# Podróże po Imperium Liczb

## Część 06. Podzielność w Zbiorze Liczb Całkowitych

### Rozdział 10

---

## 10. Sporadyczne ciągi arytmetyczne

---

**Andrzej Nowicki 10 maja 2012,** `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

## Spis treści



Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX.
Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały można znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

# 10 Sporadyczne ciągi arytmetyczne

Rozpatrzmy ciąg $\{50, 51, 52, \ldots, 59\}$, dziesięciu kolejnych liczb naturalnych od 50 do 59. W tym ciągu występuje liczba 53. Jest ona względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb tego ciągu. To nie jest przypadek. Można udowodnić, że w dowolnym ciągu 10 kolejnych liczb naturalnych zawsze istnieje taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb. W tym rozdziale udowodnimy to twierdzenie oraz podamy znane jego uogólnienia. Przedstawimy również pewne problemy związane z liczbami względnie pierwszymi i kolejnymi wyrazami ciągów arytmetycznych.

Niech $k \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną i niech $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{k-1})$ będzie $k$-elementowym ciągiem, którego wszystkie wyrazy $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ są liczbami naturalnymi. W tym rozdziale mówić będziemy, że ciąg $Y$ jest *standardowy*, jeśli wśród jego wyrazów istnieje taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb występujących w tym ciągu. Jeśli taki ciąg $Y$ nie jest standardowy, to mówić będziemy, że $Y$ jest ciągiem *sporadycznym*.

Interesować się będziemy głównie takimi ciągami $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{k-1})$, których wyrazy $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ są kolejnymi liczbami naturalnymi lub ogólniej, są kolejnymi wyrazami ustalonego postępu arytmetycznego. Przez $A_k(n)$ oznaczać będziemy $k$-elementowy ciąg kolejnych liczb naturalnych od $n$ do $n + k - 1$, tzn.

$$A_k(n) = \Big(n + 0,\ n + 1,\ \ldots,\ n + (k-1)\Big).$$

Wspomniane na początku twierdzenie o ciągu 10 kolejnych liczb naturalnych można teraz wysłowić w następujący sposób. *Każdy ciąg postaci $A_{10}(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest standardowy.* Pewne skończone ciągi liczb naturalnych nazywać będziemy (z braku innej terminologii) *ciągami specjalnymi*. Z definicji takich ciągów łatwo będzie wynikać,że każdy ciąg specjalny jest ciągiem standardowym. Wyjaśnimy to dokładniej w pierwszym podrozdziale tego rozdziału.

## 10.1 Pewne specjalne ciągi arytmetyczne

Dla danej liczby naturalnej $k \geqslant 3$ przez $q(k)$ oznaczać będziemy iloczyn wszystkich liczb pierwszych mniejszych od $k$. Przykłady:

$$\begin{array}{ll}
q(3) = 2, & q(8) = q(9) = q(10) = q(11) = 210, \\
q(4) = q(5) = 6, & q(12) = q(13) = 2\,310, \\
q(6) = q(7) = 30, & q(14) = q(15) = q(16) = q(17) = 30\,030.
\end{array}$$

Przypomnijmy, że przez $A_k(n)$ oznaczamy $k$-elementowy ciąg kolejnych liczb naturalnych od $n$ do $n + k - 1$. Przypomnijmy również, że jeśli wśród wyrazów ciągu $A_k(n)$ istnieje taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb tego ciągu, to mówimy, że $A_k(n)$ jest ciągiem standardowym. Mówić będziemy, że ciąg $A_k(n)$ jest *specjalny*, jeśli wśród jego wyrazów istnieje taka liczba, która jest względnie pierwsza z liczbą $q(k)$.

**10.1.1.** *Niech $k \geqslant 3$ i niech $A_k(n) = (n, n+1, \dots, n+k-1)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $A_k(n)$ jest ciągiem specjalnym, to jest ciągiem standardowym. Dokładniej, jeśli w ciągu $k$ kolejnych liczb naturalnych występuje liczba względnie pierwsza z liczbą $q(k)$, to liczba ta jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb tego ciągu.*

**D.** Niech $n+i$, gdzie $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, będzie liczbą względnie pierwszą z $q = q(k)$. Niech $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $j \neq i$. Przypuśćmy, że $\mathrm{nwd}(n+i, n+j) \geqslant 2$. Istnieje wtedy liczba pierwsza $p$ taka, że $p \mid n+i$ oraz $p \mid n+j$. Wtedy $p \mid |i-j|$. Ale $|i-j| < k$, więc $p < k$ i stąd $p \mid q$ (ponieważ $q$ jest iloczynem wszystkich liczb pierwszych mniejszych od $k$). Zatem $p \mid q$ oraz $p \mid n+i$ wbrew temu, że $\mathrm{nwd}(n+i, q) = 1$. ⊠

---

Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych zawsze istnieje co najmniej jedna liczba nieparzysta; istnieje więc liczba, która jest względnie pierwsza z liczbą $2 = q(3)$. Dowolny zatem ciąg postaci $A_3(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest specjalny.

Wśród czerech kolejnych liczb naturalnych zawsze istnieją dwie kolejne liczby nieparzyste. Co najmniej jedna z tych liczb nieparzystych nie jest podzielna przez 3; jest więc względnie pierwsza z liczbą $6 = q(4)$. Dowolny zatem ciąg postaci $A_4(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest specjalny.

Ponieważ $q(5) = q(4) = 6$, więc ten sam argument możemy zastosować dla pięciu kolejnych liczb naturalnych. Każdy więc ciąg $A_5(n)$ jest również specjalny.

**10.1.2.** *W każdym ciągu składającym się z sześciu (lub siedmiu) kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba względnie pierwsza z* 30.

**D.** W każdym takim ciągu istnieje para liczb postaci $(6m-1, 6m+1)$, gdzie $m$ jest pewną liczbą naturalną. Te dwie liczby są względnie pierwsze z liczbą 6. Co najmniej jedna z nich nie jest oczywiście podzielna przez 5 i ta właśnie liczba jest względnie pierwsza z liczbą 30. ⊠

Przypomnijmy, że $30 = q(6) = q(7)$. Z powyższego stwierdzenia wynika więc, że każdy ciąg postaci $A_6(n)$ lub $A_7(n)$ (gdzie $n$ jest dowolną liczbą naturalną) jest specjalny.

Jeśli więc $3 \leqslant k \leqslant 7$, to wszystkie ciągi składające się z $k$ kolejnych liczb naturalnych są specjalne. Dla $k = 8$ oraz $k = 9$ już czegoś takiego nie udowodnimy. Przypomnijmy, że $q(8) = q(9) = 210$. W ciągu $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ mamy 8 kolejnych liczb naturalnych i nie ma w tym ciągu liczby względnie pierwszej z 210. Natomiast w ciągu $(2, 3, \dots, 9, 10)$ mamy 9 kolejnych liczb naturalnych i również nie ma tu liczby względnie pierwszej z 210. Istnieją więc skończone ciągi kolejnych liczb naturalnych, które nie są specjalne.

**10.1.3.** *Wśród* 10 *kolejnych liczb naturalnych istnieje zawsze taka, która jest względnie pierwsza z liczbą* 210.

**D.** ([Mock] 3/2000). Załóżmy, że mamy 10 kolejnych liczb naturalnych. Różnica pomiędzy dwiema takimi liczbami (od większej odejmujemy mniejszą) może być co najwyżej równa 9; ta różnica może więc być tówna 1 lub może być podzielna przez liczby pierwsze $2, 3, 5, 7$. Wśród 10 kolejnych liczb naturalnych istnieją co najmniej trzy takie liczby, które są postaci $6k \pm 1$. Rozpatrzmy takie trzy liczby tej postaci. Żadna z niech nie jest podzielna przez 2 i nie jest podzielna przez 3. Wśród tych trzech liczb co najwyżej jedna dzieli się przez 5 oraz co najwyżej jedna dzieli się przez 7. Wśród tych trzech liczb istnieje więc taka, która nie dzieli się przez 5 oraz nie dzieli się przez 7. Ta właśnie liczba jest względnie pierwsza z liczbą 210. ⊠

Dokładnie taki sam dowód można przepisać dla 11 kolejnych liczb naturalnych. Ponieważ $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = q(10) = q(11)$, więc wszystkie ciągi postaci $A_{10}(n)$ lub $A_{11}(n)$ są specjalne.

---

Zbadaliśmy ciągi $k$ kolejnych liczb naturalnych dla $3 \leqslant k \leqslant 11$. Jeśli $k = 8$ lub $k = 9$, to istnieją tego typu ciągi, które nie są specjalne. W pozostałych przypadkach wszystkie takie ciągi są specjalne.

Czy istnieje takie $k \geqslant 12$, że każdy ciąg postaci $A_k(n)$ (dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$) jest specjalny? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Żadnego takiego $k$ nie znajdziemy. Poniżej przedstawiamy odpowiednie przykłady dla $12 \leqslant k \leqslant 16$.

**10.1.4.** *Przykłady takich ciągów postaci $A_k(n)$, które nie są specjalne:*

$$\begin{aligned}&A_{12}(114),\ A_{12}(115),\ A_{12}(2184),\ A_{12}(2185);\\ &A_{13}(114),\ A_{13}(2184);\\ &A_{14}(2),\ A_{14}(2184);\\ &A_{15}(2),\ A_{15}(2184);\\ &A_{16}(2184),\ A_{16}(5750).\end{aligned}$$

To, że tego rodzaju przykłady istnieją również dla wszystkich liczb $k$ większych od 16, wynika ze stwierdzenia 10.1.1 oraz twierdzenia 10.3.1, którym zajmować się będziemy w dalszych podrozdziałach.

---

Badaliśmy skończone ciągi kolejnych liczb naturalnych. Teraz interesować nas będą skończone ciągi arytmetyczne.

Niech $a$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Dla danej liczby naturalnej $k \geqslant 3$ przez $q_a(k)$ oznaczać będziemy iloczyn wszystkich liczb pierwszych mniejszych od $k$ i względnie pierwszych z liczbą $a$. Jest jasne, że jeśli $a = 1$, to $q_a(k)$ jest rozpatrywaną wcześniej liczbą $q(k)$. Przykłady dla $a = 2$ :

$$\begin{array}{ll} q_2(3) = 1, & q_2(8) = q_2(9) = q_2(10) = q_2(11) = 105,\\ q_2(4) = q_2(5) = 3, & q_2(12) = q_2(13) = 1\,155,\\ q_2(6) = q_2(7) = 15, & q_2(14) = q_2(15) = q_2(16) = q_2(17) = 15\,015.\end{array}$$

Załóżmy, że $a, b$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi oraz załóżmy, że $(x_n)$ jest ciągiem arytmetycznym takim, że $x_n = an + b$, dla $n = 1, 2, \cdots$. Niech $k \geqslant 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $Y = \Big(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\Big)$ będzie $k$-elementowym ciągiem składającym się z kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$, tzn.

$$y_0 = x_{m+0}, \quad y_1 = x_{m+1}, \quad \dots, \quad y_{k-1} = x_{m+k-1},$$

gdzie $m$ jest pewną liczbą naturalną. Mówić będziemy, że ciąg $Y$ jest *specjalny*, jeśli wśród jego wyrazów istnieje taka liczba, która jest względnie pierwsza z liczbą $q_a(k)$.

