetyczne i twierdzenie Evansa . . . . .	145
10.10	Oszacowania liczb $\gamma(a)$ i $\gamma_0(a)$ . . . . .	147
	<b>Spis cytowanej literatury</b>	<b>150</b>
	<b>Skorowidz nazwisk</b>	<b>156</b>
	<b>Skorowidz</b>	<b>159</b>

---

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń  
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

---

## Skorowidz

- Alexanderson G.L., 78  
Andrescu T., 63, 111, 150, 151  
Andrica D., 111, 150  
Appleby G., 126
- Bach E., 150  
Balcerzyk S., 150  
Banarski A.J., 104, 150  
Baranowa I.W., 150  
Barlow P., 107  
Bazmakov M.I., 150  
Bednarek W., 150  
Bekker B.M., 150  
Belov A., 151  
Bernik V.I., 150  
Bhargava M., 150  
Białas A., 150  
Bielecki A., 14  
Bobiński Z., 152  
Bouniakowsky V., 103  
Brauer A., 133, 134, 136  
Brewer J.W., 103  
Browkin J., 150  
Brown Jr. J.L., 126  
Brown K., 21, 150  
Bryński M., 150  
Buławko I.G., 25  
Buchsztab A.A., 60, 81, 150  
Bunce J.W., 103
- Caldwell Ch.K., 150  
Camion P., 103  
Caro Y., 134  
Catalan E., 104, 106  
Cauchy A., 108  
Cesaro E., 58, 106  
Chentzov N.N., 133, 154  
Choi S.L.G., 65  
Cucurezeanu I., 111, 150  
Czakyrjan K., 151
- Davenport H., 64, 65, 151  
Dence J.B., 85  
Dence T.P., 85  
Dickson L.E., 63, 64, 104, 108, 111, 113, 151  
Djukić D., 151  
Doduniekow S., 151  
Drobiński P., 21
- Edwards A.W.F., 53
- Erdős P., 37, 65–67  
Erickson M., 151  
Evans R.J., 133, 136, 146, 147, 151
- Fedorov R., 151  
Feng Z., 150  
Fibonacci, 63  
Filaseta M., 151  
Fleishman D., 133, 142, 151  
Fomin D.V., 151  
Fominych Yu.F., 25  
Fox M., 109, 111  
Frobenius G., 104  
Fu H-L., 147
- Galpieri G.A., 151  
Gein A., 25  
Gelca R., 63, 151  
Genkin S.A., 151  
Gillet J., 106  
Goffart N., 106  
Golchowoj W.M., 150  
Goodman A.W., 40  
Goodstein R.L., 11  
Gribanow W.U., 151  
Griffin H., 81, 113, 151  
Grigorjan A.A., 154  
Gutenmacher W.L., 155  
Guy R.K., 151
- Haas R., 53  
Haju L., 134  
Hanson D., 36  
Hensel K., 78, 81  
Hensley D., 40, 151  
Hilton P., 126  
Howard F.T., 63
- Itenberg I.W., 151
- Jagłom I.M., 126  
Jakóbczyk F., 14  
Janković V., 151  
Jarek P., 152  
Jegorow A.A., 89, 155  
Jeleński S., 126, 152  
Jones L., 67, 152  
Józefiak T., 150
- Kalinowska A., 113

