Podróże po Imperium Liczb

Część 14. Równanie Pella

Rozdział 9

9. Zastosowania równania Pella

Andrzej Nowicki 10 kwietnia 2013, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

9 Zastosowania równania Pella

9.1 Liczby kwadratowe

9.1.1. *Jeśli a i b są takimi liczbami naturalnymi, że ab nie jest liczbą kwadratową, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczby*

$$an + 1 \quad i \quad bn + 1$$

są kwadratowe.

D. Równanie $x^2 - aby^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (x, y) będzie dowolnym jego rozwiązaniem naturalnym i niech $u = x + ay$, $v = x + by$. Wtedy $bu^2 - av^2 = b - a$ i dla $n = ((a + b)y + 2x)y$ zachodzą równości

$$an + 1 = u^2, \quad bn + 1 = v^2.$$

Takich n jest oczywiście nieskończenie wiele. ⊠

9.1.2. *Szczególne przypadki faktu* 9.1.1.

(1) *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczby*

$$2n + 1 \quad i \quad 3n + 1$$

są kwadratowe. Każde takie n jest podzielne przez 40. ([Mon] z.E206, [ME] 6(3)(2001)).

(2) *Znaleźć najmniejszą taką liczbę naturalną n, że liczby*

$$19n + 1 \quad i \quad 95n + 1$$

są kwadratowe. Odp. $n = 134232$. ([IMO] 1995, [ME] 7(1)(2002))

9.1.3. *Liczba* 361 *jest kwadratowa* $(= 19^2)$ *i po skreśleniu ostatniej cyfry znowu mamy liczbę kwadratową. Tego rodzaju liczb kwadratowych istnieje nieskończenie wiele.* ([Kw] 4(2002) s.11).

D. Problem sprowadza się do zbadania równania postaci

$$x^2 - 10y^2 = a,$$

gdzie $a \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$. Tylko dla $a = 5$ równanie to nie ma naturalnych rozwiązań. W pozostałych przypadkach rozwiązań naturalnych istnieje nieskończenie wiele.

Przykłady minimalnych rozwiązań:

dla $a = 1$, $(x, y) = (19, 6)$;

dla $a = 4$, $(x, y) = (28, 12)$;

dla $a = 6$, $(x, y) = (4, 1), (16, 5)$;

dla $a = 9$, $(x, y) = (7, 2), (13, 4), (57, 18)$. ⊠

9.1.4. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (x, y) takich, że wszystkie liczby*

$$x + y, \quad x - y, \quad xy + 1$$

są kwadratowe. ([S59]).

D. ([S59] 94). Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (t, u) spełniających równość

$$t^2 - 15u^2 = 1.$$

Niech (t, u) będzie jedną z takich par i niech

$$x = 4(t^2 + 8tu + 17u^2), \quad y = 8u(t + 4u).$$

Wtedy: $x + y = (2t + 10u)^2$, $x - y = (2t + 6u)^2$ oraz $xy + 1 = (64u^2 + 16tu + 1)^2$. ⊠

9.1.5. *Istnieje nieskończenie wiele trójek parami różnych liczb naturalnych (x, y, z) takich, że wszystkie liczby*

$$xy - 1, \quad yz - 1, \quad zx - 1$$

są kwadratowe.

D. ([Kw] 4/2002 s.56). Równanie $u^2 - 2v^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Jeśli (u, v) jest dowolnym jego rozwiązaniem naturalnym, to trójka

$$(x, y, z) = (1, 2, v^2 + 1)$$

posiada rozpatrywaną własność. ⊠

Jeśli trójka liczb naturalnych (x, y, z) posiada powyższą własność, to zbiór $\{x, y, z\}$ nazywany jest $D(-1)$-zbiorem. Zbiorami tego typu zajmowaliśmy się w [N-3].

Korzystając z pewnych równań typu Pella można udowodnić:

9.1.6. *Dla każdej liczby naturalnej a, układ równań*

$$xy - 1 = a^2, \quad yz - 1 = u^2, \quad zx - 1 = v^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych (x, y, z, u, v). ([Kw] 4/2002 s.6).

D. ([Kw] 4/2002 s.56). Szukamy rozwiązań przyjmując $x = 1$. Przy tym założeniu $y = a^2 + 1$ oraz $x = v^2 + 1$ i problem sprowadza się do równania

$$(a^2 + 1)(v^2 + 1) = u^2 + 1,$$

o którym wiadomo (udowodnimy to w 9.3.1), że ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ⊠

★ A. McBride, *Remarks on Pell's equation and square root algorithms*, [MG] 83 496(1999) 47-52.

---

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
9.2 Sumy kwadratów
ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.2.1. *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że każda z trzech liczb n, $n+1$ oraz $n+2$ jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.*

D. ([ME] 6(3)(2001)). Równanie $x^2 - 2y^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (x, y) będzie dowolnym jego rozwiązaniem naturalnym. Niech $n = x^2 - 1$. Wtedy

$$n = 2y^2 = y^2 + y^2, \quad n + 1 = x^2 + 0^2, \quad n + 2 = x^2 + 1^2.$$

Inne dowody są w [N-3]. ⊠

9.2.2. *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że każda z czterech liczb: n, $n+1$, $n+2$ oraz $n+3$ jest sumą kwadratów trzech liczb całkowitych.*

D. Równanie $x^2 - 3y^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (x, y) będzie dowolnym jego rozwiązaniem naturalnym. Niech $n = x^2 - 1$. Wtedy $n = 3y^2 = y^2 + y^2 + y^2$, $n + 1 = x^2 + 0^2 + 0^2$, $n + 2 = x^2 + 1^2 + 1^2$, $n + 3 = x^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. ⊠

9.2.3. *Równanie $x^2+y^2 = z^4$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.* ([Kw] 3(2002) s.6).

D. Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych u, v, że $u^2 - 2v^2 = -1$. Liczby $x = u$, $y = v^2 - 1$, $z = v$ spełniają dane równanie. ⊠

9.2.4. *Nie ma takich trzech kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest liczbą kwadratową.*

D. Równanie $(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = y^2$, po przekształceniu, sprowadza się do równania $y^2 - 3x^2 = 2$, które nie ma rozwiązań naturalnych. ⊠

9.2.5. *Dla danej liczby naturalnej n rozpatrzmy równanie*

$$(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + \cdots + (x + n)^2 = y^2.$$

(1) *Jeśli $3 \leqslant n \leqslant 10$, to równanie to nie ma rozwiązań naturalnych.*

(2) *Dla $n = 11$ równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.*

(3) *Jeśli dla pewnego n istnieje rozwiązanie naturalne, to takich naturalnych rozwiązań jest nieskończenie wiele.*

(4) *Jeśli n jest postaci $3k^2 - 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to rozważane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.* ([Kw] 3(2002) s.7, 4(2002) 5-6).