Poniższe stwierdzenie jest uogólnieniem stwierdzenia 10.1.1.

**10.1.5.** *Przy powyższych oznaczeniach, jeśli $Y$ jest ciągiem specjalnym, to jest ciągiem standardowym. Dokładniej, jeśli w ciągu $Y$ występuje liczba względnie pierwsza z liczbą $q_a(k)$, to liczba ta jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb tego ciągu.*

**D.** Niech $x_i = a(m+i)+b$, gdzie $i \in \{0,1,\dots,k-1\}$, będzie liczbą względnie pierwszą z $q = q_a(k)$. Niech $j \in \{0,1,\dots,k-1\}$, $j \neq i$. Przypuśćmy, że $\mathrm{nwd}(x_i, x_j) \geqslant 2$. Istnieje wtedy liczba pierwsza $p$ taka, że $p \mid x_i$ oraz $p \mid x_j$. Wtedy $p \mid x_i - x_j = a(i-j)$. Jeśli $p \mid a$, to $p \mid b$ (gdyż $p$ dzieli $x_i = a(m+i)+b$) i wtedy mamy sprzeczność z tym, że $\mathrm{nwd}(a,b) = 1$. Zatem $p \nmid a$, a zatem $p \mid |i-j|$. Ale $|i-j| < k$, więc $p < k$. Liczba pierwsza $p$ jest więc mniejsza od $k$ i względnie pierwsza z liczbą $a$. To implikuje, że $p \mid q$ (ponieważ $q$ jest iloczynem wszystkich liczb pierwszych mniejszych od $k$ i względnie pierwszych z $a$). Zatem $p \mid q$ oraz $p \mid x_i$ wbrew temu, że $\mathrm{nwd}(x_i, q) = 1$. ⊠

---

Rozpatrzmy ciągi liczb nieparzystych.

**10.1.6.** *Wśród* 6 *kolejnych liczb nieparzystych istnieje zawsze taka liczba, która jest względnie pierwsza z liczbą* 15.

**D.** Niech $m$ będzie dowolną liczbą całkowitą i niech

$$y_0 = 2m+1,\ y_1 = 2m+3,\ y_2 = 2m+5,\ y_3 = 2m+7,\ y_4 = 2m+9,\ y_5 = 2m+11.$$

Należy wykazać, że wśród liczb $y_0, y_1, \dots, y_5$ istnieje taka, która jest względnie pierwsza z 15. Niech $r$ będzie resztą z dzielenia liczby $m$ przez 15. Wtedy $m = 15u + r$, gdzie $u$ jest pewną liczbą całkowitą oraz $r$ należy do zbioru $\{0,1,\dots,14\}$. Jeśli $r = 0$, to $y_0 = 30u+1$ jest liczbą względnie pierwszą z 15. Jeśli $r = 1$, to $y_2 = 30u+7$ jest liczbą względnie pierwszą z 15. Kontynuujemy to postępowanie dla wszystkich $r$, aż do $r = 14$. Poniższe tabelki przedstawiają otrzymane wyniki:

| $r$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $y_0 = 30u+1$ |
| 1 | $y_2 = 30u+7$ |
| 2 | $y_1 = 30u+7$ |
| 3 | $y_2 = 30u+11$ |
| 4 | $y_1 = 30u+11$ |

,

| $r$ | $y$ |
|---|---|
| 5 | $y_0 = 30u+11$ |
| 6 | $y_0 = 30u+13$ |
| 7 | $y_1 = 30u+17$ |
| 8 | $y_0 = 30u+17$ |
| 9 | $y_0 = 30u+19$ |

,

| $r$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | $y_1 = 30u+23$ |
| 11 | $y_0 = 30u+23$ |
| 12 | $y_2 = 30u+29$ |
| 13 | $y_1 = 30u+29$ |
| 14 | $y_0 = 30u+29$ |

.

Dla każdego $r$ istnieje więc odpowiednia taka liczba $y_i$, która jest względnie pierwsza z 15. ⊠

Ponieważ $15 = q_2(6)$, więc z powyższego przykładu wynika, że każdy ciąg 6 kolejnych liczb nieparzystych jest ciągiem specjalnym. W podobny sposób wykazujemy to samo dla ośmiu kolejnych liczb nieparzystych.

**10.1.7.** *Wśród* 8 *kolejnych liczb nieparzystych istnieje zawsze taka liczba, która jest względnie pierwsza z liczbą* 105.

Metodą przedstawioną w dowodzie przykładu 10.1.6, można za pomocą komputera szybko sprawdzić, że:

**10.1.8.** *Jeśli* $k \leqslant 31$*, to każdy ciąg* $k$ *kolejnych liczb nieparzystych jest specjalny.*

Czy są jeszcze inne liczby $k$ (większe od 31), dla których zachodzi powyższe stwierdzenie? Nie wiem. Wiadomo, że dla $k = 172$ istnieje taki ciąg składający się z $k$ kolejnych liczb nieparzystych, który nie jest specjalny. Wynika, to ze stwierdzenia 10.1.5 oraz przykładu 10.10.6 (z ostatniego podrozdziału).

**10.1.9.** *Niech* $x_n = 4n+1$ *oraz* $u_n = 4n+3$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Przy ustalonym* $k \geqslant 3$, *następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Każdy ciąg* $k$ *kolejnych wyrazów ciągu* $(x_n)$ *jest specjalny.*

(2) *Każdy ciąg* $k$ *kolejnych wyrazów ciągu* $(u_n)$ *jest specjalny.*

---

Załóżmy teraz, że $a = 3$. Łatwo można udowodnić:

**10.1.10.** *Niech* $x_n = 3n+1$ *oraz* $u_n = 3n+2$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Przy ustalonym* $k \geqslant 3$, *następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Każdy ciąg* $k$ *kolejnych wyrazów ciągu* $(x_n)$ *jest specjalny.*

(2) *Każdy ciąg* $k$ *kolejnych wyrazów ciągu* $(u_n)$ *jest specjalny.*

**10.1.11.** *Niech* $x_n = 3n+1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wśród* $8$ *kolejnych wyrazów ciągu* $(x_n)$ *istnieje zawsze liczba względnie pierwsza z* $70$. *Wśród* $12$ *kolejnych wyrazów ciągu* $(x_n)$ *istnieje zawsze liczba względnie pierwsza z* $770$. *To samo zachodzi dla ciągu* $x_n = 3n+2$.

Za pomocą komputera otrzymujemy:

**10.1.12.** *Niech* $x_n = 3n+1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Jeśli* $k \leqslant 31$, *to każdy ciąg utworzony z* $k$ *kolejnych wyrazów ciągu* $(x_n)$ *jest specjalny. To samo zachodzi dla ciągu* $x_n = 3n+2$.

Tutaj również nie wiem co się dzieje gdy $k$ jest liczbą większą od 31. Wiadomo, że dla $k = 103$ istnieje taki ciąg rozważanej postaci, który nie jest specjalny. Wynika, to ze stwierdzenia 10.1.5 oraz przykładu 10.10.5 (z ostatniego podrozdziału).

---

**10.1.13.** *Niech* $x_n = 5n+1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

(1) *Jeśli* $k \leqslant 19$ *lub* $k = 22$ *lub* $k = 23$, *to każdy ciąg utworzony z* $k$ *kolejnych wyrazów ciągu* $(x_n)$ *jest specjalny.*

(2) *Istnieje ciąg* $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+19})$ *(utworzony z* $20$ *kolejnych wyrazów), który nie jest specjalny. Najmniejsze* $m$ *o tej własności jest równe* $79\,521$. *Przy tym samym* $m$ *ciąg* $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+20})$ *również nie jest specjalny.*

(3) *Istnieją przykłady ciągów niespecjalnych dla* $k = 24$ *oraz* $k = 25$. (Maple).

**10.1.14.** *Niech* $x_n = 7n+1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

(1) *Jeśli* $k \leqslant 19$ *lub* $k = 22$ *lub* $k = 23$, *to każdy ciąg utworzony z* $k$ *kolejnych wyrazów ciągu* $(x_n)$ *jest specjalny.*

(2) *Istnieje ciąg* $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+19})$ *(utworzony z* $20$ *kolejnych wyrazów), który nie jest specjalny. Najmniejsze* $m$ *o tej własności jest równe* $205\,837$. *Przy tym samym* $m$ *ciąg* $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+20})$ *również nie jest specjalny.*

(3) *Istnieją przykłady ciągów niespecjalnych dla* $k = 24$ *oraz* $k = 25$. (Maple).

**10.1.15.** *Jeśli* $x_n = 11n+1$, *to* $(x_9, x_{10}, \dots, x_{16})$ *nie jest ciągiem specjalnym.*

---

Nie znam odpowiedzi na poniższe pytanie.

**10.1.16.** *Niech $a \geqslant 5$ ,$k \geqslant 3$ będą liczbami naturalnymi. Niech $x_n = an+1$ oraz $u_n = an+b$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $b$ jest taką ustaloną liczbą naturalną, że $b < a$ oraz* $\mathrm{nwd}(a,b) = 1$. *Czy prawdą jest, że następujące dwa warunki są równoważne?*

(1) *Każdy ciąg $k$ kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$ jest specjalny.*

(2) *Każdy ciąg $k$ kolejnych wyrazów ciągu $(z_n)$ jest specjalny.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

## 10.2 Ciągi kolejnych liczb naturalnych długości mniejszej od 17

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy, że przez $A_k(n)$ oznaczamy $k$-elementowy ciąg kolejnych liczb naturalnych od $n$ do $n+k-1$. Przypomnijmy również, że jeśli wśród wyrazów ciągu $A_k(n)$ istnieje taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb tego ciągu, to mówimy, że $A_k(n)$ jest ciągiem standardowym.

---

Dwie kolejne liczby naturalne są zawsze względnie pierwsze. Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych zawsze liczba środkowa jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb. Wśród czerech kolejnych liczb naturalnych $a$, $a+1$, $a+2$ oraz $a+3$, zawsze istnieje taka, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb. Jeśli bowiem $a$ jest nieparzyste, to $a+2$ ma tę własność. Jeśli natomiast $a$ jest parzyste, to taką liczbą jest $a+1$.

Rozpatrzmy pięć kolejnych liczb naturalnych. Mamy na przykład liczby:

$$24, \ 25, \ 26, \ 27, \ 28.$$

Żadna z nich nie jest liczbą pierwszą. Jest tu jednak taka liczba, mianowicie 25, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.

**10.2.1.** *Wśród pięciu kolejnych liczb naturalnych zawsze istnieje taka, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.*

**D.** Załóżmy, że $a$, $a+1$, $a+2$, $a+3$ oraz $a+4$ są kolejnymi liczbami naturalnymi. Jeśli $a$ jest liczbą nieparzystą, to środkowa liczba $a+2$ jest również nieparzysta i jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb. Wykorzystujemy tu fakty, że dwie kolejne liczby naturalne są względnie pierwsze i dwie kolejne liczby nieparzyste są względnie pierwsze.