- Kanel-Belov A.J., 151  
Kempner A.J., 126  
Kertzner S., 104, 111, 113  
Klosinski L.F., 78  
Koninck De J.-M., 33, 60, 152  
Konjagin S.W., 154  
Kordiemski B., 14, 152  
Kostykin A.I., 152  
Kovaldzhii A., 151  
Kudriatow G.A., 89  
Kudriewatow G.A., 152  
Kuo J., 147  
Kurlandczyk L., 152  
Kurschak J., 152
- Lamé G., 40  
Lambek J., 53  
Lapin C.E., 150  
Larson L.C., 78  
Lazebnik F., 103  
Lee H., 152  
Lehmer D.H., 40, 104  
Levit R.J., 108  
Levy L.S., 103  
Lord A., 53  
Lorkowska A., 63
- Mann H.B., 103  
Marzantowicz W., 152  
Matić I., 151  
Matsumura H., 152  
Mazur M., 89  
Melnikow O.W., 150  
Mercier A., 33, 60, 152  
Michalovic Sz.X., 46, 152  
Mollin R.A., 63, 153  
Mordell L.J., 80, 113, 153  
Moser K., 53  
Mozzochi C.J., 63  
Muczyńska M., 103  
Musztari D.Ch., 153
- Nagell T., 81, 83, 153  
Nagura J., 137, 138  
Narkiewicz W., 46, 81, 153  
Nodzyński P., 152  
Nowakowski R., 14  
Nowicki A., 153
- Ohtomo M., 147, 153  
Olszewski J., 86  
Ore O., 63
- Pawłowski H., 153, 154  
Pedersen J., 126  
Penfelley D., 40  
Petrović N., 151  
Pillai S., 133, 136, 154  
Polezzi M., 46  
Polya G., 78, 154  
Prószyński A., 63, 154
- Rabbot Z.M., 155  
Rabinowitz S., 9  
Rassicod L., 104  
Ribenboim P., 154  
Richman F., 40  
Riesel H., 66, 67  
Robinson R., 63  
Rosser B., 113  
Rozenzeller W.M., 14  
Rumney M., 11
- Sadowniczij W.A., 154  
Santos D.A., 154  
Saradha N., 134  
Sawin A., 25  
Schinzel A., 42, 65, 77, 154  
Schoentjes H., 106  
Selfridge J., 67  
Selucky K., 53  
Shallit J., 150  
Sharpe D., 154  
Shiu P., 104  
Shklarsky D.O., 154  
Sierpiński W., 53, 66, 67, 154  
Sigler L.E., 154  
Somos M., 53  
Stachowski E., 154  
Stawikowski L., 14  
Steinhaus H., 154  
Stolar W.G., 14  
Straszewicz S., 154, 155  
Subbarao M.V., 53  
Suprun W.P., 155  
Świątek A., 152  
Sylvester, 52  
Szego G., 154  
Szneperman L.B., 155
- Tamari F., 147, 153  
Tattersall J.J., 9, 14, 60, 80, 155  
Thangadurai R., 134  
Thue, 50  
Titow P.I., 151

Tołpygo A.K., 151  
Tomalczyk W., 154  
Toom A.L., 155  
Trigg Ch., 155  
Turk J., 78  
Turnau S., 104

Uscki M., 152

Vazzana A., 151  
Vleck van F.S., 103

Wagutien W.N., 40  
Wakulicz A., 104  
Wasilev N.B., 155  
Watson R., 63  
Weinstock R., 113  
Wilenskin H., 89  
Williams K.S., 89  
Winogradow I., 155  
Wojciechowski P., 46  
Wolstenholme J., 8  
Worobjow N.N., 155  
Wróblewski J., 40, 63

Yaglom I.M., 154  
Yashchenko I., 151  
Yih-Hing, 61

Zalewska A., 154  
Zang W.M., 40  
Zarzycki P., 152  
Zubielewicz G.I., 155  
Żuk I.K., 150

## Skorowidz

- algebra Boole'a, 43
- algebra ogólna, 68
- algorytm Euklidesa, 40, 95
  
- bazowy system kongruencji, 64–67
- bikwadrat liczby całkowitej, 59, 74, 86
  
- cecha podzielności, 12, 13
- ciąg, 11, 36, 42, 43, 51–54, 58, 81
  - $n^n$ , 8, 9
  - arytmetyczny, 12, 51, 66, 127–149
  - Fibonacciego, 40
  - liczb kwadratowych, 122
  - monotoniczny, 121, 122, 124, 125
  - ograniczony, 42, 77
  - okresowy, 24
  - rekurencyjny, 12, 24, 40, 51–53, 58, 77
  - rosnący, 121, 122, 124, 125
  - specjalny, 12, 124, 125, 127–133
  - sporadyczny, 127, 133, 134, 136, 138, 145
  - standardowy, 127, 132, 133, 138, 145
- ciało, 11, 70, 79
- covering, 64
- cyfry, 12, 13, 56, 115–120
- część całkowita, 2, 8, 13, 16, 45, 104–107, 111
- czwórka liczb całkowitych, 23, 36
  