D. Dane równanie, po przekształceniu, sprowadza się do równania

$$u^2 - ny^2 = -\frac{1}{12}n^2(n + 1)(n - 1),$$

gdzie $u = nx + \frac{1}{2}n(n + 1)$. Tezy wynikają więc łatwo z podstawowych faktów dotyczących rozwiązań naturalnych równań postaci $x^2 - dy^2 = c$. ⊠

9.2.6. *Dla każdej liczby całkowitej a, równanie*

$$x^2 + y^2 = a + z^2$$

ma nieskończnenie wiele rozwiązań naturalnych.

D. Przypadek 1. Załóżmy, że a jest liczbą nieparzystą. Niech $a = 2m+1$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$. Rozpatrzmy równanie Pella

$$u^2 - 2z^2 = -m^2 + 2m + 1$$

i zauważmy, że to równanie ma rozwiązanie całkowite; takim rozwiązaniem jest na przykład para $(u, z) = (m + 1, m)$. Skoro jedno rozwiązanie całkowite istnieje, to takich rozwiązań całkowitych istnieje nieskończenie wiele (gdyż jest to równanie Pella). Niech (u, z) będzie dowolnym rozwiązaniem całkowitym tego równania. Wtedy liczby u oraz $m+1$ są tej samej parzystości, a zatem $u = 2x+m+1$ dla pewnej liczby całkowitej x i mamy równość $(2x+m+1)^2-2z^2 = -m^2+2m+1$. Po przekształceniu otrzymujemy równość $x^2+(x+m+1)^2 = a+z^2$, z której wynika, że trójka $(x, y, z) = (x, x+m+1, z)$ jest rozwiązaniem całkowitym równania $x^2 + y^2 = a + z^2$.

Przypadek 2. Załóżmy, że a jest liczbą parzystą. Niech $a = 2m + 2$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$. Rozpatrzmy równanie Pella

$$u^2 - 2z^2 = -m^2 + 4m + 4$$

i zauważmy, że to równanie ma rozwiązanie całkowite; takim rozwiązaniem jest na przykład para $(u, z) = (m + 2, m)$. Skoro jedno rozwiązanie całkowite istnieje, to takich rozwiązań całkowitych istnieje nieskończenie wiele (gdyż jest to równanie Pella). Niech (u, z) będzie dowolnym rozwiązaniem całkowitym tego równania. Wtedy liczby u oraz m są tej samej parzystości, a zatem $u = 2x + m$ dla pewnej liczby całkowitej x i mamy równość $(2x + m)^2 - 2z^2 = -m^2 + 4m + 4$. Po przekształceniu otrzymujemy równość $x^2 + (x + m)^2 = a + z^2$, z której wynika, że trójka $(x, y, z) = (x, x + m, z)$ jest rozwiązaniem całkowitym równania $x^2 + y^2 = a + z^2$. ⊠

Z powyższego stwierdzenia wynika:

9.2.7. *Każdą liczbę całkowitą a można (i to na nieskończenie wiele sposobów) przedstawić w postaci $a = x^2 + y^2 - z^2$, gdzie $x, y, z \in \mathbb{Z}$.*

9.2.8. *Trójki liczbowe*

$$(1, 24, 120), \quad (2, 34, 47), \quad (5, 20, 44),$$

są przykładami takich trójek (a, b, c), dla których wszystkie trzy liczby $a + b$, $b + c$ oraz $c + a$ są kwadratowe. Tego rodzaju trójek istnieje nieskończenie wiele.

Ponadto, dla każdej liczby naturalnej a istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (b, c) takich, że $a + b$, $b + c$, $c + a$ są liczbami kwadratowymi.

D. Niech $a \in \mathbb{N}$ i rozpatrzmy równanie $x^2 + y^2 = 2a + z^2$. Wiemy (patrz 9.2.6), że ro równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (x, y, z) będzie dowolnym takim jego rozwiązaniem naturalnym, że liczby x, y są większe od $\sqrt{a}$. Przyjmujemy $b = x^2-a$ oraz $c = y^2 - a$ i mamy: $a + b = x^2$, $a + c = y^2$ oraz $b + c = x^2 + y^2 - 2a = z^2$. ⊠

Ze stwierdzenia 9.2.6 wynika w szczególności, że równanie $x^2+y^2 = 1+z^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. W tym przypadku jest to oczywiste. Możemy rozważyć na przykład tylko takie rozwiązania (x, y, z), że $z = 2y$. Mamy wtedy równanie Pella $x^2-3y^2 = 1$, o którym wiemy, że ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.

9.2.9. *Równanie $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ ma nieskończenie wiele takich rozwiązań naturalnych (x, y, z), w których wszystkie liczby x, y, z są nieparzyste.* ([S62]).

D. Sposób I. (R.V. Iyer 1957). Rozpatrzmy równanie Pella $u^2 - 32v^2 = 1$. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych (u, v) i w każdym rozwiązaniu liczba u jest nieparzysta. Dla każdego takiego rozwiązania (u, v) oznaczmy: $x = 3u$, $y = 36u^2 - 1$, $z = 36u^2 + 1$. Wtedy x, y, z są liczbami nieparzystymi i zachodzi równość $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

Sposób II. (W. Sierpiński 1962). Rozpatrzmy równanie Pella $u^2 - 48v^2 = 1$. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych (u, v) i w każdym rozwiązaniu liczba u jest nieparzysta. Dla każdego takiego rozwiązania (u, v) oznaczmy: $x = 5u$, $y = 100u^2 - 1$, $z = 100u^2 + 5$. Wtedy x, y, z są liczbami nieparzystymi i zachodzi równość $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. ⊠

★ R. V. Iyer, *Pell's equation and* $u^2 + v^2 = w^2 + 1$, Scripta Math. 23(1957) s.213.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.3 Liczby postaci $\mathbf{x^2 \pm 1}$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.3.1.
$$\begin{array}{lcllcl}
(1^2+1)(2^2+1) &=& (3^2+1), & (1^2+1)(12^2+1) &=& (17^2+1),\\
(2^2+1)(3^2+1) &=& (7^2+1), & (2^2+1)(8^2+1) &=& (18^2+1),\\
(3^2+1)(4^2+1) &=& (13^2+1), & (3^2+1)(18^2+1) &=& (57^2+1).
\end{array}$$

Tego rodzaju równości istnieje nieskończenie wiele. Dokładniej, dla każdej liczby naturalnej a istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (x, y) takich, że

$$(a^2 + 1)(y^2 + 1) = (x^2 + 1).$$

([OM] St Petersburg 1997, [Barb] s.19).