Niech teraz $a$ będzie liczbą parzystą. Mamy wtedy dwie liczby nieparzyste $a+1$ oraz $a+3$. Liczba $a+1$ jest względnie pierwsza z $a$, $a+2$ i $a+3$. Jedynie może nie być względnie pierwsza z $a+4$. Jeśli $\mathrm{nwd}(a+1, a+4) = d > 1$, to $d \mid 3 = (a+4)-(a+1)$, a więc wtedy $3 \mid a+1$. Liczba $a+3$ jest względnie pierwsza z liczbami $a+1$, $a+2$ oraz $a+4$. Jeśli $\mathrm{nwd}(a+3, a) = d > 1$, to $d \mid 3 = (a+3)-a$ i stąd $3 \mid a+3$. Z tego wynika, że jeśli żadna z liczb $a+1$ oraz $a+3$ nie spełnia tezy, to liczby te są jednocześnie podzielne przez 3. Ale wtedy $3 \mid 2 = (a+3)-(a+1)$ i mamy sprzeczność. Jeśli więc $a$ jest parzyste, to jedna z liczb $a+1$ lub $a+3$ jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb. ⊠

---

Wykazaliśmy, że jeśli $3 \leqslant k \leqslant 5$, to każdy ciąg postaci $A_k(n)$ jest standardowy. Zauważmy, że w tym przypadku każdy taki ciąg jest specjalny (w sensie definicji z poprzedniego podrozdziału). Standardowość więc takich ciągów wynika również ze stwierdzenia 10.1.1. Podobnie jest z ciągami sześciu i siedmiu kolejnych liczb naturalnych. Ze stwierdzeń 10.1.2 i 10.1.1 otrzymujemy:

**10.2.2.** *W dowolnym ciągu składającym się z sześciu (lub siedmiu) kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, która jest względnie pierwsza z każą z pozostałych liczb.*

Z poprzedniego podrozdziału wiemy, że gdy $k = 8$ lub $k = 9$, to istnieją takie ciągi postaci $A_k(n)$, które nie są specjalne. Łatwo jednak można udowodnić następujące stwierdzenie.

**10.2.3.** *W każdym ciągu ośmiu (lub dziewięciu) kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.*

Wszystkie więc ciągi postaci $A_8(n)$ lub $A_9(n)$ są standardowe. Następne dwa stwierdzenia są natychmiastowymi wnioskami ze stwierdzenia 10.1.3 i jego oczywistego rozszerzenia dla jedenastu liczb.

**10.2.4.** *Wśród* 10 *kolejnych liczb naturalnych istnieje zawsze taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.* ([Putn] 1966, [OM] Irlandia 2000).

**10.2.5.** *Wśród* 11 *kolejnych liczb naturalnych istnieje zawsze taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.*

Już wiemy, że jeśli $k \leqslant 11$, to każdy ciąg postaci $A_k(n)$ (dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$) jest standardowy. Tego typu stwierdzenia można udowodnić dla wszystkich $k$ mniejszych od 17.

**10.2.6** (S. Pillai 1940)**.** *Jeśli $k$ jest liczbą naturalną taką, że $2 \leqslant k \leqslant 16$, to w dowolnym ciągu $k$ kolejnych liczb naturalnych istnieje taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.* ([Pill], [ShCY] 19, 154-156).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

## 10.3 Twierdzenie Pillaia-Brauera

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Poprzedni podrozdział zakończyliśmy twierdzeniem Pillaia mówiącym o tym, że dla $k \leqslant 16$ każdy ciąg postaci $A_k(n)$ jest standardowy. S. Pillai w pracy [Pill] z 1940 roku udowodnił również, że $A_{17}(n)$ nie musi być ciągiem standardowym. Przypomnijmy (o czym napisaliśmy we wstępie do tego rozdziału), że każdy taki ciąg postaci $A_k(n)$, który nie jest standardowy, nazywamy ciągiem *sporadycznym.* Ciąg $k$ kolejnych liczb naturalnych jest więc ciągiem sporadycznym, jeśli nie istnieje w nim żadna taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb; innymi słowy, jeśli dla każdego jego wyrazu $a$ istnieje wyraz $b$ taki, że $b \neq a$ oraz $\text{nwd}(a, b) \geqslant 2$. Można udowodnić następujące twierdzenie.

**10.3.1** (S. Pillai, A. Brauer 1941)**.** *Dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 17$ istnieje taka liczba naturalna $n$, że $A_k(n)$ jest ciągiem sporadycznym.*

Pillai we wspomnianej pracy [Pill] udowodnił to twierdzenie dla $17 \leqslant k \leqslant 299$. Natomiast A. Brauer przedstawił w 1941 roku dowód dla wszystkich $k \geqslant 300$. Dzisiaj znamy kilka różnych dowodów tego twierdzenia. Elegancki i krótki dowód podał, w 1969 roku, Ronald J. Evans w pracy [Evn1]. Również elegancki dowód podał, w 1997 roku, D. Fleishman w artykule [Flei]. Dowody te przedstawimy w następnych podrozdziałach. Fleishman powyższe twierdzenie Pillaia-Brauera nazywa *hipotezą Chentzova*[1]. Istnieją również prace z innymi dowodami

[1] N. N. Chentzov (1930 – 1992); matematyk radziecki.

oraz uogólnieniami twierdzenia Pillaia-Brauera. We wszystkich znanych dowodach korzysta się głównie z twierdzenia chińskiego o resztach oraz z pewnych twierdzeń o rozmieszczeniu liczb pierwszych.

---

★ A. Brauer, *On a property of k consecutive integers*, [Bams] 47(1941) 328-331.
Y. Caro, *On a division property of consecutive integers*, [IsrJ] 33(1)(1979) 32-36.
L. Hajdu, N. Saradha, *On a problem of Pillai and its generalizations*, preprint 2012, 1-24.
N. Saradha, R. Thangadurai, *Pillai's problem on consecutive integers*, Proceedings of the Conference on Number Theory and Cryptography at HRI, Allahabad, 2007, 176-188.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

## 10.4 Siedemnaście kolejnych liczb naturalnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Liczba naturalna $k$, występująca w twierdzeniu Pillaia 10.2.6, musi być mniejsza od 17. To założenie jest tutaj istotne. Dla 17 kolejnych liczb naturalnych już czegoś takiego nie udowodnimy. Istnieje taka liczba naturalna $n$, że $A_{17}(n)$ jest ciągiem sporadycznym.

**10.4.1.** *Jeśli* $n = 2184$*, to wśród* 17 *kolejnych liczb*

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad \dots, \quad n+16,$$

*nie ma żadnej takiej liczby, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.* ([Flei]).

**D.** Niech $Y = A_{17}(n)$, gdzie $n = 2184$. Mówić będziemy w tym dowodzie, że liczba, występująca w ciągu $Y$, jest *dobra*, jeśli nie jest względnie pierwsza z co najmniej jedną z pozostałych liczb tego ciągu. Udowodnimy, że każda liczba z ciągu $Y$ jest dobra. W tym celu zauważmy, że

$$n = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13, \quad n \equiv 4 \pmod 5, \quad n \equiv 6 \pmod{11}.$$

Wszystkie liczby parzyste są oczywiście dobre. Pozostały do zbadania liczby nieparzyste:

$$n+1, \quad n+3, \quad n+5, \quad n+7, \quad n+9, \quad n+11, \quad n+13, \quad n+15.$$

Liczby $n+3$, $n+9$ oraz $n+15$ są dobre, gdyż są podzielne przez 3. Ponieważ $\mathrm{nwd}(n+7, n) = 7$, więc liczba $n+7$ jest dobra. Podobnie jest z liczbą $n+13$. Pozostały do zbadania trzy liczby:

$$n+1, \quad n+5, \quad n+11.$$

Ponieważ $n \equiv 4 \pmod 5$, więc liczby $n+1$ oraz $n+11$ są podzielne przez 5; są więc dobre. Została jedna liczba $n+5$. Ale ta jest również dobra, gdyż z kongruencji $n \equiv 6 \pmod{11}$ wynika, że liczby $n+5$ oraz $n+16$ są podzielne przez 11. W ten sposób wykazaliśmy, że każda liczba występująca w ciągu $Y$ jest dobra. ⊠

Można sprawdzić (na przykład za pomocą komputera), że 2184 jest najmniejszą liczbą naturalną mającą rozważaną własność. Innymi słowy:

**10.4.2.** *Jeśli* $n$ *jest liczbą naturalną mniejszą od* 2184*, to w ciągu*

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad \dots, \quad n+16,$$

*istnieje taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.*

Wykazaliśmy w 10.4.1, że istnieje ciąg składający się z 17 kolejnych liczb naturalnych wśród których nie ma żadnej takiej liczby, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych. Można udowodnić, że takich ciągów jest nieskończenie wiele.

**10.4.3.** *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n$, że wśród 17 kolejnych liczb*

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad \dots, \quad n+16,$$

*nie ma żadnej takiej liczby, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.*

**D.** Niech $n = 2184 + a \cdot b$, gdzie $b = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ oraz $a$ jest dowolną liczbą naturalną. Takich liczb $n$ jest oczywiście nieskończenie wiele i każda z nich spełnia układ trzech kongruencji

$$(*) \qquad n \equiv 0 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}, \quad n \equiv 4 \pmod{5}, \quad n \equiv 6 \pmod{11}.$$

Dla każdej więc takiej liczby $n$ możemy powtórzyć dowód stwierdzenia 10.4.1. ⊠

W przedstawionym dowodzie bardzo istotną rolę odgrywa układ kongruencji $(*)$. Jeśli liczba naturalna $n$ spełnia ten układ kongruencji, to mamy ciąg 17 kolejnych liczb naturalnych $n, n+1, \dots, n+16$, mających omawianą własność. Istnieje jeszcze jeden taki układ kongruencji.

**10.4.4.** *Niech $n$ będzie liczbą naturalną spełniającą układ kongruencji:*

$$n \equiv 0 \pmod{2 \cdot 5 \cdot 11}, \quad n \equiv 2 \pmod{3}, \quad n \equiv 5 \pmod{7}, \quad n \equiv 10 \pmod{13}.$$

*Wtedy wśród 17 kolejnych liczb: $n,\ n+1,\ n+2,\ \dots,\ n+16$, nie ma żadnej takiej liczby, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.* ([Evn1], [Flei]).

**D.** Oznaczmy przez $Y$ rozważany ciąg $A_{17}(n) = (n, n+1, n+2, \dots, n+16)$. Podobnie jak dowodzie stwierdzenia 10.4.1 mówić będziemy, że liczba, występująca w ciągu $Y$, jest *dobra*, jeśli nie jest względnie pierwsza z co najmniej jedną z pozostałych liczb tego ciągu. Udowodnimy, że każda liczba z ciągu $Y$ jest dobra.