- dzielnik, 5
- dzielnik normalny, 69
  
- forma liniowa, 50
- funkcja, 32
  - $\varphi$ , 2, 10, 41, 43, 46, 103
  - $\lambda_f$ , 79–81, 83
  - $\tau$ , 41, 42
  - bijekcja, 24, 44, 55
  - liniowa, 10
  - multiplikatywna, 81
  - różnowartościowa, 25
  - surjekcja, 25, 62
  - wielomianowa, 74
  
- gcd, 27
- granica ciągu, 16, 37, 105, 110, 112
- grupa, 45, 68, 69, 74
  - abelowa, 45, 69
  - Liego, 74
  - prosta, 69
  
- hipoteza Chentzova, 133
  
- homomorfizm pierścieni, 62
  
- ideał, 61, 69, 70
  - główny, 70
- ideały względnie pierwsze, 61
- iloczyn, 11, 14, 41, 42, 48, 50, 74
  - ideałów, 62, 71, 72
  - liczb pierwszych, 127–130, 146
- iloraz, 44, 45
- IMO, 1, 48, 53, 110
  - Longlist, 35, 55, 113
  - Shortlist, 7, 20, 57, 74, 75
- indukcja matematyczna, 11, 24, 31, 32, 51, 82
- izomorfizm pierścieni, 61, 62
  
- jądro homomorfizmu, 62
  
- kolejne liczby
  - całkowite, 24, 46, 50, 127–130, 132–139, 142–145
  - nieparzyste, 130, 132, 149
- kongruencja, 3, 7, 12, 14, 55, 59–61, 63, 64, 69–71, 75, 76, 79–89, 104
- kongruencje równoważne, 79
- konspiracyjny podzbiór, 58
- krata, 43
  
- lcm, 27
- lemat Hensela, 81
- liczba
  - $\pi$ , 16, 58
  - $a^b + b^a$ , 6, 7
  - $a^b + b^c + c^a$ , 7
  - $a^n - b^n$ , 9
  - $n^2 + 1$ , 14, 73
  - bezkwadratowa, 41, 42, 44, 45, 60, 65
  - Fibonacciego, 20, 40
  - jedynkowa  $e_n$ , 121
  - kwadratowa, 7, 14–16, 23–25, 35, 40, 48, 56, 60, 73, 75, 77, 81–87, 118–120, 122
  - magiczna, 49
  - Mersenne'a, 117
  - nieparzysta, 23, 24, 35, 42, 49, 73–75, 77, 128
  - palindromiczna, 120, 121
  - parzysta, 14, 24, 33, 48, 49, 77, 118
  - pierwsza, 6–9, 12, 14, 15, 24, 33, 35, 38, 41, 42, 49–51, 54–56, 58, 60, 75, 79–81, 83, 86–88, 103, 107, 113, 118–121
  - tetraedralna, 118
  - trójkątna, 118, 123