D. ([Barb] s.148). Rozważane równanie po przekształceniu jest postaci

$$x^2 - (a^2 + 1)y^2 = a^2.$$

Para $(a, 0)$ jest rozwiązaniem całkowitym tego równania. Ponieważ $a^2 + 1$ nie jest liczbą kwadratową (patrz 2.3.2), więc równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ⊠

Równanie $(a^2+1)(y^2+1) = x^2+1$ po redukcji sprowadza się do równania $a^2y^2+a^2+y^2 = x^2$. Udowodniliśmy zatem:

9.3.2. *Istnieje nieskończenie wiele trójek liczb naturalnych (x, y, z) takich, że*

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 = z^2.$$

Dla każdej liczby naturalnej x istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (y, z) spełniających powyższe równanie.

9.3.3.
$$\begin{array}{lcllcl}
(1^2+1)(7^2+1) &=& 10^2, & (1^2+1)(41^2+1) &=& 58^2,\\
(2^2+1)(38^2+1) &=& 85^2, & (7^2+1)(41^2+1) &=& 290^2.
\end{array}$$

Tego rodzaju równości istnieje nieskończenie wiele. Dla każdej liczby naturalnej a istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (x, y) takich, że

$$(a^2 + 1)(x^2 + 1) = y^2.$$

([Kw] 4/2002 s.6).

D. Dla danej liczby naturalnej a rozpatrzmy równanie

$$u^2 - (a^2+1)v^2 = -1.$$

Para $(u,v) = (a,1)$ jest rozwiązaniem naturalnym tego równania. Ponieważ a^2+1 nie jest liczbą kwadratową, więc równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (u,v) będzie dowolnym rozwiązaniem naturalnym tego równania i niech $x = u$, $y = (a^2+1)v$. Wtedy

$$(a^2+1)(x^2+1) = (a^2+1)(u^2+1) = (a^2+1)(a^2+1)v^2 = y^2. \quad \boxtimes$$

9.3.4. *Dla każdej liczby naturalnej a równanie*

$$(a^2+1)(x^2+1) = y^2 - 1$$

nie ma żadnych rozwiązań całkowitych. ([Kw] 4/2002).

9.3.5.
$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
(2^2-1)(3^2-1) &=& (5^2-1), & (2^2-1)(11^2-1) &=& (19^2-1),\\
(3^2-1)(4^2-1) &=& (11^2-1), & (3^2-1)(11^2-1) &=& (31^2-1),\\
(4^2-1)(5^2-1) &=& (19^2-1), & (4^2-1)(23^2-1) &=& (89^2-1).
\end{array}$$

Tego rodzaju równości istnieje nieskończenie wiele. Dla każdej liczby naturalnej $a \geqslant 2$ istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (x,y) takich, że

$$(a^2-1)(x^2-1) = (y^2-1).$$

([Kw] 4/2002).

D. Równaie $(a^2-1)(x^2-1) = y^2-1$ po przekształceniu jest postaci

$$y^2 - (a^2-1)x^2 = -a^2+2$$

i para $(1,1)$ jest jego rozwiązaniem naturalnym. Ponieważ a^2-1 nie jest liczbą kwadratową (patrz 2.3.2), więc równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. $\boxtimes$

9.3.6.
$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
(2^2-1)(7^2-1) &=& 12^2, & (2^2-1)(26^2-1) &=& 45^2,\\
(3^2-1)(17^2-1) &=& 48^2, & (3^2-1)(99^2-1) &=& 280^2.
\end{array}$$

Tego rodzaju równości istnieje nieskończenie wiele. Dla każdej liczby naturalnej $a \geqslant 2$ istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (x,y) takich, że

$$(a^2-1)(x^2-1) = y^2.$$

([Kw] 4/2002).

D. Równaie $(a^2-1)(x^2-1) = y^2$ po przekształceniu jest postaci

$$y^2 - (a^2-1)x^2 = -a^2+1$$

i para $(x,y) = (1,0)$ jest jego rozwiązaniem naturalnym. Ponieważ a^2-1 nie jest liczbą kwadratową, więc równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. $\boxtimes$

9.3.7. *Dla każdej liczby naturalnej a każde z dwóch równań*

$$(a^2-1)(x^2+1) = y^2-1 \quad \textit{oraz} \quad (a^2+1)(x^2-1) = y^2-1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ([Kw] 4/2002).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.4 Trójki Pitagorasa

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.4.1. *Istnieje nieskończenie wiele trójkątów Pitagorasa, których długości przyprostokątnych różnią się o* 1. *Innymi słowy, równanie*

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Każde rozwiązanie naturalne tego równania jest postaci (x_n, y_n), *gdzie*

$$x_1 = 3, \ y_1 = 5, \ x_{n+1} = 3x_n + y_n + 1, \ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2 \quad dla\ n \in \mathbb{N}.$$

Początkowe przykłady rozważanych trójkątów:

$$(3,4,5), \ (20,21,29), \ (119,120,169), \ (696.697,985), \ (4059.4060,5741).$$

([S88] 42, [Kw] 3(2002) s.5, [Barb] 11).

D. Powyższe równanie, po przekształceniu, jest postaci

$$(2x+1)^2 - 2y^2 = -1$$

. Przyjmując $u = 2x+1$, $v = y$, otrzymujemy równanie Pella

$$u^2 - 2v^2 = 1,$$

które ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Oczywiście w każdym naturalnym rozwiązaniu (u, v), liczba u jest nieparzysta. Teza wynika natychmiast ze znanego nam opisu wszystkich rozwiązań naturalnych równania $u^2 - 2v^2 = 1$. ⊠

9.4.2. *Nie istnieje żaden pierwotny trójkąt pitagorejski, w którym długości przyprostokątnych różnią się o* 2. *Innymi słowy, równanie*

$$x^2 + (x+2)^2 = y^2$$

nie ma względnie pierwszych rozwiązań naturalnych.

