
Olsztyn, Toruń, 2011

Podróże po Imperium Liczb

14. Równanie Pella

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Ostatnia aktualizacja: 10 kwietnia 2013

Wstęp	1
1 Równanie $x^2 - dy^2 = 1$	5
1.1 Informacje wstępne	5
1.2 Twierdzenie o istnieniu rozwiązań naturalnych	10
1.3 Opis wszystkich rozwiązań	13
1.4 Rozwiązania i ciągi rekurencyjne	15
1.5 Rozwiązania i wielomiany Czebyszewa	16
1.6 Historia i uzupełniające informacje	18
2 Najmniejsze rozwiązania równania $x^2 - dy^2 = 1$	19
2.1 Więcej niż 9 cyfr	23
2.2 Najmniejsze rozwiązania i ułamki łańcuchowe	27
2.3 Najmniejsze rozwiązania dla pewnych liczb d	29
2.4 Najmniejsze rozwiązania specjalnego typu	31
3 Równanie $x^2 - dy^2 = -1$	33
3.1 Opis wszystkich rozwiązań	33
3.2 Rozwiązania i ciągi rekurencyjne	36
3.3 Tablice z liczbami d i najmniejszymi rozwiązaniami	37
3.4 Problem istnienia rozwiązań	39
3.5 Równanie $x^2 - dy^2 = \pm 1$	41
4 Równanie $x^2 - dy^2 = c$	43
4.1 Klasy rozwiązań	44
4.2 Opis wszystkich rozwiązań równania $x^2 - dy^2 = c$	49
4.3 Początkowe przykłady	50
4.4 Rozwiązania względnie pierwsze	52
4.5 Dodatkowe informacje o równaniu $x^2 - dy^2 = c$	56
5 Przykłady równań postaci $x^2 - dy^2 = c$	61
5.1 Równanie $x^2 - 2y^2 = \pm 1$	61
5.2 Równanie $x^2 - 2y^2 = c$	63
5.3 Równanie $x^2 - 3y^2 = c$	68
5.4 Równanie $x^2 - 5y^2 = c$	70
5.5 Równanie $x^2 - 6y^2 = c$	71
5.6 Równanie $x^2 - 7y^2 = c$	73
5.7 Równanie $x^2 - 8y^2 = c$	74
5.8 Równanie $x^2 - 10y^2 = c$	75
5.9 Równanie $x^2 - 11y^2 = c$	77
5.10 Układy równań Pella	78

6	Równanie $ax^2 - by^2 = 1$	79
6.1	Początkowe obserwacje	80
6.2	Funkcja F	81
6.3	Opis wszystkich rozwiązań równania $ax^2 - by^2 = 1$	82
6.4	Przykłady	84
7	Równanie $ax^2 - by^2 = c$	91
7.1	Informacje wstępne	91
7.2	Klasy rozwiązań naturalnych	93
7.3	Opis wszystkich rozwiązań naturalnych	97
7.4	Przykłady	97
7.5	Rozwiązania względnie pierwsze	103
7.6	Rozwiązania wymierne	106
8	Równanie Pella nad pierścieniami skończonymi	107
8.1	Kongruencja $x^2 - dy^2 \equiv c \pmod{m}$	107
8.2	Równanie Pella i pierścień skończony	116
9	Zastosowania równania Pella	121
9.1	Liczby kwadratowe	121
9.2	Sumy kwadratów	123
9.3	Liczby postaci $x^2 \pm 1$	125
9.4	Trójki Pitagorasa	127
9.5	Liczby trójkątne	129
9.6	Równanie $ax^2 + x = by^2 + y$	136
9.7	Równanie $ax^2 + bx + c = py^2 + qy$	140
9.8	Równanie $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$	144
9.9	Liczby Fibonacciego	148
9.10	Sześciiany	151
9.11	Trójkąty Herona	155
9.12	Silnie i symbole Newtona	156
9.13	Liczby z pierwiastkami	158
9.14	Inne zastosowania	159
10	Pary liczb całkowitych i zastosowania równania Pella	161
10.1	Pary i wielomiany liniowe	161
10.2	Pary (a,b) takie, że $a \mid b^2 + 1$ oraz $b \mid a^2 + 1$	162
10.3	Konsekwencja twierdzenia Gaussa	166
10.4	Moniczne wielomiany z symetrycznymi współczynnikami	168
10.5	Moniczne trójmiany kwadratowe	172
10.6	Pary (a,b) takie, że $a \mid b^2 + m$ oraz $b \mid a^2 + m$	175
	Spis cytowanej literatury	185
	Skorowidz nazwisk	189
	Skorowidz	191