- wymierna, 99, 100  
 złożona, 49, 51, 66, 80  
 zespolona, 46
- liczby względnie pierwsze, 15, 20, 28, 30, 38, 47–55, 58, 61, 78, 80, 81, 86, 103, 106, 108, 110, 127–149
- logarytm, 40
- macierz, 41, 91–102  
 macierze równoważne, 93  
 Maple, 1, 5–7, 9, 18, 22, 23, 110, 115–121, 131  
 max, 33–35, 37, 112  
 min, 33, 34, 37, 91  
 minor macierzy, 91–93  
 moduły systemu kongruencji, 64
- nagroda, 65  
 największy nieparzysty dzielnik, 23, 24  
 nierówność, 21, 23, 24, 36, 37, 40, 45, 54, 55, 79, 80, 83, 137  
 nwd, 3, 21, 27–46, 58, 61–63, 77, 78, 97, 98, 100, 102, 112  
 nww, 3, 27, 29–46, 55
- Olimpiada Matematyczna  
 Australia, 20  
 Białoruś, 6  
 Brazylia, 58, 77  
 Chiny, 7  
 Czechosłowacja, 6, 8, 111  
 Czechy-Słowacja, 8, 13  
 Estonia, 8  
 Hiszpania, 10, 36  
 Indie, 12, 20, 21, 24, 74  
 Iran, 8  
 Irlandia, 133  
 Japonia, 49  
 Kanada, 37, 73  
 Leningrad, 75  
 Mołdawia, 7, 8, 13, 41  
 Moskwa, 11, 37, 111  
 Niemcy, 46  
 Norwegia, 74  
 Nowy Jork, 8  
 Polska, 21, 24, 52, 56, 74, 76, 78, 108  
 Rosja, 36, 40, 42, 53, 56, 74  
 Rumunia, 53, 77  
 Słowenia, 12, 58, 73  
 St Petersburg, 8, 12, 14, 35, 36, 39, 40, 45, 48, 74, 75  
 Szwecja, 24  
 Ukraina, 33
- USA, 24, 34, 50  
 Węgry, 24, 76  
 Wietnam, 8, 24  
 ZSRR, 45, 50
- ostatnie cyfry, 13  
 otwarty problem, 65, 67
- para liczb całkowitych, 6, 7, 14, 16, 17, 20, 21, 37–39, 46, 56, 62, 75, 77, 103, 107  
 para liczb pierwszych bliźniaczych, 56  
 permutacja, 14  
 pierścień, 61, 62, 68–70  
 $\mathbb{C}[x]$ , 46  
 $\mathbb{Q}[x]$ , 78  
 $\mathbb{R}[x, y]$ , 46  
 $\mathbb{Z}[x]$ , 51, 52, 56, 59, 75–80, 83  
 $\mathbb{Z}_m$ , 61  
 bez jedynek, 44  
 nieprzemienne, 62  
 przemienne, 44  
 szeregów formalnych, 105, 110
- pierwiastek wielomianu, 75–77, 79  
 pochodna, 59, 81  
 podgrupa, 45, 68  
 podzbiór zbioru, 44, 53  
 liczb całkowitych, 24  
 liczb naturalnych, 37
- podzielnik, 5  
 podzielność przez  
 3, 5, 9, 14, 24, 35, 56, 75, 85, 86, 118, 128, 132, 134, 135  
 4, 7, 12, 14, 74, 83  
 5, 6, 8, 9, 14, 24, 35, 63, 74, 77, 85, 86, 88, 128, 134, 135  
 6, 14, 42, 73  
 7, 5–10, 12, 13, 73, 79, 128  
 8, 56, 83, 84  
 9, 7–9, 59, 73, 85, 86, 88  
 11, 5, 6, 8, 12–14, 63, 73  
 13, 8, 12, 13, 73, 135  
 14, 15, 63  
 15, 60, 73  
 16, 84  
 17, 8, 10  
 18, 14, 76  
 19, 5, 8, 10, 11, 13  
 23, 6  
 24, 56, 58  
 25, 9, 14  
 27, 13, 74  
 28, 5  
 29, 5, 6, 13