9.4.3. *Niech r będzie nieparzystą liczbą naturalną. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Istnieje trójkąt pitagorejski pierwotny, w którym różnica przyprostokątnych wynosi r.*

(2) *Istnieje nieskończenie wiele trójkątów pitagorejskich pierwotnych, w których różnica przyprostokątnych wynosi r.*

(3) *Równanie $x^2 - 2y^2 = r^2$ ma rozwiązanie pierwotne.*

(4) *Równanie $x^2 - 2y^2 = -r^2$ ma rozwiązanie pierwotne.*

D. Rozpatrzmy równanie $x^2 + (x+r)^2 = y^2$. Po pomnożeniu obu stron tego równania przez 2 i po przekształceniu, otrzymujemy równanie $(2x+r)^2 + r^2 = 2y^2$, czyli równanie

$$u^2 - 2v^2 = -r^2,$$

gdzie $u = 2x + r$, $v = y$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Załóżmy, że istnieje pierwotny trójkąt pitagorejski, w którym długości przyprostokątnych różnią się o r. Wtedy istnieje para (x, y) względnie pierwszych liczb naturalnych takich, że

$$x^2 + (x+r)^2 = y^2.$$

Przyjmijmy $u = 2x + r$, $v = y$. Wtedy $u^2 - 2v^2 = -r^2$. Przypuśćmy, że $p \mid u$, $p \mid v$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Wtedy $p \mid r^2$, więc $p \mid r$ i stąd wynika, że $p \geqslant 3$ (gdyż r jest nieparzyste). Ponadto, $p \mid 2x = u - r$, więc $p \mid x$ oraz $p \mid y = v$. Otrzymaliśmy sprzeczność z tym, że $\mathrm{nwd}(x, y) = 1$. Para (u, v) jest więc rozwiązaniem pierwotnym równania

$$u^2 - 2v^2 = -r^2.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) Załóżmy, że para (u, v) jest rozwiązaniem pierwotnym równania $u^2 - 2v^2 = -r^2$. Wtedy takich rozwiązań pierwotnych istnieje nieskończenie wiele (o czym wiemy z przedstawionej wcześniej teorii). Możemy więc założyć, że $u > r$. Ponieważ r jest nieparzyste i $u^2 - 2v^2 = -r^2$, więc u również jest nieparzyste. Niech $u = 2x + r$, $v = y$. Wtedy $x, y \in \mathbb{N}$ oraz

$$x^2 + (x+r)^2 = y^2.$$

Ponadto jest oczywiste, że $\mathrm{nwd}(x, y) = 1$.

Pozostałe implikacje wynikają natychmiast ze znanych własności rozwiązań pierwotnych rónania $x^2 - 2y^2 = -r^2$. ⊠

U. Elementarny dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2), w którym nie korzysta się z równań Pella, znajduje się w [S59] 65. ⊠

9.4.4. *Istnieje nieskończenie wiele par $((a, b, c), (p, q, r))$ pierwotnych trójek Pitagorasa takich, że wszystkie liczby*

$$|a - p|, \quad |b - q|, \quad |c - r|$$

należą do zbioru $\{3, 4\}$. ([Mon] 9/2000, z.10704).

D. ([Barb] s.12, 140). Niech $a^2 + b^2 = c^2$, $p^2 + q^2 = r^2$, gdzie $p = a + 3$, $q = b + 3$, $r = c + 4$. Chcemy by spełniona była równość $3a + 3b + 1 = 4c$. Niech

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2).$$

Otrzymujemy wtedy równość

$$(m - 3n)^2 - 2n^2 = 1.$$

Kładąc $x = m - 3n$ i $y = n$, mamy równanie Pella $x^2 - 2y^2 = 1$. ⊠

★ A. Grytczuk, F. Luca, M. Wójtowicz, *The negative Pell equation and Pythagorean triples*, [Pjap] 76(2000) 91-94.

K. Matthews, *Primitive Pythagorean triples and the negative Pell equation*, preprint.

W. Sierpiński *Integral solutions of the equation $x^2 + y^2 = z^2$ for which $x - y = \pm 1$*, [S88] 42-46.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.5 Liczby trójkątne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Liczbami trójkątnymi nazywamy liczby postaci

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + n.$$

9.5.1. *Istnieje nieskończenie wiele kwadratowych liczb trójkątnych. Przykłady:*

$$t_1 = 1^2, \quad t_8 = 6^2, \quad t_{49} = 35^2, \quad t_{288} = 204^2, \quad t_{1681} = 1189^2.$$

D. Równanie $x^2 - 8y^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (x, y) będzie dowolnym jego rozwiązaniem naturalnym. Wtedy x jest liczbą nieparzystą. Niech $x = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy: $t_n = \frac{1}{2}n(n+1) = y^2$. Inne dowody są w [N-8]. ⊠

Korzystając z powyższego faktu, łatwo udowodnić:

9.5.2. *Równanie $x^2 + y^3 = z^4$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.*

D. ([ME] 6(3)(2001)). Niech n, u będą takimi liczbami naturalnymi, że $t_n = u^2$. Wiemy (patrz 9.5.1), że takich n i y jest nieskończenie wiele. Z równości

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = t_n^2$$

wynika, że $x^2 + y^3 = z^4$ dla $x = t_{n-1}$, $y = n$, $z = u$. ⊠

9.5.3. *Istnieje nieskończenie wiele liczb trójkątnych postaci $3y^2$, gdzie $y \in \mathbb{N}$.*

D. Równanie $x^2 - 24y^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (x, y) będzie dowolnym jego rozwiązaniem naturalnym. Wtedy x jest liczbą nieparzystą. Niech $x = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy: $t_n = \frac{1}{2}n(n+1) = 3y^2$. ⊠

9.5.4. *Niech m będzie liczbą naturalną. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *istnieje co najmniej jedna liczba trójkątna postaci my^2, gdzie $y \in \mathbb{N}$;*

(2) *istnieje nieskończenie wiele liczb trójkątnych postaci my^2, gdzie $y \in \mathbb{N}$;*

(3) *liczba m nie jest podwojonym kwadratem liczby naturalnej.* ([S62] 30).