Wszystkie liczby parzyste są oczywiście dobre. Pozostały do zbadania liczby nieparzyste:

$$n+1, \quad n+3, \quad n+5, \quad n+7, \quad n+9, \quad n+11, \quad n+13, \quad n+15.$$

Liczby $n+1$, $n+7$ oraz $n+13$ są dobre, gdyż są podzielne przez 3. Liczby $n+5$ oraz $n+15$ są podzielne przez 5; są więc dobre. Ponadto, $\mathrm{nwd}(n+11, n) = 11$. Pozostały do zbadania dwie liczby:

$$n+3, \quad n+9,$$

Ponieważ $n \equiv 10 \pmod{13}$, więc liczby $n+3$ oraz $n+16$ są podzielne przez 13, a zatem liczba $n+3$ jest dobra. Została jedna liczba $n+9$. Ale ta jest również dobra, gdyż z kongruencji $n \equiv 5 \pmod{7}$ wynika, że liczby $n+9$ oraz $n+16$ są podzielne przez 7. W ten sposób wykazaliśmy, że każda liczba występująca w ciągu $Y$ jest dobra. ⊠

Z twierdzenia chińskiego o resztach wynika, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n$, które spełniają powyższy układ kongruencji. Najmniejszą z nich jest $n = 27\,830 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 23$.

## 10.5 Osiemnaście kolejnych liczb naturalnych

Przedstawiamy przykłady ciągów sporadycznych postaci $A_{18}(n)$. Dowody pomijamy; są one podobne do dowodów przedstawionych w poprzednim podrozdziale.

**10.5.1.** *Niech $n$ będzie liczbą naturalną spełniającą jeden z następujących układów kongruencji:*

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{2}, \\ n \equiv 1 \pmod{3}, \\ n \equiv 4 \pmod{5}, \\ n \equiv 4 \pmod{7}, \\ n \equiv 10 \pmod{11}, \\ n \equiv 9 \pmod{13}, \\ n \equiv 0 \pmod{17}; \end{cases} \qquad \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{2}, \\ n \equiv 2 \pmod{3}, \\ n \equiv 0 \pmod{5}, \\ n \equiv 5 \pmod{7}, \\ n \equiv 0 \pmod{11}, \\ n \equiv 10 \pmod{13}, \\ n \equiv 0 \pmod{17}; \end{cases} \qquad \begin{cases} n \equiv 1 \pmod{2}, \\ n \equiv 2 \pmod{3}, \\ n \equiv 3 \pmod{5}, \\ n \equiv 6 \pmod{7}, \\ n \equiv 5 \pmod{11}, \\ n \equiv 12 \pmod{13}, \\ n \equiv 0 \pmod{17}. \end{cases}$$

*Wtedy wśród* 18 *kolejnych liczb:* $n,\ n+1,\ n+2,\ \dots,\ n+17$, *nie ma żadnej takiej liczby, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb. Takich liczb $n$ istnieje nieskończenie wiele. Najmniejszą z nich jest* $n = 27\,829 = 17 \cdot 1637$.

To, że takich liczb naturalnych $n$ istnieje nieskończenie wiele, wynika z twierdzenia chińskiego o resztach.

Dla $k = 18$ istnieje jeszcze jeden układ kongruencji, inny od podanych wyżej.

**10.5.2.** *Niech $n$ będzie liczbą naturalną spełniającą układ kongruencji:*

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17}, \\ n \equiv 4 \pmod{5}, \\ n \equiv 6 \pmod{11}. \end{cases}$$

*Wtedy wśród* 18 *kolejnych liczb:* $n,\ n+1,\ n+2,\ \dots,\ n+17$, *nie ma żadnej takiej liczby, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb. Takich liczb $n$ istnieje nieskończenie wiele. Najmniejszą z nich jest* $n = 993\,174 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 107$.

## 10.6 Pierwszy dowód twierdzenia Pillaia-Brauera

Jak już wspominaliśmy (patrz twierdzenie 10.3.1), Pillai i Brauer udowodnili, w 1941 roku, że dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 17$ istnieje taka liczba naturalna $n$, że ciąg $A_k(n) = (n, n+1, \dots, n+16)$ jest sporadyczny.

Przedstawimy teraz dowód tego twierdzenia, którego autorem jest R. J. Evans. Dowód ten, zajmujący tylko jedną stronę, znajdziemy w artykule [Evn1] opublikowanym w 1969 roku w czasopiśmie [Mon].

---

Ponieważ znamy już odpowiednie przykłady dla $k = 17$ oraz $k = 18$, możemy dalej zało żyć, że $k \geqslant 19$. W dowodzie wykorzystamy następuję uogólnienie znanego twierdzenia Czebyszewa (patrz na przykład [N-4]) o liczbach pierwszych.

**10.6.1** (J. Nagura 1952). *Dla każdej liczby $n \geqslant 25$ istnieje liczba pierwsza $p$ taka, że*

$$n \leqslant p \leqslant \frac{6}{5}n.$$

Załóżmy, że $k \geqslant 19$ jest liczbą naturalną i niech $p_1, p_2, p_3$ będą najmniejszymi takimi kolejnymi liczbami pierwszymi, że

$$p_3 > p_2 > p_1 \geqslant \frac{k}{2}.$$

**10.6.2.** *Zachodzi wtedy nierówność:* $p_2 + p_3 - p_1 \leqslant k$.

**D.** Łatwo sprawdzić, że ta nierówność zachodzi dla wszystkich $k$ takich, że $19 \leqslant k < 50$. Załóżmy dalej, że $k \geqslant 50$. Mamy wtedy (na mocy 10.6.1):

$$p_2 + p_3 - p_1 \leqslant \frac{6}{5}p_1 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 p_1 - p_1 \leqslant \left(\frac{6}{5} + \frac{36}{5} - 1\right)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{k}{2}\right) < k$$

i to kończy dowód. ⊠

Niech teraz $m$ będzie liczbą naturalną spełniającą następujący układ kongruencji:

$$(*) \qquad \begin{cases} m \equiv 0 \pmod{q}, & \text{dla wszystkich liczb pierwszych } q \text{ mniejszych od } p_1, \\ m \equiv -1 \pmod{p_1}, \\ m \equiv 1 \pmod{p_2}, \\ m \equiv -p_1 \pmod{p_3}. \end{cases}$$

Taka liczba naturalna $m$ oczywiście istnieje na mocy twierdzenia chińskiego o resztach. Możemy ponadto założyć, że $m > k - p_2$.

Niech $n = m - (k - p_2)$. Pokażemy, że ciąg $A_k(n) = \big(n,\ n+1,\ \dots,\ n+k-1\big)$ jest sporadyczny. Spójrzmy na kolejne wyrazy tego ciągu:

$$m + p_2 - k, \quad m + p_2 - k + 1,\ \dots,\ m - 1,\ m,\ m + 1,\ \dots,\ m + p_1,\ \dots, m + p_2 - 1.$$

Udowodnimy, że dla każdej liczby naturalnej $r \in A_k(n)$ istnieje liczba naturalna $s \in A_k(n)$ taka, że $s \neq r$ oraz $\mathrm{nwd}(r, s) \geqslant 2$. Załóżmy więc, że $r \in A_k(n)$ i rozpatrzmy 5 przypadków.

`Przypadek 1.` Niech $r = m$. Wtedy $s = m + 2 \in A_k(n)$ oraz $\mathrm{nwd}(r, s) \geqslant 2$, gdyż są to liczby parzyste.

`Przypadek 2.` Niech $r = m + 1$. W tym przypadku niech $s = m + p_1 + 1$. Liczba $s$ należy oczywiście do zbioru $A_k(n)$ i z kongruencji $m \equiv -1 \pmod{p_1}$ wynika, że obie liczby $r, s$ są podzielne przez $p_1$.

`Przypadek 3.` Niech $r = m - 1$. W tym przypadku niech $s = m + p_2 - 1$. Liczba $s$ należy oczywiście do zbioru $A_k(n)$ i z kongruencji $m \equiv 1 \pmod{p_2}$ wynika, że obie liczby $r, s$ są podzielne przez $p_2$.

`Przypadek 4.` Niech $r = m + p_1$. W tym przypadku przyjmujemy: $s = m + p_1 - p_3$. Z kongruencji $m \equiv -p_1 \pmod{p_3}$ wynika, że obie liczby $r, s$ są podzielne przez $p_3$. Liczba $s$ należy do zbioru $A_k(n)$ na mocy nierówności 10.6.2.

`Przypadek 5.` Załóżmy, że liczba $r$ jest różna od każdej z czterech liczb rozpatrzonych w poprzednich przypadkach. Wtedy $r$ jest postaci $m \pm u$, gdzie $u$ jest liczbą naturalną podzielną przez jakąś liczbę pierwszą $q$, mniejszą od $p_1$. Przyjmujemy $s = m$ i mamy: $r \neq s$, $s \in A_k(n)$ oraz $\text{nwd}(r,s) \geqslant q \geqslant 2$.

Dla każdej więc liczby naturalnej $r \in A_k(n)$ istnieje liczba naturalna $s \in A_k(n)$ taka, że $s \neq r$ oraz $\text{nwd}(r,s) \geqslant 2$. Wykazaliśmy więc, że ciąg $A_k(n)$ jest sporadyczny i tym samym zakończyliśmy dowód twierdzenia Pillaia-Brauera.

---

★ J. Nagura, *On the interval containing at least one prime number*, Proc. Japan. Acad. Sci., Sect. A, 11(1952) 6-12.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

## 10.7 Standardowe i sporadyczne (k,a)-systemy

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W poprzednich podrozdziałach rozpatrywaliśmy skończone ciągi kolejnych liczb naturalnych. Teraz zajmować się będziemy kolejnymi wyrazami skończonych ciągów arytmetycznych. Interesować nas będą tylko takie ciągi arytmetyczne, których wszystkie wyrazy są liczbami naturalnymi. Mówić będziemy, że taki ciąg arytmetyczny jest *standardowy*, jeśli wśród jego wyrazów znajduje się taki, który jest względnie pierwszy z każdym z pozostałych wyrazów. Jeśli natomiast taki ciąg nie jest standardowy, czyli jeśli żaden z wyrazów nie spełnia tej własności, to mówić będziemy, że dany ciąg arytmetyczny jest *sporadyczny.* Nazwy te wprowadziliśmy już wcześniej; były one jednak stosowane tylko dla ciągów kolejnych liczb naturalnych.

---

Ustalmy pewne nowe oznaczenia i terminologię.

Załóżmy, że $a \geqslant 1$ oraz $k \geqslant 3$ są liczbami naturalnymi. Oznaczmy przez $\mathbb{N}_k$ zbiór wszystkich kolejnych liczb całkowitych 0 do $k-1$, tzn. $\mathbb{N}_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Przez $\mathbb{P}_a(k)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich liczb pierwszych mniejszych od $k$ i względnie pierwszych z liczbą $a$. Przykłady:

$$\mathbb{P}_2(6) = \{3, 5\}, \qquad \mathbb{P}_{15}(32) = \{2, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}.$$

W szczególności, $\mathbb{P}_1(k) = \mathbb{P} \cap \mathbb{N}_k$, tzn. $\mathbb{P}_1(k)$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych mniejszych od $k$.

Jeśli $c \in \mathbb{N}_k$ oraz $p \in \mathbb{P}_a(k)$, to przez $[c]_p$ oznaczać będziemy zbiór tych wszystkich liczb ze zbioru $\mathbb{N}_k$, które przystają do $c$ modulo $p$. Dla $(k,a) = (20,14)$ mamy na przykład:

$$[5]_3 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}, \quad [4]_5 = \{4, 9, 14, 19\}, \quad [11]_{11} = \{0, 11\}.$$

Załóżmy, że $Q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ (gdzie $s \geqslant 1$) jest skończonym ciągiem parami różnych liczb pierwszych należących do zbioru $\mathbb{P}_a(k)$ oraz załóżmy, że $C = (c_1, c_2, \dots, c_s)$ jest ciągiem elementów ze zbioru $\mathbb{N}_k$. W takim przypadku przez $S(Q,C)$ oznaczać będziemy ciąg

$$\Big([c_1]_{q_1},\ [c_2]_{q_2},\ \dots,\ [c_s]_{q_s}\Big),$$

i każdy taki ciąg nazywać będziemy $(k,a)$-*systemem* lub $(k,a)$-*systemem stowarzyszonym z ciągiem* $Q$.