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

Skorowidz

- Andreescu T., 15, 160, 185
Andrica D., 15, 160, 185
- Balcerzyk S., 185
Barbeau E.J., 4, 63, 185
Barnes E.S., 184
Bhaskara, 26
Blanc, 31
Bronstein J., 184
Brouncker W., 18
Browkin J., 134, 185
Buchsztab A.A., 185
Bumby R.T., 105
- Carmichael R.D., 105
Cheng Y., 51, 59
Clarke R.J., 155
Cohen H., 78, 185
Cohn J., 31
Copley G.N., 16
Cucurezeanu I., 160, 185
- Davenport H., 18, 185
Dickson L.E., 18, 105, 185
Dirichlet P.G.L., 10, 12, 18, 185
Djukić D., 185
Dynkin J., 71, 185
- Epstein P., 41
Erickson M., 185
Euler, 18
- Fermat, 18
Flath D.E., 147, 185
- Galpierin G.A., 185
Gauss, 144
Gelca R., 160, 185
Gelfond A.O., 12, 185
Gioia A.A., 186
Griffin H., 186
Grytczuk A., 128
Guerreiro J., 156
Guy R.K., 186
- Hardy G.H., 63, 186
Hensel K., 107
- Ireland K., 186
Iyer R.V., 125
- Jacobson Jr. M.J., 18, 29, 59, 186
Jadrenko M.I., 188
Janković V., 185
Józefiak T., 185
- Kaplan P., 41
Kartaszow I.W., 188
Khessami P.K., 40
- Lagrange, 18
Landau E., 12, 186
Larsen M.E., 135
Lemmermeyer F., 186
Lenstra Jr. H.W., 186
LeVeque W.J., 29, 186
Li K.Y., 12
Ljunggren W., 31
LLoyd E.K., 155
Luca F., 128
Lucas E., 31
Lunggren W., 31
- Masser D.W., 67, 78
Matić I., 185
Matsumura H., 186
Matthews K., 59, 128
McBride A., 122
Michailowskij W.I., 188
Mills W.H., 164, 184
Mitek J., 105
Mollin R.A., 186
Montgomery H.L., 36, 187
Mordell L.J., 15, 31, 144, 152, 154, 155, 186
Moret, 31
- Nagell T., 12, 18, 41, 59, 187
Narkiewicz W., 187
Newman M., 41
Niven I., 36, 187
Nowicki A., 187
- Pell J., 18
Petrović N., 185
Pompe W., 26
Prasolov V.V., 63, 187
- Rempała J., 185
Rickert J.H., 67, 78
Rosen M., 186
Rotkiewicz A., 154

Schinzel A., 67, 165, 188
Senderov W., 12
Shanks D., 188
Sierpiński W., 12, 29, 67, 125, 128, 155, 164, 165,
187, 188
Silverman J.H., 12, 188
Smart N.P., 188
Spivak A., 12
Steen L.A., 188
Stillwell J., 12, 188
Straszewicz S., 185, 188

Tattersall J.J., 15, 188
Tetiva M., 157
Tołpygo A.K., 185
Trigg Ch., 188

Ulas M., 135, 188
Uspienski W., 71, 185

Vazzana A., 185

Wada H., 12
Walker D.T., 188
Walsh P.G., 40, 41, 78
Wegener D.P., 160
Whitford E.E., 18, 26, 188
Williams H.C., 18, 29, 59, 186
Williams K.S., 41
Winogradow I., 188
Wójtowicz M., 128
Wróblewski J., 26
Wright E.M., 63, 186
Wyszenskij W.A., 188