D. Niech $t_n = my^2$. Wtedy $n(n+1) = 2my^2$, $4n^2 + 4n = (8m)y^2$, $(2n+1)^2 - (8m)y^2 = 1$. Problem sprowadza się więc do problemu istnienia rozwiązań naturalnych równania

$$x^2 - (8m)y^2 = 1.$$

Równanie to ma rozwiązanie naturalne wtedy i tylko wtedy, gdy $8m$ nie jest liczbą kwadratową, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy m nie jest podwojonym kwadratem liczby naturalnej. Jeśli ten warunek jest spełniony to

$$x^2 - (8m)y^2 = 1$$

jest równaniem Pella. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych i w każdym rozwiązaniu naturalnym (x, y) liczba x jest nieparzysta. ⊠

9.5.5. *Istnieje nieskończenie wiele liczb trójkątnych postaci $y^2 - 1$, gdzie $y \in \mathbb{N}$.* ([S62] 31).

D. Należy wykazać, że równanie $t_x = y^2 - 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Równanie to po przekształceniu sprowadza się do równania $(2x+1)^2 - 8y^2 = -7$, czyli do równania

$$u^2 - 8v^2 = -7$$

z nieparzystą niewiadomą u. Para $(u, v) = (1, 1)$ jest rozwiązaniem naturalnym równania $u^2 - 8v^2 = -7$, a zatem (patrz 4.0.2) to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Jest ponadto oczywiste, że każde jego rozwiązanie naturalne (u, v) ma nieparzystą liczbę u. Zatem równanie $t_x = y^2 - 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ⊠

9.5.6. *Istnieje nieskończenie wiele liczb trójkątnych postaci $y^2 + 1$, gdzie $y \in \mathbb{N}$.* ([S62] 31).

D. Równanie $t_x = y^2 + 1$ przekształcamy i (podobnie jak w poprzednim dowodzie) otrzymujemy równanie

$$u^2 - 8v^2 = 9,$$

które ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych i w każdym rozwiązaniu naturalnym (u, v) liczba u jest nieparzysta. ⊠

9.5.7. *Istnieje nieskończenie wiele liczb trójkątnych postaci $y^2 + 3$, gdzie $y \in \mathbb{N}$.* ([S62] 31).

D. Rozpatrzmy równanie $x^2 - 8y^2 = 25$. Ponieważ

$$15^2 - 8 \cdot 5^2 = 25,$$

więc równanie to ma rozwiązanie naturalne. Skoro ma jedno, to takich rozwiązań ma nieskończenie wiele (patrz 4.0.2). Niech (x, y) będzie dowolnym rozwiązaniem naturalnym tego równania. Wtedy x jest liczbą nieparzystą. Niech $x = 2n + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy:

$$t_n = \frac{1}{8}(4n^2 + 4n + 1 - 1) = \frac{1}{8}(x^2 - 1) = \frac{1}{8}(8y^2 + 24) = y^2 + 3.$$

Liczba trójkątna t_n jest więc postaci $y^2 + 3$ i takich liczb trójkątnych jest nieskończenie wiele. ⊠

9.5.8. *Niech $a \in \mathbb{Z}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Istnieje co najmniej jedna para liczb naturalnych (x, y) taka, że $t_x = y^2 + a$.*

(2) *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (x, y) takich, że $t_x = y^2 + a$.*

(3) *Równanie*

$$x^2 - 8y^2 = 8a + 1$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie naturalne.

D. Przekształcamy kolejno równanie $t_x = y^2 + a$:

$$\frac{x(x+1)}{2} = y^2 + a, \quad 4x^2 + 4x = 8y^2 + 8a, \quad (2x+1)^2 = 8y^2 + 8a + 1$$

i otrzymujemy równoważne równanie

$$u^2 - 8v^2 = 8a + 1,$$

w którym $u = 2x + 1$ oraz $v = y$. Teza wynika zatem z 4.0.2. ⊠

Z powyższego twierdzenia wynika:

9.5.9. *Jeśli* $a \in \{-10, -9, -8, -6, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10\}$, *to równanie*

$$t_x = y^2 + a$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Jeśli $a \in \{-7, -5, -2, 4, 7, 13\}$, *to równanie*

$$t_x = y^2 + a$$

nie ma rozwiązań naturalnych.

9.5.10. *Niech* $a \in \mathbb{Z}$. *Jeśli* $a \equiv 4 \pmod 9$ *lub* $a \equiv 7 \pmod 9$, *to równanie*

$$t_x = y^2 + a$$

nie ma żadnego rozwiązania naturalnego.

D. Niech $c = 8a + 1$. Jeśli $a \equiv 4 \pmod 9$ lub $a \equiv 7 \pmod 9$, to $c \equiv 6 \pmod 9$ lub $c \equiv 3 \pmod 9$ i wtedy, na mocy 5.7.2, równanie

$$x^2 - 8y^2 = c$$

nie ma rozwiązań całkowitych. Wystarczy zatem skorzystać z 9.5.8. ⊠

9.5.11. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych* (k, m) *takich, że* $k < m$ *oraz*

$$\Big(1 + 2 + \cdots + k\Big) = \Big((k+1) + (k+2) + \cdots + m\Big).$$

Każda taka para powstaje z rozwiązań naturalnych równania

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

i równości $x = 2m + 1$, $y = 2k + 1$.

D. ([ME] 6(3)(2001)). Rozważana równość jest postaci

$$\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}m(m+1) - \frac{1}{2}k(k+1),$$

czyli $2k(k+1) = m(m+1)$. Mnożąc stronami przez 4, otrzymujemy

$$x^2 - 2y^2 = -1,$$

gdzie $x = 2m+1$, $y = 2k+1$. Równanie $x^2 - 2y^2 = -1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych i każde rozwiązanie naturalne składa się z dwóch liczb nieparzystych (patrz 5.1.6). ⊠

9.5.12. *Istnieje nieskończenie wiele par* (k, m), *liczb naturalnych takich, że*

$$k > m \quad \textit{oraz} \quad k + (k+1) + \cdots + m = km.$$

([Barb] s.17).

D. Rozważana równość jest postaci

$$x^2 - 2y^2 = -1,$$

gdzie $x = 2m + 1$, $y = 2k + 1$. ⊠

9.5.13. *Istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb tójkątnych, których suma jest liczbą kwadratową.* ([Barb] s.17).