Tego rodzaju $(k, a)$-systemy przedstawiać będziemy głównie w postaci tablic. Jeśli na przykład $(k, a) = (20, 14)$, $Q = (3, 5, 11)$ oraz $C = (5, 4, 11)$, to $(20, 14)$-system $S(Q, C) = ([5]_3, [4]_5, [11]_{11})$ przedstawiamy w postaci tablicy

| | |
|---|---|
| 3 | 2, 5, 8, 11, 14, 17 |
| 5 | 4, 9, 14, 19 |
| 11 | 0, 11 |

.

Jeśli $(k, a) = (11, 1)$, $Q = (2, 3, 5, 7)$ oraz $C = (1, 1, 4, 3)$, to $(11, 1)$-system $S(Q, C)$ przedstawiamy w postaci tablicy

$$A = \begin{array}{|c|l|} \hline 2 & 1,3,5,7,9 \\ \hline 3 & 4,7,10 \\ \hline 5 & 4,9 \\ \hline 7 & 3,10 \\ \hline \end{array} .$$

---

Załóżmy teraz, że $a \geqslant 1, b \geqslant 0$ są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi oraz załóżmy, że $(x_n)$ jest ciągiem arytmetycznym takim, że $x_n = an + b$ dla $n = 1, 2, \cdots$.

Niech $k \geqslant 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $Y = \big(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}\big)$ będzie $k$-elementowym ciągiem składającym się z kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$, tzn.

$$y_0 = x_{m+0}, \quad y_1 = x_{m+1}, \quad \ldots, \quad y_{k-1} = x_{m+k-1},$$

gdzie $m$ jest pewną liczbą naturalną. Zauważmy, że

$$\text{nwd}(x_n, a) = \text{nwd}(an + b, a) = \text{nwd}(a, b) = 1.$$

Każdy więc wyraz $x_n$ jest liczbą względnie pierwszą z liczbą $a$. Mamy ponadto:

**10.7.1.** *Jeśli $p$ jest liczbą pierwszą taką, że $p \mid x_i$ oraz $p \mid x_j$, to $p \mid i - j$.*

**D.** Jeśli $i = j$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $i \neq j$, $p \mid x_i$ oraz $p \mid x_j$. Wtedy $p$ dzieli $\text{nwd}(x_i, x_j) = \text{nwd}(x_i, (i-j)a)$, a więc $p \mid x_i$ oraz $p \mid a(i - j)$. Ale $\text{nwd}(x_i, a) = 1$, więc $p \mid i - j$. ⊠

Stąd wynika stwierdzenie:

**10.7.2.** *Przy powyższych oznaczeniach, jeśli $i, j \in \mathbb{N}_k$, $i \neq j$, to następujące dwa warunki są równoważne:*

(1) $\text{nwd}(y_i, y_j) > 1$;

(2) *istnieje taka liczba pierwsza $p$ należąca do zbioru $\mathbb{P}_a(k)$, że $p \mid y_i$ oraz $p \mid y_j$.*

Zanotujmy również następne oczywiste stwierdzenie.

**10.7.3.** *Niech $i, j \in \mathbb{N}_k$ i niech $p$ będzie liczbą pierwszą mniejszą od $k$. Jeśli $i \equiv j \pmod p$, to $y_i \equiv y_j \pmod p$. Ponadto, jeśli $p \nmid a$, to $y_i \equiv y_j \pmod p \iff i \equiv j \pmod p$.*

Wiemy, że $\text{nwd}(x_n, a) = 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. To implikuje, że jeśli $p$ jest liczbą pierwszą mniejszą od $k$ oraz $p \mid y_j$ dla pewnego $j$, to $p \in \mathbb{P}_a(k)$. Jest jasne, że jeśli $p$ jest liczbą pierwszą mniejszą od $k$, to wśród $k$ kolejnych liczb całkowitych istnieje zawsze taka liczba, która jest podzielna przez $p$. Zanotujmy następujące uogólnienie tego faktu.

**10.7.4.** *Jeśli* $p \in \mathbb{P}_a(k)$*, to* $p \mid y_j$ *dla pewnego* $j \in \mathbb{N}_k$.

**D.** Przypomnijmy, że $y_j = x_{m+j} = (m+j)a+b$ dla $j = 0, \dots, k-1$. Oznaczmy przez $a_p$ odwrotność liczby $a$ modulo $p$, tzn. $1 \leqslant a_p < p$ oraz $a_p \cdot a \equiv 1 \pmod{p}$. Niech $j$ będzie resztą z dzielenia liczby $-a_p b - m$ przez $p$. Wtedy $j \in \mathbb{N}_k$ oraz

$$y_j = (m+j)a + b \equiv (m - a_p b - m)a + b = (1 - aa_p)b \equiv 0 \pmod{p},$$

a więc $j \in \mathbb{N}_k$ oraz $p \mid y_j$. ⊠

---

Niech teraz $Y = (y_0, \dots, y_{k-1})$ będzie takim ciągiem jak poprzednio i niech $Q = (q_1, \dots, q_s)$ będzie ciągiem parami różnych liczb pierwszych należących do zbioru $\mathbb{P}_a(k)$.

Niech $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Istnieje wtedy (na mocy 10.7.4) taki wyraz $y_j$, który jest podzielny przez liczbę pierwszą $q_i$. Index $j$ należy oczywiście do zbioru $\mathbb{N}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Najmniejszy index $j$ o tej własności oznaczmy przez $c_i$. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ mamy więc jednoznacznie wyznaczoną liczbę $c_i$, należącą do zbioru $\mathbb{N}_k$. Mamy zatem jednoznacznie wyznaczony ciąg $C = (c_1, c_2, \dots, c_s)$ o wyrazach ze zbioru $\mathbb{N}_k$. W tej sytuacji pojawia się $(k, a)$-system

$$\Big([c_1]_{q_1},\ [c_2]_{q_2},\ \dots,\ [c_s]_{q_s}\Big).$$

Mówić będziemy, że jest to $(k,a)$*-system ciągu* $Y = (y_0, \dots, y_{k-1})$ *stowarzyszony z ciągiem* $Q$.

Niech na przykład $(k, a) = (11, 1)$, $Q = (2, 3, 5, 7)$ oraz

$$Y = (y_0, \dots, y_{10}) = (11, 12, 13, \dots, 20).$$

Wtedy $(11, 1)$-systemem ciągu $Y$ stowarzyszonym z $Q$ jest $([1]_2,\ [1]_3,\ [4]_5, [3]_7)$. Zauważmy, że jest to wcześniej wspomniany $(11, 1)$-system z tablicą równą $A$.

W następnym przykładzie niech $(x_n)$ będzie ciągiem liczb nieparzystych: $x_n = 2n+1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech $(k, a) = (7, 2)$, $Q = (3, 5)$, oraz

$$Y = (y_0, \dots, y_6) = (7, 9, 11, 13, 15, 17).$$

W tym przypadku $(7, 2)$-systemem ciągu $Y$ stowarzyszonym z $Q$ jest $([1]_3,\ [4]_5)$ z tablicą

$$B = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1,4 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \end{array}\,.$$

---

**10.7.5.** *Niech* $x_n = an + b$ *dla* $n = 1, 2, \cdots$*, gdzie* $a \geqslant 1$*,* $b \geqslant 0$ *są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Niech* $k \geqslant 3$ *będzie liczbą naturalną oraz niech* $Q = (q_1, \dots, q_s)$ *będzie ciągiem parami różnych liczb pierwszych należących do zbioru* $\mathbb{P}_a(k)$.

*Jeśli* $S$ *jest dowolnym* $(k, a)$*-systemem stowarzyszonym z* $Q$*, to istnieje liczba naturalna* $m$ *taka, że* $S$ *jest* $(k, a)$*-systemem ciągu* $Y$ *stowarzyszonym z* $Q$*, gdzie*

$$Y = (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) = (x_{m+0}, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1}).$$

*Ponadto, zbiór wszystkich liczb naturalnych* $m$*, mających tę własność, jest nieskończony Najmniejsze* $m$ *należy do przedziału* $[1, q]$*, gdzie* $q = q_1 q_2 \cdots q_s$.

**D.** Niech $S = ([c_1]_{q_1}, \dots, [c_s]_{q_s})$, gdzie $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{N}_k$. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ oznaczmy przez $u_i$ odwrotność liczby $a$ modulo $q_i$, tzn. $u_i$ jest liczbą całkowitą taką, że $1 \leqslant u_i < q_i$ oraz $u_i \cdot a \equiv 1 \pmod{q_i}$. Rozważmy następujący układ kongruencji:

$$\begin{cases} m \equiv -c_1 - bu_1 \pmod{q_1}, \\ m \equiv -c_2 - bu_2 \pmod{q_2}, \\ \qquad \vdots \\ m \equiv -c_s - bu_s \pmod{q_s}. \end{cases}$$

Ponieważ liczby $q_1, \dots, q_s$ są parami względnie pierwsze, więc z twierdzenia chińskiego o resztach wynika, że istnieje liczba naturalna $m$, spełniająca ten układ kongruencji i należąca do przedziału $[1, q]$, gdzie $q = q_1 q_2 \cdots q_s$. Niech $y_j = x_{m+j} = a(m+j) + b$, dla $j = 0, 1, \dots, k-1$. Zauważmy, że jeśli $j = c_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, to wyraz $y_j$ jest podzielny przez $q_i$. Istotnie:

$$y_j = y_{c_i} = a(m + c_i) + b \equiv a\left(-c_i - bu_i + c_i\right) + b = -bau_i + b \equiv -b + b = 0 \pmod{q_i}.$$

To implikuje, że system $S$ jest $(k, a)$-systemem ciągu $(y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ stowarzyszonym z $Q$. Każda liczba postaci $m + tq$, gdzie $t \in \mathbb{N}$, posiada również rozważaną własność. ⊠

---

Niech, tak jak poprzednio, $k \geqslant 3$, $a \geqslant 1$ będą liczbami naturalnymi i niech $Q = (q_1, \dots, q_s)$ będzie ciągiem parami różnych liczb pierwszych należących do zbioru $\mathbb{P}_a(k)$. Rozważmy dowolny $(k, a)$-system

$$S = ([c_1]_{q_1}, \dots, [c_s]_{q_s})$$

stowarzyszony z $\mathbb{Q}$. Mówić będziemy, że ten system jest *sporadyczny*, jeśli dla każdego $j \in \mathbb{N}_k$ istnieje $i \in \{1, \dots, s\}$ takie, że $j \in [c_i]_{q_i}$ oraz zbiór $[c_i]_{q_i}$ ma co najmniej dwa różne elementy. Innymi słowy, system $S$ jest sporadyczny, jeśli każda liczba ze zbioru $\mathbb{N}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ występuje w prawej kolumnie tablicy tego systemu i przy tym występuje co najmniej jeden raz w takim wierszu (tej prawej kolumny), w którym oprócz tej liczby jest jeszcze co najmniej jedna inna liczba.