Zarankiewicz K., 135
Zuckerman H.S., 36, 187

Skorowidz

- bikwadrat, 14, 31, 51, 84, 105, 123, 129, 140
- charakterystyka ciała, 117–119
- ciąg, 13, 27, 28, 107, 108, 164, 172–174, 176, 180, 181, 184
 - Fibonacciego, 148–150, 162, 164, 181
 - okresowy, 27–29, 39
 - rekurencyjny, 15–17, 27, 36, 127, 172–174, 180, 181
 - rozwiązań, 13, 15–17, 36, 41, 140, 141
 - skończony, 5, 28
- ciało, 118
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, 7, 54
 - skończone, 117–119
 - ułamków, 7
- część całkowita, 2, 11, 27, 28, 48, 49, 59, 156, 158
- część ułamkowa, 10, 18
- czwórka liczb całkowitych, 78, 151, 152
- element
 - kwadratowy, 117
 - neutralny, 116, 119
 - niekwadratowy, 118
 - odwrotny, 43, 53
 - przeciwny, 116, 119
- funkcja, 118, 163, 176, 179
 - F , 81, 82
 - φ , 2, 53, 55, 104, 105
- funkcje wzajemnie odwrotne, 163, 179
- grupa, 43, 116–119
 - cykliczna, 117–119
 - multiplikatywna pierścienia, 43, 53, 118
- hipoteza Mordella, 15
- IMO, 1, 121
 - Shortlist, 176
- indukcja matematyczna, 17, 62, 112, 149, 164, 172, 180
- izomorfizm grup, 116, 118
- klasa abstrakcji, 45, 47–51, 58, 59, 93, 96, 97
- kongruencja, 12, 17, 39, 40, 50, 53–55, 104, 105, 107, 119, 137, 160
- lemat
 - Dirichleta, 10, 18
 - Hensela, 107
- liczba
 - bezkwadratowa, 40, 142
 - Fibonacciego, 148–150, 164, 181
 - kwadratowa, 5, 10, 16, 31, 39, 40, 79, 81, 91, 106, 121, 123, 125, 129, 132, 136, 149, 154, 158, 159
 - niekwadratowa, 5, 7, 10, 13–17, 19, 27, 30, 31, 33, 34, 36, 39, 40, 43, 47, 51, 56, 58, 80–83, 98, 103, 105, 144, 145, 152, 166, 175
 - nieparzysta, 28, 39, 57, 62, 125, 127–129, 132–134, 158, 160
 - niewymierna, 7, 11, 12, 27, 35
 - parzysta, 28, 39, 40, 52, 65, 81, 83, 178
 - pierwsza, 31, 39, 40, 50, 51, 54, 61, 64, 107–111, 119, 178
 - postaci $x^2 + 1$, 39, 122, 123, 125, 126, 130, 132, 150, 155, 162–165
 - postaci $x^2 - 1$, 6, 29, 123, 126, 130, 155, 184
 - prostokątna, 134
 - rzeczywista, 7, 10, 53, 79, 91, 104, 156
 - specjalna, 177, 178
 - trójkątna, 123, 129, 130, 132, 134, 135
 - wymierna, 6, 7, 27, 28, 51, 83, 106, 155, 175
- liczby względnie pierwsze, 27, 30, 40, 52, 64, 67, 68, 70, 71, 73, 76, 77, 79, 83, 84, 103–105, 108, 111, 113, 116, 119, 127, 128, 163, 175, 176
- macierz, 14, 34, 61, 62, 91, 93, 94, 98
 - odwrotna, 91
- Maple, 1, 23, 26, 31, 37, 64, 66–78, 84, 98, 142, 171, 178, 179
- min, 48, 49, 59
- nierówność, 8, 10, 11, 30, 34, 47, 48, 94, 96, 156, 163, 169, 177, 178
- norma, 7, 8, 12, 13, 33–35, 43, 53, 54, 56
- nwd, 2, 36, 52–54, 103–105, 176, 177, 182, 183
- nww, 2
- oblong numbers, 134
- obraz, 159
- okres, 27–29, 39
- Olimpiada Matematyczna
 - Australia, 136, 162
 - Brazylia, 144
 - Indie, 176
 - Iran, 136
 - Łotwa, 136
 - St Petersburg, 125