D. Równość $t_{n-1} + t_n + t_{n+1} = x^2$, po pomnożeniu stronami przez 16, sprowadza się do równości

$$(4x)^2 - 6(2n + 1)^2 = 10.$$

Teza wynika z własności rozwiązań naturalnych równania $x^2 - 6y^2 = 10$. ⊠

9.5.14. *Istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb trójkątnych, których iloczyn jest liczbą kwadratową.* ([Barb] s.17).

D. ([Barb] s.144). Równość $t_{n-1}t_nt_{n+1} = z^2$ jest postaci

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \frac{(n-1)(n+2)}{2} = z^2.$$

Stąd wynika, że liczba $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ musi być kwadratowa. Zatem $\frac{(n-1)(n+2)}{2} = y^2$. Wstawiając $2n + 1 = x$, dochodzimy do równania

$$x^2 - 8y^2 = 9,$$

które ma nieskończenie wielerozwiązań naturalnych. ⊠

W podobny sposób dowodzimy:

9.5.15. *Niech m będzie nieparzystą liczbą naturalną. Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że iloczyn*

$$t_{n+1}t_{n+2}\cdots t_{n+m}$$

jest liczbą kwadratową.

Wykorzystując rozwiązania naturalne pewnych równań Pella wykazaliśmy (patrz 9.2.9), że równanie

$$u^2 + v^2 = w^2 + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych (u, v, w) takich, że wszystkie liczby u, v, w są nieparzyste. Wstawiając: $u = 2x + 1$, $v = 2y + 1$ oraz $w = 2z + 1$ widzimy, że równanie

$$(2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = (2z + 1)^2 + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych (x, y, z). Przekształcając dalej to równanie, otrzymujemy równoważne równanie

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} = \frac{z(z+1)}{2}.$$

Mamy zatem:

9.5.16. *Równanie*

$$t_x + t_y = t_z$$

ma nieskończenie wiele rozawiązań naturalnych. ([S62]).

Powyższy fakt można również szybko wykazać bez równań Pella. Wynika on na przykład z równości

$$t_{3n} + t_{4n+1} = t_{5n+1} \quad \text{lub} \quad t_{(t_n-1)} + t_n = t_{(t_n+1)}.$$

9.5.17. *Równanie* $2t_x = t_y$ *ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.*

D. Równanie $u^2 - 2v^2 = -1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych i w każdym jego rozwiązaniu naturalnym (u, v) liczby u, v są nieparzyste (patrz 5.1.6). Stąd wynika, że równanie

$$(2y + 1)^2 - 2(2x + 1)^2 = -1,$$

które po przekształceniu ma postać

$$2\frac{x(x+1)}{2} = \frac{y(y+1)}{2},$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych (x, y). ⊠

W podobny sposób wykazujemy, że każde z równań: $3t_x = t_y$, $5t_x = t_y$, $6t_x = t_y$, ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Można udowodnić:

9.5.18. *Jeśli* m *jest niekwadratową liczbą naturalną, to równanie*

$$mt_x = t_y$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ([S62]).

D. Z równania $mt_x = t_y$, po jego przekształceniu, otrzymujemy równanie

$$(2y + 1)^2 - m(2x + 1)^2 = 1 - m.$$

Należy zatem udowodnić, że równanie

$$u^2 - mv^2 = 1 - m$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań nieparzystych, tzn. takich rozwiązań naturalnych (u, v), w których liczby u, v są nieparzyste. Udowodniliśmy to już w punkcie 4.5.5. ⊠

9.5.19. *Równanie*

$$t_x t_y = t_z$$

ma nieskończenie wiele takich rozwiązań naturalnych (x, y, z)*, w których* $x \geqslant 2$.

D. Przyjmujemy na przykład, że $x = 2$ i stosujemy 9.5.18. ⊠

Liczbą *prostokątną* nazywa się każdą liczbę naturalną postaci

$$o_n = n(n+1).$$

Angielska nazwa tych liczb to *oblong numbers*.

9.5.20. *Równanie $o_x o_y = o_z$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.*

D. Dla $x = 1$ rozpatrywane równanie jest postaci $(2z+1)^2 - 2(2y+1)^2 = -1$. Należy więc udowodnić, że równanie

$$u^2 - 2v^2 = -1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań nieparzystych, tzn. takich rozwiązań naturalnych (u, v), w których liczby u, v są nieparzyste. Udowodniliśmy to w 5.1.6. ⊠

9.5.21. *Niech $a_n = n + 2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Równanie*

$$a_x a_y = a_z$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ([Kw] 4(2002)).

D. Podstawiamy: $x = 1$, $u = z + 1$, $v = y + 1$ i otrzymujemy równanie

$$u^2 - 3v^2 = -2,$$

które ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ⊠

9.5.22. *Niech $b_n = n + 3$ dla $n \in \mathbb{N}$. Równanie*

$$b_x b_y = b_z$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.

D. Podstawiamy: $x = 2$, $u = 2z + 3$, $v = 2y + 3$ i otrzymujemy równanie

$$u^2 - 10v^2 = -81,$$

które ma nieskończenie wiele rozwiązań nieparzystych. Jednym rozwiązaniem nieparzystym jest para $(27, 9)$. Nieskończoność zbioru rozwiązań nieparzystych wynika z 4.5.6. ⊠

9.5.23. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb trójkątnych, których zarówno suma jak i różnica są liczbami trójkątnymi.* ([S59] 134).

D. (Sposób I). (J. Browkin). Niech (u, v) będzie dowolnym rozwiązaniem naturalnym równania

$$u^2 - 20v^2 = 1.$$

Niech $r = 2u+8v$, $s = u+6v$, $a = r^2+s^2$, $b = rs+1$, $c = |r^2+2rs-s^2|$, $d = |r^2-2rs-s^2|$. Zauważmy, że wszystkie liczby a, b, c, d są nieparzyste, skąd wniosek, że są naturalne. Liczby te spełniają równości:

$$a^2 + b^2 = c^2 + 1, \quad a^2 - b^2 = d^2 - 1.$$

Niech $x = (a-1)/2$, $y = (b-1)/2$, $z = (c-1)/2$, $w = (d-1)/2$. Wtedy $t_x + t_y = t_z$ oraz $t_x - t_y = t_w$. ⊠

D. (Sposób II). ([S88] 84-85). Wykażemy, że układ równań

$$t_x + t_{2y} = t_{3y}, \quad t_x - t_{2y} = t_{y-1},$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych (x, y). Każde z tych równań jest równoważne jednemu równaniu

$$x^2 + x = 5y^2 + y.$$

To z kolei równanie, po standardowym przekształceniu (patrz następne podrozdziały), sprowadza się do odpowiedniego równania Pella. ⊠

Istnieje trójkąt Pitagorasa składający się z samych liczb trójkątnych:

$$t_{132}^2 + t_{143}^2 = t_{164}^2.$$

Nie znamy odpowiedzi na pytanie:

9.5.24 (K. Zarankiewicz). *Czy istnieje jeszcze inny taki trójkąt Pitagorasa?* ([S62] 34).