Jeśli system $S$ nie jest sporadyczny, to mówić będziemy, że jest *standardowy*. Zauważmy, że przedstawione wcześniej $(k, a)$-systemy z tablicami $A$ oraz $B$ są standardowe. W prawej kolumnie tablicy $A$ nie ma zera. Natomiast w prawej kolumnie tablicy $B$ nie ma liczby 2.

**10.7.6.** *Spójrzmy na* $(17, 1)$*-systemy ciągów rozpatrywanych w stwierdzeniach 10.4.1 oraz 10.4.4:*

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ |
| 3 | $0, 3, 6, 9, 12, 15$ |
| 5 | $1, 6, 11, 16$ |
| 7 | $0, 7, 14$ |
| 11 | $5, 16$ |
| 13 | $0, 13$ |

,

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16$ |
| 5 | $0, 5, 10, 15$ |
| 7 | $2, 9, 16$ |
| 11 | $0, 11$ |
| 13 | $3, 16$ |

.

*Każda liczba ze zbioru* $\{0, 1, \dots, 16\}$ *występuje w tych tablicach i przy tym występuje w takich wierszach, w których są co najmniej dwie liczby. Rozważane* $(17, 1)$*-systemy są więc sporadyczne.*

---

Jest oczywiste, że rozpatrywany wcześniej ciąg $Y = (y_0, \dots, y_{k-1})$ jest sporadyczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg $Q$, parami różnych liczb pierwszych należących do zbioru $\mathbb{P}_a(k)$, że $(k, a)$-system ciągu $Y$ stowarzyszony z $Q$ jest sporadyczny. Natychmiastową konsekwencją tego faktu oraz stwierdzenia 10.7.5 jest następujące ważne stwierdzenie.

**10.7.7.** *Niech $x_n = an + b$ dla $n = 1, 2, \dots$, gdzie $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$ są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Niech $k \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Istnieje $k$-elementowy ciąg sporadyczny, którego wyrazami są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego $(x_n)$.*

(2) *Istnieje co najmniej jeden taki $(k, a)$-system, który jest sporadyczny.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

## 10.8 Drugi dowód twierdzenia Pillaia-Brauera

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Powracamy jeszcze raz do twierdzenia Pillaia-Brauera 10.3.1, mówiącego o tym, że dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 17$ istnieje taka liczba naturalna $n$, że ciąg $A_k(n) = (n, n + 1, \dots, n + 16)$ jest sporadyczny. Przedstawiliśmy już pierwszy dowód tego twierdzenia. Teraz przedstawimy drugi dowód, którego autorem jest D. Fleishman. Dowód ten znajdziemy w artykule [Flei] opublikowanym w 1997 roku w rosyjskim czasopiśmie [Kw].

---

Wiemy na mocy stwierdzenia 10.7.7, że chcąc udowodnić omawiane twierdzenie wystarczy pokazać, że dla każdej liczb naturalnej $k \geqslant 17$ istnieje jakiś taki $(k, 1)$-system, który jest sporadyczny. Dla $k = 17$ przykład takiego sporadycznego systemu podaliśmy w poprzednim podrozdziale.

**10.8.1.** *Istnieją cztery sporadyczne* $(18, 1)$*-systemy*:

| | |
|---|---|
| 2 | $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$ |
| 3 | $2, 5, 8, 11, 14, 17$ |
| 5 | $1, 6, 11, 16$ |
| 7 | $3, 10, 17$ |
| 11 | $1, 12$ |
| 13 | $4, 17$ |
| 17 | $0, 17$ |

,

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16$ |
| 5 | $0, 5, 10, 15$ |
| 7 | $2, 9, 16$ |
| 11 | $0, 11$ |
| 13 | $3, 16$ |
| 17 | $0, 17$ |

,

| | |
|---|---|
| 2 | $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16$ |
| 5 | $2, 7, 12, 17$ |
| 7 | $1, 8, 15$ |
| 11 | $6, 17$ |
| 13 | $1, 14$ |
| 17 | $0, 17$ |

,

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18$ |
| 3 | $0, 3, 6, 9, 12, 15$ |
| 5 | $1, 6, 11, 16$ |
| 7 | $0, 7, 14$ |
| 11 | $5, 16$ |
| 13 | $0, 13$ |
| 17 | $0, 17$ |

.

Liczba 27 829 jest najmniejszą taką liczbą naturalną $n$, że ciąg $(n, n + 1, \dots, n + 17)$ jest sporadyczny.

**10.8.2.** *Pewne przykłady sporadycznych* $(19, 1)$*-systemów*:

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, \dots, 18$ |
| 3 | $0, 3, 6, 9, 12, 15, 18$ |
| 5 | $2, 7, 12, 17$ |
| 7 | $4, 11, 18$ |
| 11 | $2, 13$ |
| 13 | $5, 18$ |
| 17 | $1, 18$ |

,

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, \dots, 18$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16$ |
| 5 | $0, 5, 10, 15$ |
| 7 | $2, 9, 16$ |
| 11 | $0, 11$ |
| 13 | $3, 16$ |
| 17 | $0, 17$ |

,

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, \dots, 18$ |
| 3 | $2, 5, 8, 11, 14, 17$ |
| 5 | $3, 8, 13, 18$ |
| 7 | $2, 9, 16$ |
| 11 | $7, 18$ |
| 13 | $2, 15$ |
| 17 | $1, 18$ |

.

**10.8.3.** *Następujące tablice przedstawiają sporadyczne $(k, 1)$-systemy odpowiednio dla $k = 20, 21, 22$.*

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, \dots, 18$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$ |
| 5 | $0, 5, 10, 15$ |
| 7 | $2, 9, 16$ |
| 11 | $0, 11$ |
| 13 | $3, 16$ |
| 17 | $0, 17$ |

,

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, \dots, 20$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$ |
| 5 | $0, 5, 10, 15, 20$ |
| 7 | $2, 9, 16$ |
| 11 | $0, 11$ |
| 13 | $3, 16$ |
| 17 | $0, 17$ |

,

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 6, \dots, 20$ |
| 3 | $0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$ |
| 5 | $1, 6, 11, 16, 21$ |
| 7 | $5, 12, 19$ |
| 11 | $7, 18$ |
| 13 | $0, 13$ |
| 17 | $0, 17$ |

.

Teraz możemy założyć, że $k \geqslant 23$.

---

Przypomnijmy twierdzenie Czebyszewa: *dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje liczba pierwsza $p$ taka, że $n < p < 2n$,* (patrz na przykład [N-4]). Istnieją różne uogólnienia tego twierdzenia. Zanane jest na przykład następujące uogólnienie, które w dalszym ciągu wykorzystamy.

**10.8.4.** *Jeśli $n \geqslant 9$ jest liczbą naturalną, to istnieją trzy liczby pierwsze $p, q, r$ takie, że*

$$n < p < q < r < 2n.$$

Niech $(p_n)$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych:

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11,\ p_6 = 13,\ p_7 = 17,\ p_8 = 19,\ \cdots.$$

Założyliśmy, że $k \geqslant 23$. Zauważmy, że $23 = p_5 + p_6 - 1$. Zauważmy również, że mamy następujące stwierdzenie, które jest łatwą do udowodnienia konsekwencją twierdzenia 10.8.4.

**10.8.5.** *Jeśli $n \geqslant 5$, to*:

$(a)$ $p_{n+2} \leqslant 2p_n - 1$,

$(b)$ $p_{n+3} < p_n + p_{n+1}$,

$(c)$ $p_{n+4} < 2p_{n+1}$.

---

Teraz udowodnimy:

**10.8.6** ([Flei]). *Jeśli $n \geqslant 5$, to dla każdej liczby naturalnej $k$, należącej do przedziału*

$$\Big[p_n + p_{n+1} - 1,\ p_{n+1} + p_{n+2} - 1\Big],$$

*istnieje taki $(k, 1)$-system, który jest sporadyczny.*

**D.** Niech $q = p_{n+1} - 1$. Dowód będzie się składał z trzech części.

`Część 1.` Niech $k = p_{n+1} + p_n - 1$. Rozpatrzmy $(k, 1)$-system:

$$S_1 = \Big([q]_{p_1},\ [q]_{p_2},\ \dots,\ [q]_{p_{n-1}},\ [q-1]_{p_n},\ [0]_{p_{n+1}},\ [q-p_n]_{p_{n+2}}\Big).$$

Zauważmy, że:
$$\begin{aligned} [q-1]_{p_n} &= \Big\{p_{n+1} - 2 - p_n,\ p_{n+1} - 2,\ p_{n+1} + p_n - 2\Big\}, \\ [0]_{p_{n+1}} &= \Big\{0,\ p_{n+1}\Big\}, \\ [q-p_n]_{p_{n+2}} &= \Big\{p_{n+1} - p_n - 1,\ p_{n+2} + p_{n+1} - p_n - 1\Big\}. \end{aligned}$$

Ze stwierdzenia 10.8.5 wynika, że wszystkie składowe systemu $S_1$ są podzbiorami zbioru $\mathbb{N}_k$ i każda taka składowa ma co najmniej dwa elementy. Wykażemy, że każdy element zbioru $\mathbb{N}_k$ należy do co najmniej jednej takiej składowej.

Niech $j$ będzie dowolnym elementem zbioru $\mathbb{N}_k$.

Załóżmy najpierw, że $j \leqslant q - 2$. W tym przypadku $2 \leqslant q - j < p_{n+1}$, a więc $q - j$ jest podzielne przez pewną liczbę pierwszą postaci $p_i$, gdzie $i \leqslant n$. Przyjmijmy, że $q - j = dp_i$, $d \in \mathbb{N}$. Jeśli $i = n$ oraz $d \geqslant 2$, to mamy sprzeczność: $p_{n+1} < 2p_n \leqslant dp_n \leqslant dp_n + j = q = p_{n+1} - 1$. Zatem, jeśli $i = n$, to

$d = 1$ i wtedy $j = q - p_n$ należy do ostatniego zbioru $[q-p_n]_{p_{n+2}}$. Jeśli natomiast $i < n$, to $j = q - dp_i$ należy do zbioru $[q]_{p_i}$.

Podobnie postępujemy gdy $j \geqslant q+2$. Przypadki $j = q-1$, $j = q$ oraz $j = q+1$ są oczywiste. Zatem $(k,1)$-system $S_1$ jest sporadyczny.

`Część 2.` Niech $p_{n+1}+p_n \leqslant k < p_{n+1}+p_{n+1}$. Zauważmy, że w tym przypadku liczba pierwsza $p_{n+3}$ jest mniejsza od $k$ (patrz stwierdzenie 10.8.5), a zatem $p_{n+3} \in \mathbb{P}_a(k)$. W tym przypadku powiększamy poprzedni system $S_1$ o jedną nową składową

$$[p_n + q]_{p_{n+3}} = \Big\{p_n + p_{n+1} - p_{n+3} - 1, \quad p_n + p_{n+1} - 1\Big\}.$$

Łatwo sprawdzić, że nowy system

$$S_2 = \Big([q]_{p_1},\ [q]_{p_2},\ \dots,\ [q]_{p_{n-1}},\ [q-1]_{p_n},\ [0]_{p_{n+1}},\ [q-p_n]_{p_{n+2}},\ [p_n+q]_{p_{n+3}}\Big)$$

jest sporadycznym $(k,1)$-system.