- para liczb wymiernych, 6, 106
- pierścień, 116, 119
- $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, 7, 8, 43, 53, 54
 - $\mathbb{Z}[t]$, 16, 159
 - \mathbb{Z}_m , 53, 109, 116, 119
 - skończony, 107
- pochodna, 107, 108
- podciało, 7
- podpierścień, 7
- podzbiór, 7, 79, 109
- podzielność, 14, 17, 35, 53, 54, 70, 121, 156
- przez 3, 50, 110, 153, 160
 - przez 4, 30, 39, 40, 52, 64, 173
 - przez 6, 137
 - przez 7, 160
 - przez 8, 112–115, 117
 - przez 9, 74, 131
 - przez 12, 137
 - przez 14, 84
 - przez liczbę pierwszą, 15, 39, 51, 117, 128
- potęga
- dwójki, 112, 113, 116, 117, 160
 - liczby pierwszej, 107, 110, 111, 116, 118, 119
 - piątki, 159
 - trójki, 159, 160
- produkt pierścieni, 116
- pytanie, 135, 137, 157, 168, 179
- redukt, 27, 39
- relacja typu równoważności, 44, 93
- reprezentant
- bazowy, 47, 49, 50, 57, 58
 - kanoniczny, 58, 59
- reszta, 12, 53, 109
- równania równoważne, 130, 132, 135, 150, 153
- równanie,
- $x^2 - 2y^2 = -1$, 37, 38, 40, 62, 63, 123, 131–134, 157, 158
 - $x^2 - 2y^2 = 1$, 61, 63, 78, 122, 123, 127, 128, 151, 152, 158
 - $x^2 - 2y^2 = c$, 45, 52, 56, 58, 63–67, 110, 124, 127, 128, 147, 151, 158
 - $x^2 - 3y^2 = -1$, 33, 43, 68
 - $x^2 - 3y^2 = 1$, 68, 123, 124, 138, 146, 154, 155
 - $x^2 - 3y^2 = c$, 50, 51, 68, 69, 109, 110, 134, 141, 143, 147
 - $x^2 - 5y^2 = c$, 37, 38, 70, 71, 78, 98, 110, 146, 148–150, 153, 156, 157
 - $x^2 - 6y^2 = c$, 52, 58, 71, 72, 110, 119, 132, 137, 138, 154, 155
 - $x^2 - 7y^2 = c$, 73, 74, 110, 142
 - $x^2 - 8y^2 = c$, 52, 55, 74, 75, 78, 110, 129–132
 - $x^2 - 10y^2 = c$, 37, 38, 75, 76, 98, 121, 134
 - $x^2 - 11y^2 = c$, 77, 78
 - $x^2 - 12y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 15y^2 = c$, 160
 - $x^2 - 17y^2 = c$, 37, 38, 51, 78
 - $x^2 - 18y^2 = c$, 119
 - $x^2 - 19y^2 = c$, 28, 29
 - $x^2 - 20y^2 = c$, 134
 - $x^2 - 24y^2 = c$, 129
 - $x^2 - 26y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 28y^2 = 1$, 158
 - $x^2 - 29y^2 = c$, 29, 37, 38
 - $x^2 - 32y^2 = c$, 125
 - $x^2 - 34y^2 = c$, 40, 115
 - $x^2 - 37y^2 = c$, 37, 38, 115
 - $x^2 - 41y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 48y^2 = c$, 125
 - $x^2 - 50y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 53y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 58y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 61y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 65y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 73y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 74y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 79y^2 = c$, 115
 - $x^2 - 82y^2 = c$, 37, 38, 59, 115
 - $x^2 - 85y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 89y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 97y^2 = c$, 37, 38
 - $x^2 - 99y^2 = c$, 115
 - $x^2 - dy^2 = p$, 51, 64
 - $x^2 - py^2 = c$, 15, 40, 55
 - $x^4 - dy^2 = c$, 31, 51
 - $x^4 - dy^4 = c$, 31
 - Bhaskara, 18
 - Fermata, 18
 - Pella, 3, 5
 - Pitagorasa, 6, 119
- rozkład kanoniczny, 2, 39
- rozwiązania równoważne, 93
- rozwiązanie, 5
- całkowite, 5
 - kongruencji, 107–113, 115
 - naturalne, 3, 5
 - najmniejsze, 9, 13, 23, 29, 30, 34
 - nieparzyste, 57, 62, 125, 131–134, 157
 - pierwotne, 52, 53, 55, 103–105, 127, 128
 - wymierne, 5, 6, 51, 106
- rząd grupy, 116–119
- silnia, 156
- sprzężenie, 8, 14, 42, 45

- suma
kwadratów, 39, 40, 123, 125, 132
liczb trójkątnych, 132
mnogościowa, 44, 53, 55, 104, 105
- symbol
Legendre'a, 39, 114
Newtona, 14, 156, 157
- sześcian liczby naturalnej, 16, 36, 61, 62, 117, 129, 151–154, 169, 170
- trójkąt
Heron, 155
Pitagorasa, 127, 128, 135
- trójka liczb całkowitych, 67, 78, 122, 125, 127, 128, 132, 133
- twierdzenie
chińskie o resztach, 108, 116
Gaussa, 144, 145, 152, 166
Lagrange'a, 27
Mordella, 152, 153
- układ równań, 40, 67, 78, 135, 143, 145
- ułamek łańcuchowy, 7, 10, 14, 27, 28, 39
- warunki równoważne, 8, 9, 39, 44, 56, 63, 64, 80, 84, 90, 92, 93, 118, 127, 144, 155
- wielomian, 5, 27, 107, 108, 144, 157, 159, 161, 166, 169
Czebyszewa, 16
liniowy, 161, 162
moniczny, 168
trójmian kwadratowy, 27, 110–112, 167, 168, 170, 174, 175
z symetrycznymi współczynnikami, 168
- wyznacznik, 14, 34, 91
- wzór Herona, 155
- zasada szufladkowa Dirichleta, 10
- zbiór
 \mathbb{N}_0 , 1, 16, 35, 49, 50, 55, 65, 83, 95–97, 105, 137, 139, 141, 142
klas abstrakcji, 44, 45, 47, 49, 58, 59
liczb całkowitych, 1, 7, 53, 104
liczb naturalnych, 1, 5, 12, 27
liczb pierwszych, 1, 61
liczb rzeczywistych, 1, 7, 10, 79
liczb wymiernych, 1, 7, 54, 106
liczb zespolonych, 1
nieograniczony, 11
nieskończony, 6, 13, 14, 28, 33, 35, 46, 47, 55, 56, 64, 65, 89–92, 121, 123, 125–129, 131, 132, 137, 138, 140–142, 144, 152, 153, 155–158