Można natomiast udowodnić:

9.5.25. *Istnieje nieskończenie wiele trójkątów Pitagorasa, w których przyprostokątne są liczbami trójkątnymi.*

D. ([S62]). Korzystając z rozwiązań pewnego równania Pella wykazaliśmy (patrz 9.4.1), że równanie

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Mnożąc to równanie stronami przez $(2x+1)^2$, otrzymujemy nowe równanie:

$$\left(\frac{2x(2x+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(2x+1)(2x+2)}{2}\right)^2 = \Big((y(2x+1)\Big)^2$$

i stąd wnioskujemy, że równanie

$$t_{2x}^2 + t_{2x+1}^2 = \Big((2x+1)y\Big)^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ⊠

★ M. E. Larsen, *Pell's equation: a tool for the puzzle-smith*, [MG] 71(458)(1987) 261-265.
M. Ulas, *Triangular and tetrahedral numbers as sides of right triangles*, [Uls], 211-216.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.6 Równanie ax²+x = by²+y

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Często na różnych olimpiadach lub konkursach matematycznych pojawiło się zadanie następującego typu. Dane są jakieś liczby naturalne $a < b$ i rozpatruje się równość postaci

$$\boxed{ax^2 + x = by^2 + y}\,.$$

Załóżmy, że liczby naturalne x, y spełniają tę równość. Zadanie polega na tym by udowodnić, że wtedy wszystkie liczby

$$x - y, \quad ax + ay + 1, \quad bx + by + 1$$

są kwadratowe. Spójrzmy na kilka przykładów tego typu.

9.6.1. *Niech $x > y$ będą liczbami naturalnymi.*

(1) *Jeśli $2x^2 + x = 3y^2 + y$, to liczby*

$$x - y, \quad 2x + 2y + 1, \quad 3x + 3y + 1$$

są kwadratowe. ([Str72] 10, [B-rs] 185).

(2) *Jeśli $3x^2 + x = 4y^2 + y$, to wszystkie liczby*

$$x - y, \quad 3x + 3y + 1, \quad 4x + 4y + 1$$

są kwadratowe. ([OM] Łotwa 1994, [OM] Iran 1997, [MOc] z.460).

(3) *Jeśli $2001x^2 + x = 2002y^2 + y$, to $x - y$ jest liczbą kwadratową.* ([OM] Australia 2002).

Powyższe fakty znajdziemy w [N-3]. Mają one elementarne dowody, których w [N-3] nie podaliśmy. Zróbmy to teraz.

9.6.2. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Jeśli $x > y$ są takimi liczbami naturalnymi, że*

$$mx^2 + x = (m+1)y^2 + y,$$

to liczby $x - y$, $mx + my + 1$, $(m+1)x + (m+1)y + 1$ są kwadratowe.

D. Zauważmy, że

$$0 = mx^2 + x - (m+1)y^2 - y = m(x^2 - y^2) + (x - y) - y^2,$$
$$0 = mx^2 + x - (m+1)y^2 - y = (m+1)(x^2 - y^2) + (x - y) - x^2.$$

Mamy więc następujące dwie równości:

$$y^2 = (x - y)u, \quad x^2 = (x - y)v,$$

gdzie $u = mx + my + 1$, $v = (m+1)x + (m+1)y + 1$. Mnożąc te dwie równości przez siebie stronami, otrzymujemy równość

$$(xy)^2 = (x - y)^2 uv,$$

z której wynika, że liczba uv jest kwadratowa. Jest jasne, że $\text{nwd}(u, v) = 1$. Zatem liczby u i v są kwadratowe. Niech $u = a^2$, $a \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$y^2 = (x - y)a^2$$

i stąd wynika, że liczba $x - y$ jest kwadratowa. ⊠

Nasuwa się jednak pytanie czy takie liczby naturalne x i y istnieją. Jeśli istnieją, to ile ich jest? W [Crux] z 1998 roku, na stronie 138, jest wpomniane, że naturalnym rozwiązaniem równania diofantycznego

$$3x^2 + x = 4y^2 + y$$

jest para $(30, 26)$ i postawione jest tam pytanie: "czy są inne rozwiązania?". Okazuje się, że takich rozwiązań naturalnych tego równania jest nieskończenie wiele. Podobnie jest z innymi równaniami tego typu. Aby się o tym przekonać, należy rozpatrzyć odpowiednie równania Pella. Wyjaśnijmy to dokładniej.

9.6.3. *Równanie*

$$2x^2 + x = 3y^2 + y$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Najmniejszym rozwiązaniem naturalnym jest para $(22, 18)$. *Jeśli para* (x, y) *jest rozwiązaniem naturalnym, to para*

$$(49x + 60y + 22,\ 40x + 49y + 18)$$

również jest rozwiązaniem naturalnym. Rozpoczynając od pary $(x, y) = (22, 18)$, *otrzymujemy w ten sposób wszystkie rozwiązania naturalne tego równania. Przykłady rozwiązań naturalnych:*

$$(22, 18),\ (2180, 1780),\ (213642, 174438),\ (20934760, 17093160).$$

D. Najpierw dane równanie przekształcamy:

$$12(2x^2 + x) + 1 = 12(3y^2 + y) + 1 = 36y^2 + 12y + 1 = (6y + 1)^2,$$
$$6(6y + 1)^2 = 12(12x^2 + 6x) + 6 = (12x + 3)^2 - 3,$$
$$(12x + 3)^2 - 6(6y + 1)^2 = 3.$$