`Część 3.` Niech $p_{n+1} + p_{n+1} \leqslant k \leqslant p_{n+1} + p_{n+2} - 1$. Zauważmy, że w tym przypadku liczba pierwsza $p_{n+4}$ jest mniejsza od $k$ (patrz stwierdzenia 10.8.5), a więc $p_{n+4} \in \mathbb{P}_1(k)$. W tym przypadku powiększamy poprzedni system $S_2$ o jedną nową składową

$$[2q+1]_{p_{n+4}} = \Big\{2p_{n+1} - p_{n+4} - 1, \quad 2p_{n+1} - 1\Big\},$$

i otrzymujemy w ten sposób nowy system

$$S_3 = \Big([q]_{p_1},\ [q]_{p_2},\ \dots,\ [q]_{p_{n-1}},\ [q-1]_{p_n},\ [0]_{p_{n+1}},\ [q-p_n]_{p_{n+2}},\ [p_n+q]_{p_{n+3}},\ [2q+1]_{p_{n+4}}\Big),$$

który jest sporadycznym $(k,1)$-systemem. ⊠

Teraz jest oczywiste, że twierdzenie Pillaia-Brauera 10.3.1 wynika z twierdzenia 10.8.6, przykładów dla $17 \leqslant k \leqslant 22$ oraz równości $23 = p_5+p_6-1$. Dowód twierdzenia Pillaia-Brauera został więc zakończony.

---

W przedstawionym tu dowodzie twierdzenia 10.8.6 podaliśmy pewien algorytm pozwalający konstruować sporadyczne $(k,1)$-systemy dla wszystkich $k \geqslant 23$. Rozpatrzmy dla przykładu przypadek $k = 50$. Mamy:

$$p_8 + p_9 - 1 = 19 + 23 - 1 = 41 < k < 51 = 23 + 29 - 1 = p_9 + p_{10} - 1$$

i ponadto, $p_{n+1} + p_{n+1} = 46 < 50 = k$. Zatem $q = 22$. Wykorzystujemy konstrukcję podaną w trzeciej części dowodu twierdzenia 10.8.6 i w ten sposób otrzymujemy sporadyczny $(50,1)$-system:

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 20, 22, 24, \dots, 40, 42, 44, 46, 48$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49$ |
| 5 | $2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47$ |
| 7 | $1, 8, 15, 22, 29, 36, 43$ |
| 11 | $0, 11, 22, 33, 44$ |
| 13 | $9, 22, 35, 48$ |
| 17 | $5, 22, 39$ |
| 19 | $2, 21, 40$ |
| 23 | $0, 23, 46$ |
| 29 | $3, 32$ |
| 31 | $10, 41$ |
| 37 | $8, 45$ |

.

Teraz chcielibyśmy jeszcze znaleźć taką liczbę naturalną $n$, aby ciąg

$$Y = (n, n+1, \dots, n+49)$$

był sporadyczny i powyższy system był jego $(50, 1)$-systemem. Chcąc to zrobić należy rozwiązać następujący układ kongruencji:

$$\begin{array}{llll} n \equiv 0 \pmod{2}, & n \equiv 6 \pmod{7}, & n \equiv 12 \pmod{17}, & n \equiv 26 \pmod{29}, \\ n \equiv 2 \pmod{3}, & n \equiv 0 \pmod{11}, & n \equiv 17 \pmod{19}, & n \equiv 21 \pmod{31}, \\ n \equiv 3 \pmod{5}, & n \equiv 4 \pmod{13}, & n \equiv 0 \pmod{23}, & n \equiv 29 \pmod{37}. \end{array}$$

Wiemy, na mocy twierdzenia chińskiego o resztach, że ten układ kongruencji ma nieskończenie wiele rozwiązań. Można sprawdzić (za pomocą komputera), że najmniejszą taką liczbą naturalną $n$ jest $n = 4\,864\,287\,327\,878$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

## 10.9 Ciągi arytmetyczne i twierdzenie Evansa

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale zakładamy, że $a \geqslant 2$ i $b \geqslant 1$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi oraz oraz $(x_n)$ jest ciągiem arytmetycznym takim, że

$$x_n = an + b, \quad \text{dla} \ \ n = 1, 2, \cdots .$$

Niech $k \geqslant 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $Y = \left(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\right)$ będzie $k$-elementowym ciągiem składającym się z kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$, tzn.

$$y_0 = x_{m+0}, \quad y_1 = x_{m+1}, \quad \dots, \quad y_{k-1} = x_{m+k-1},$$

gdzie $m$ jest pewną liczbą naturalną. Przypomnijmy wprowadzone wcześniej nazwy. Mówimy, że ciąg $Y$ jest *standardowy*, jeśli wśród jego wyrazów znajduje się taki, który jest względnie pierwszy z każdym z pozostałych jego wyrazów. Jeśli natomiast ciąg $Y$ nie jest standardowy, to mówimy, że jest *sporadyczny.*

**10.9.1.** *Jeśli $k \leqslant 16$, to każdy ciąg powyższej postaci $Y = (y_0, \dots, y_{k-1})$ jest standardowy.*

**D.** Niech $m \in \mathbb{N}$. Należy udowodnić, że ciąg $(x_{m+0}, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1})$ jest standardowy. Przypuśćmy, że ten ciąg jest sporadyczny. Ze stwierdzenia 10.7.7 wynika, że wtedy istnieje jakiś sporadyczny $(k, a)$-system $S$, stowarzyszony z pewnym ciągiem $Q$, składającym się z parami różnych liczb pierwszych należących do zbioru $\mathbb{P}_a(k)$. Każdy sporadyczny $(k, a)$-system jest oczywiście sporadycznym $(k, 1)$-systemem. Zatem $S$ jest $(k, 1)$-system sporadycznym. Korzystając jeszcze raz ze stwierdzenia 10.7.7 stwierdzamy, że istnieje taki ciąg $k$ kolejnych liczb naturalnych, który jest sporadyczny. Ale $k \leqslant 16$, więc mamy sprzeczność z twierdzeniem Pillaia 10.2.6. ⊠

Przypomnijmy, że $x_n = an + b$, gdzie $a \geqslant 2$, $b \geqslant 1$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Liczba $b$ nie odgrywa tu istotnej roli. Ważne jest tylko to, że $\mathrm{nwd}(a, b) = 1$. W warunku (2) stwierdzenia 10.7.7 nic się nie mówi o liczbie $b$. Z tej obserwacji wynika następujące stwierdzenie.

**10.9.2.** *Niech $a \geqslant 2$, $k \geqslant 3$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $b \geqslant 1$, $b' \geqslant 1$ będą liczbami naturalnymi, względnie pierwszymi z liczbą $a$. Niech $x_n = an+b$, $x'_n = an+b'$, dla $n = 1, 2, \cdots$. Wówczas istnieje ciąg sporadyczny składający się z $k$ kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg sporadyczny składający się z $k$ kolejnych wyrazów ciągu $(x'_n)$.*

Następne stwierdzenie jest również pewną konsekwencją stwierdzenia 10.7.7.

**10.9.3.** *Niech $x_n = an + b$, dla $n = 1, 2, \dots,$ gdzie $a \geqslant 2$, $b \geqslant 1$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Niech*

$$z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

*Jeśli liczby $a, z$ są względnie pierwsze, to istnieje ciąg sporadyczny składający się z 17 kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$.*

**D.** Wiemy (patrz 10.7.6), że istnieje sporadyczny $(17, 1)$-system $S$. Ponieważ liczby $a$ oraz $z$ są względnie pierwsze, $S$ jest także sporadycznym $(17, a)$-systemem. Zatem, na mocy stwierdzenia 10.7.7, istnieje ciąg sporadyczny składający się z 17 kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$. ⊠

Zanotujmy kilka przykładów ciągów sporadycznych, otrzymanych za pomocą przepisu podanego w powyższym dowodzie, twierdzenia chińskiego o resztach i komputera.

**10.9.4.** *Niech $x_n = 17n + 1$. Istnieje wtedy takie $m \in \mathbb{N}$, że $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+16})$ jest ciągiem sporadycznym. Najmniejsze $m$ jest równe* 24 297.

**10.9.5.** *Niech $x_n = 19n+1$. Istniej wtedy takie $m \in \mathbb{N}$, że $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+16})$ jest ciągiem sporadycznym. Najmniejsze $m$ jest równe* 961.

---

Spójrzmy jeszcze raz na twierdzenie Pillaia-Brauera 10.3.1. Wykorzystując to twierdzenie oraz stwierdzenie 10.7.7, możemy udowodnić następne twierdzenie.

**10.9.6.** *Niech $x_n = an + b$, dla $n = 1, 2, \dots,$ gdzie $a \geqslant 2$, $b \geqslant 1$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Niech*

$$z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

*Jeśli liczby $a, z$ są względnie pierwsze, to dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 17$ istnieje ciąg sporadyczny składający się z $k$ kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$.*

**D.** Niech $k \geqslant 17$. Z twierdzenia 10.3.1 oraz ze stwierdzenia 10.7.7 wynika, że istnieje so najmniej jeden sporadyczny $(k, 1)$-system $S$. Ponieważ liczby $a$ oraz $z$ są względnie pierwsze, więc $S$ jest także sporadycznym $(k, a)$-systemem. Zatem, na mocy stwierdzenia 10.7.7, istnieje ciąg sporadyczny składający się z $k$ kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$. ⊠

---

Pojawiła się liczba $z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; iloczyn wszystkich liczb pierwszych mniejszych od 17. Wiemy, na mocy powyższych faktów, że jeśli $\text{nwd}(a, z) = 1$, to dla dowolnego $k \geqslant 17$ istnieją omawiane ciągi sporadyczne długości równej $k$ i takie ciągi potrafimy konstruować. Co może się zdarzyć w przypadku, gdy $a = 2$ lub ogólniej, gdy $\text{nwd}(a, z) > 1$? Czy wtedy również istnieją podobnego typu twierdzenia?

W 1972 roku, Ronald J. Evans udowodnił istotne twierdzenie dotyczące rozważanego zagadnienia.

**10.9.7** (R J. Evans, 1972)**.** *Niech $x_n = an + b$, dla $n = 1, 2, \dots,$ gdzie $a \geqslant 2$, $b \geqslant 1$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Istnieje wtedy taka liczba naturalna $u = u(a)$, że dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant u$ istnieje ciąg sporadyczny składający się z $k$ kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$.* ([Evn2]).

Dowodu tego twierdzenia w tej książce nie będzie. Wspomnijmy jednak, że dowód, podany przez Evansa w pracy [Evn2], jest dość elementarny i zajmuje niecałe dwie strony. Wykorzystuje się w nim pewne znane twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych.

Masahide Ohtomo i Fumikazu Tamari opublikowali, w 2002 roku, pracę [OhT], której głównym wynikiem jest powyższe twierdzenie Evansa. Autorzy nie cytują pracy [Evn2]. Ich dowód jest zupełnie podobny do dowodu podanego przez Evansa.