- liczbę pierwszą, 9, 88, 137, 139
- potęgę liczby pierwszej, 9, 15
- postać kanoniczna macierzy, 95, 96
- potęga
  - dwójki, 6–8, 14–16, 23, 24, 36–38, 41, 42, 46, 50, 51, 53, 66, 73, 77, 83, 84, 115, 117, 126
  - jedenastki, 8
  - liczby pierwszej, 12, 15, 35, 38, 49, 81–83, 87, 88
  - piątki, 8, 14, 41, 86
  - siódemki, 6–8, 36
  - trójki, 6–8, 36, 41, 53, 83, 85, 86, 88, 117, 126
- prawdopodobieństwo, 58
- problem Frobeniusa, 104
- produkt pierścieni, 61, 62
- prymitywny pierwiastek, 24
- przedstawienie  $q$ -adyczne, 115
- przekrój ideałów, 62, 71, 72
- pytanie, 9, 35, 45, 65, 67, 78, 103, 107, 130–132
- relacja
  - pełna, 69–71
  - podzielności, 3, 5
  - równości, 69, 70
  - typu równoważności, 3, 59, 68
- reszta z dzielenia, 12, 14, 15, 22, 23, 51, 54, 55, 61, 63, 76, 80, 104, 130, 140
- równanie, 38, 40
  - diofantyczne, 76, 99–103, 106–109, 111–113
  - Pella, 20
- rozkład
  - kanoniczny, 2, 57, 61
  - względem ciągu, 3, 121–126
    - główny, 121, 122
- różnica, 13, 25, 44, 48, 49
- rozwiązanie, 11, 23, 39
  - całkowite, 99–103, 108, 109, 111–113
  - kongruencji, 60, 63, 64, 79–81, 83–88
  - naturalne, 20, 39, 106–108, 111
  - nieujemne, 104–106, 110
- rozwinięcie Laplace'a, 91
- silnia, 8, 37, 38, 41, 45, 48, 49, 56, 59, 78, 125
- squarefree, 44
- stopień kongruencji, 79, 80
- suma, 22, 24, 25, 49
  - cyfr, 12, 13
  - ideałów, 61, 71, 72
  - reszt, 14
- symbol Newtona, 35, 78, 87, 88
- symetryczna różnica, 44
- system
  - $(k, a)$ , 138, 140, 141
    - sporadyczny, 141, 142, 145, 146, 148
    - standardowy, 141
  - kongruencji, 64
  - numeracji, 13, 14
    - dowolny, 115, 117–120, 125
    - dwójkowy, 67
    - dziesiętny, 115, 120, 125
    - piątkowy, 115
    - szesnastkowy, 116
    - uogólniony, 122, 126
  - stowarzyszony z ciągiem, 138
- sześciąt liczby całkowitej, 14, 15, 48, 52, 73, 74, 77, 81–83, 85, 86, 88, 89, 118, 119, 121, 123
- szereg, 43, 105, 106, 110
- trójka liczb całkowitych, 7, 11, 22, 23, 40, 63, 106, 109, 111, 112
- trójmian kwadratowy, 52, 73, 75–77, 80, 83, 111
- twierdzenie
  - chińskie o resztach, 55, 61–63, 66, 80, 134–137, 141, 145, 146
  - Czebyszewa, 136
  - Eulera, 10, 103
  - Evansa, 146, 147
  - małe Fermata, 5, 79, 86–88
  - Pillaia, 133, 134
  - Pillaia-Brauera, 133, 136, 142, 144, 146, 147
  - Sierpińskiego, 66
  - Wilsona, 14
- układ
  - Cramera, 11
  - kongruencji, 61, 63, 64, 135–137, 141, 145
  - równań liniowych, 11, 99–102, 111–113
- warunki równoważne, 8, 10, 13, 15, 33, 35, 37, 38, 46, 49, 54, 55, 59–61, 70, 84–87, 97, 99–102, 112, 124, 125
- wielokrotność, 5
- wielomian, 8, 17, 46, 52, 59, 73–81, 83
  - moniczny, 17
  - symetryczny, 17
- wyznacznik, 11, 41, 91, 98, 100
- zbiór
  - $\mathbb{N}_0$ , 1
  - $\mathbb{N}_k$ , 138–141, 143
  - $\mathbb{P}$ , 1
  - $\mathbb{P}_a(k)$ , 138–141, 144, 145
  - dzielników, 45

konspiracyjny, 58  
liczb całkowitych, 1, 68, 70  
liczb naturalnych, 1, 44, 45  
liczb pierwszych, 1, 16, 38, 44, 79, 83, 86–88  
liczb rzeczywistych, 1, 46, 48  
liczb wymiernych, 1, 70, 78, 80, 97, 99, 100  
liczb zespolonych, 1, 46  
skończony, 44