Niech $x_n = an + b$ dla $n = 1, 2, \cdots$, gdzie $A \geqslant 2$, $b \geqslant 1$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Z twierdzenia Evansa wynika w szczególności, że istnieje co najmniej jedna taka liczba naturalna $k$, że $k$-elementowy ciąg postaci

$$(x_m,\ x_{m+1},\ \dots,\ x_{m+k-1})$$

(dla pewnego $m \in \mathbb{N}$), jest ciągiem sporadycznym. Najmniejszą liczbę naturalną $k$, spełniającą tę własność, oznaczać będziemy przez $\gamma(a)$. Jest jasne (patrz stwierdzenie 10.9.2) że $\gamma(a)$ nie zależy od $b$.

W twierdzeniu Evansa pojawia się jeszcze jedna interesująca liczba, którą w dalszym ciągu oznaczać będziemy przez $\gamma_0(a)$. Jest to najmniejsza taka liczba naturalna $u$, że dla wszystkich liczb naturalnych $k \geqslant u$ istnieje taki $k$-elementowy ciąg postaci $(x_m,\ x_{m+1},\ \dots,\ x_{m+k-1})$ (dla pewnego $m \in \mathbb{N}$), który jest sporadyczny. Ze stwierdzenia 10.9.2 wynika, że $\gamma_0(a)$ również nie zależy od $b$. Zakładaliśmy, że $a \geqslant 2$. Dla $a = 1$ przyjmujemy dodatkowo: $\gamma_0(1) = \gamma(1) = 17$.

Twierdzenia Pillaia-Brauera 10.3.1 oraz Evansa 10.9.7 można teraz zanotować w postaci jednego twierdzenia.

**10.9.8.** *Niech $x_n = an + b$, dla $n = 1, 2, \dots$, gdzie $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$ są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Wtedy:*

(1) *istnieje ciąg sporadyczny długości $\gamma(a)$ utworzony z kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$;*

(2) *dla każdego $k$ spełniającego nierówność $k \geqslant \gamma_0(a)$, Istnieje ciąg sporadyczny długości równej $k$, składający się z kolejnych wyrazów ciągu $(x_n)$.*

---

★ Jyhmin Kou, Hung-Lin Fu, *On near relative prime numbers in a sequence of positive integers*, Taiwanese J. Math. 14(1)(2010) 123-129.

**oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo**

## 10.10 Oszacowania liczb $\gamma$(a) i $\gamma_0$(a)

**oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo**

Jest oczywiste, że $\gamma(a) \leqslant \gamma_0(a)$, dla wszystkich $a \in \mathbb{N}$. Ze stwierdzenia 10.9.1 wynika:

**10.10.1.** $17 \leqslant \gamma(a) \leqslant \gamma_0(a)$, *dla* $a \in \mathbb{N}$.

Natomiast z twierdzenia 10.9.6 otrzymujemy:

**10.10.2.** *Jeśli $a$ jest liczbą naturalną względnie pierwszą z liczbą $z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, to*

$$\gamma(a) = \gamma_0(a) = 17.$$

---

Zanotujmy kilka przykładów sporadycznych $(k, a)$ systemów.

**10.10.3.** *Sporadyczne* $(k, a)$*-systemy dla pewnych par* $(k, a)$*, gdzie* $a \in \{7, 11, 13\}$ :

| | $(k, a) = (27, 13)$ |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 6, 8, \dots, 22, 24, 26$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$ |
| 5 | $1, 6, 11, 16, 21, 26$ |
| 7 | $3, 10, 17, 24$ |
| 11 | $4, 15, 26$ |
| 17 | $9, 26$ |
| 19 | $5, 24$ |
| 23 | $0, 23$ |

,

| | $(k, a) = (27, 11)$ |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 6, 8, \dots, 22, 24, 26$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$ |
| 5 | $1, 6, 11, 16, 21, 26$ |
| 7 | $2, 9, 16, 23$ |
| 13 | $2, 15$ |
| 17 | $0, 17$ |
| 19 | $5, 24$ |
| 23 | $3, 26$ |

,

| | $(k, a) = (48, 7)$ |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 6, 8, \dots, 40, 42, 44, 46$ |
| 3 | $0, 3, 6, 9, 12, \dots, 39, 42, 45$ |
| 5 | $3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43$ |
| 11 | $7, 18, 29, 40$ |
| 13 | $5, 18, 31, 44$ |
| 17 | $2, 19, 36$ |
| 19 | $17, 36$ |
| 23 | $2, 25$ |
| 29 | $11, 40$ |
| 31 | $4, 35$ |
| 37 | $0, 37$ |
| 41 | $0, 41$ |
| 43 | $1, 44$ |
| 47 | $0, 47$ |

.

**10.10.4.** *Sporadyczny* $(65, 5)$*-system:*

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 6, \dots, 56, 58, 60, 62, 64$ |
| 3 | $1, 4, 7, 10, \dots, 52, 55, 58, 61, 64$ |
| 7 | $1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64$ |
| 11 | $0, 11, 22, 33, 44, 55$ |
| 13 | $9, 22, 35, 48, 61$ |
| 17 | $5, 22, 39, 56$ |
| 19 | $3, 22, 41, 60$ |
| 23 | $1, 24, 47$ |
| 29 | $23, 52$ |
| 31 | $21, 52$ |
| 37 | $27, 64$ |
| 41 | $17, 58$ |
| 43 | $2, 45$ |
| 47 | $4, 51$ |
| 53 | $0, 53$ |
| 59 | $0, 59$ |
| 61 | $2, 63$ |

.

**10.10.5.** *Sporadyczny* $(103, 3)$*-system:*

| | |
|---|---|
| 2 | $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots 92, 94, 96, 98, 100, 102$ |
| 5 | $0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots, 75, 80, 85, 90, 95, 100$ |
| 7 | $5, 12, 19, 26, 33, 40, 47, 54, 61, 68, 75, 82, 89, 96$ |
| 11 | $7, 18, 29, 40, 51, 62, 73, 84, 95$ |
| 13 | $1, 14, 27, 40, 53, 66, 79, 92$ |
| 17 | $6, 23, 40, 57, 74, 91$ |
| 19 | $2, 21, 40, 59, 78, 97$ |
| 23 | $17, 40, 63, 86$ |
| 29 | $11, 40, 69, 98$ |
| 31 | $9, 40, 71, 102$ |
| 37 | $3, 40, 77$ |
| 41 | $1, 42, 83$ |
| 43 | $41, 84$ |
| 47 | $39, 86$ |
| 53 | $49, 102$ |
| 59 | $43, 102$ |
| 61 | $37, 98$ |
| 67 | $0, 67$ |
| 71 | $31, 102$ |
| 73 | $13, 86$ |
| 79 | $2, 81$ |
| 83 | $4, 87$ |
| 89 | $4, 93$ |
| 97 | $2, 99$ |
| 101 | $0, 101$ |

.

Z przykładów tych otrzymujemy oszacowania: $\gamma(13) \leqslant 27$, $\gamma(11) \leqslant 27$, $\gamma(7) \leqslant 48$. $\gamma(5) \leqslant 65$ oraz $\gamma(3) \leqslant 103$, Za pomocą komputera sprawdziliśmy, że: $\gamma(2) \leqslant 172$. Ponadto, $\gamma(6) \leqslant 2392$ oraz $\gamma(30) \leqslant 10\,121$. Wiemy na przykład, że $\gamma(2) \leqslant 172$, ponieważ mamy:

**10.10.6.** *Sporadyczny* $(172, 2)$*-system:*

| | |
|---|---|
| 3 | $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88, 91, 94, 97, 100, 103, 106, 109, 112, 115, 118, 121, 124, 127, 130, 133, 136, 139, 142, 145, 148, 151, 154, 157, 160, 163, 166, 169$ |
| 5 | $0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170$ |
| 7 | $0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, 154, 161, 168$ |
| 11 | $4, 15, 26, 37, 48, 59, 70, 81, 92, 103, 114, 125, 136, 147, 158, 169$ |
| 13 | $5, 18, 31, 44, 57, 70, 83, 96, 109, 122, 135, 148, 161$ |
| 17 | $2, 19, 36, 53, 70, 87, 104, 121, 138, 155$ |
| 19 | $13, 32, 51, 70, 89, 108, 127, 146, 165$ |
| 23 | $1, 24, 47, 70, 93, 116, 139, 162$ |
| 29 | $12, 41, 70, 99, 128, 157$ |
| 31 | $8, 39, 70, 101, 132, 163$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | $33, 70, 107, 144$ | 67 | $5, 72, 139$ | 101 | $1, 102$ | 137 | $4, 141$ |
| 41 | $29, 70, 111, 152$ | 71 | $0, 71, 142$ | 103 | $66, 169$ | 139 | $4, 143$ |
| 43 | $27, 70, 113, 156$ | 73 | $69, 142$ | 107 | $62, 169$ | 149 | $0, 149$ |
| 47 | $23, 70, 117, 164$ | 79 | $78, 157$ | 109 | $54, 163$ | 151 | $2, 153$ |
| 53 | $17, 70, 123$ | 83 | $3, 86, 169$ | 113 | $38, 151$ | 157 | $2, 159$ |
| 59 | $11, 70, 129$ | 89 | $74, 163$ | 127 | $7, 134$ | 163 | $4, 167$ |
| 61 | $9, 70, 131$ | 97 | $68, 165$ | 131 | $6, 137$ | 167 | $4, 171$ |

.

Nie wiemy, czy dla $a = 2$ liczba 172 jest najmniejsza z możliwych. Sprawdziliśmy jednak, że $\gamma(2) > 100$. Mamy zatem następujące stwierdzenie.

**10.10.7.** *Jeśli* $2 \leqslant k \leqslant 100$, *to wśród* $k$ *kolejnych liczb nieparzystych istnieje zawsze taka liczba, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych liczb.*

Nie znamy liczby $\gamma_0(2)$. W pracy [OhT] udowodniono, że $\gamma_0(2) \leqslant 385$.

# Literatura


[Bams] Bulletin of the American Mathematical Society, (Bull. Amer. Math. Soc.), czasopismo matematyczne.

[Evn1] R. J. Evans, *On blocks of N consecutive integers*, The American Mathematical Monthly, 76(1)(1969), 48-49.

[Evn2] R. J. Evans, *On N consecutive integers in an arithmetic progression*, Acta Sci Math. (Szeged), 33(1972), 295-296.

[Flei] D. Fleishman, *Twierdzenie chińskie o resztach i hipoteza Chentzova*, Kwant, 3(1997), 39-40, 52.

[IsrJ] Israel Journal of Mathematics.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mock] Mock Putnam Exam.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N-4] A. Nowicki, *Liczby Pierwsze*, Podróże po Imperium Liczb, cz.4, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2009.

[OhT] M. Ohtomo, F. Tamari, *On relative prime numbers in a sequence of positive integers*, Journal of Statistical Planning and Inference, 106 (2002), 509-515.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pill] S. Pillai, *On m consecutive integers*, Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A, 11(1940) 6-13.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition.

[ShCY] D. O. Shklarsky, N. N. Chentzov, I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book*, W. F. Freeman and Company, San Francisco, London, 1962.