Jeśli więc para (x, y) spełnia dane równanie, to liczby $u = 12x + 3$, $v = 6y + 1$, spełniają równanie Pella

$$u^2 - 6v^2 = 3.$$

Wiemy (patrz 5.5.4), że każde rozwiązanie naturalne równania $u^2 - 6v^2 = 3$ jest postaci (u_n, v_n), gdzie

$$u_n + v_n\sqrt{6} = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^n \left(3 + \sqrt{6}\right),$$

dla $n \geqslant 0$. Stąd otrzymujemy, że $(u_0, v_0) = (3, 1)$ oraz

$$(*) \qquad \left(u_{n+1},\ v_{n+1}\right) = \left(5u_n + 12v_n,\ 2u_n + 5v_n\right),$$

dla $n \in \mathbb{N}_0$. Stąd dalej wynika, że

$$u_n \equiv 3 \pmod{12}, \quad v_n \equiv (-1)^n \pmod{6},$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Dla każdej parzystej liczby n otrzymujemy więc takie rozwiązanie równania

$$u^2 - 6v^2 = 3,$$

które jest postaci $(12x+3,\ 6y+1)$. Co drugie rozwiązanie (poczynając od rozwiązania (u_2, v_2)) spełnia więc żądany warunek. Z $(*)$ wynika, że

$$\Big(u_{n+2},\ v_{n+2}\Big) = \Big(49u_n + 120v_n, 20u_n + 49v_n\Big).$$

W szczególności, $(u_2, v_2) = (49 \cdot 3 + 120 \cdot 1, 20 \cdot 3 + 49 \cdot 1) = (267, 109)$. Oznaczmy:

$$(x_n,\ y_n) = \left(\frac{u_{2n} - 3}{12},\ \frac{v_{2n} - 1}{6}\right).$$

Wtedy $(x_1, y_1) = \left(\frac{u_2 - 3}{12}, \frac{v_2 - 1}{6}\right) = \left(\frac{267 - 3}{12}, \frac{109 - 1}{6}\right) = (22, 18)$. Mamy ponadto:

$$\begin{aligned}
(x_{n+1}, y_{n+1}) &= \left(\frac{u_{2n+2} - 3}{12}, \frac{v_{2n+2} - 1}{6}\right) = \left(\frac{49u_{2n} + 120v_{2n} - 3}{12}, \frac{20u_{2n} + 49v_{2n} - 1}{6}\right) \\
&= \left(\frac{49(12x_n + 3) + 120(6y_n + 1) - 3}{12}, \frac{20(12x_n + 3) + 49(6y_n + 1) - 1}{6}\right) \\
&= (49x_n + 60y_n + 22, 40x_n + 49y_n + 18).
\end{aligned}$$

Każda para (x_n, y_n) jest oczywiście rozwiązaniem naturalnym równania

$$2x^2 + x = 3y^2 + y$$

i każde rozwiązanie naturalne tego równania jest postaci (x_n, y_n), dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. ⊠

9.6.4. *Równanie*

$$3x^2 + x = 4y^2 + y$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Najmniejszym rozwiązaniem naturalnym jest para $(30, 26)$*. Jeśli para* (x, y) *jest rozwiązaniem naturalnym, to para*

$$(97x + 112y + 30,\ 84x + 97y + 26)$$

jest również rozwiązaniem naturalnym. Rozpoczynając od pary $(x, y) = (30, 26)$*, otrzymujemy w ten sposób wszystkie rozwiązania naturalne tego równania. Przykłady rozwiązań naturalnych:*

$$(30, 26),\ (5852, 5068),\ (1135290, 983190),\ (220240440, 190733816).$$

D. Najpierw dane równanie przekształcamy:

$$\begin{gathered}
16(3x^2 + x) + 1 = 16(4y^2 + y) + 1 = 64y^2 + 16y + 1 = (8y + 1)^2, \\
12(8y + 1)^2 = 16(36x^2 + 12x) + 12 = 16(6x + 1)^2 - 4, \\
3(8y + 1)^2 = 4(6x + 1)^2 - 1, \\
(2(6x + 1))^2 - 3(8y + 1)^2 = 1.
\end{gathered}$$

Jeśli więc para (x, y) spełnia dane równanie, to liczby $u = 12x + 2$, $v = 8y + 1$, spełniają równanie Pella

$$u^2 - 3v^2 = 1.$$

Wiemy (patrz 5.3.2), że każde rozwiązanie naturalne równania $u^2 - 3v^2 = 1$ jest postaci $(u_n,\ v_n) = f^n(1,0)$, gdzie
$$f(u,v) = (2u+3v,\ u+2v).$$
Początkowe rozwiązania naturalne są następujące: $(u_1,v_1) = (2,1)$, $(u_2,\ v_2) = (7,4)$, $(u_3,\ v_3) = (26,15)$, $(u_4,\ v_4) = (97,56)$, $(u_5,\ v_5) = (362,209)$. Szukamy takich rozwiązań naturalnych (u,v), które są postaci $(12x+2,\ 8y+1)$. Warunek ten spełniają rozwiązania:

$$(u_1,v_1) = (2,1) = (12\cdot 0+2,\ 8\cdot 0+1), \quad (u_5,\ v_5) = (362,209) = (12\cdot 30+2,\ 8\cdot 26+1).$$

Łatwo zauważyć, że warunek ten spełniają wszystkie rozwiązania postaci

$$\Big(u_{4k+1},\ v_{4k+1}\Big)$$

oraz, że to są jedyne tego typu rozwiązania. Z tych rozwiązań otrzymujemy rozwiązania równania

$$3x^2 + x = 4y^2 + y.$$

Z rozwiązań (u_1,v_1) i (u_5,v_5) otrzymujemy odpowiednio rozwiązania $(x_0,y_0) = (0,0)$ i $(x_1,y_1) = (30,26)$. Rozwiązanie $(x_0,y_0) = (0,0)$ nas nie interesuje; szukamy bowiem rozwiązań naturalnych.

Każde rozwiązanie naturalne równania

$$3x^2 + x = 4y^2 + y$$

jest więc postaci $(x_k,\ y_k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz

$$(x_k,\ y_k) = \left(\frac{u_{4k+1}-2}{12},\ \frac{v_{4k+1}-1}{8}\right).$$

Wiemy, że $(u_{n+1},\ v_{n+1}) = f(u_n,v_n) = (2u_n+3v_n,\ u_n+2v_n)$. Stąd wynika, że

$$\Big(u_{n+4},\ v_{n+4}\Big) = f^4\Big(u_n,\ v_n\Big) = \Big(97u_n + 168v_n,\ 56u_n + 97v_n\Big),$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
(x_{k+1},\ y_{k+1}) &= \left(\frac{u_{4(k+1)+1}-2}{12},\ \frac{v_{4(k+1)+1}-1}{8}\right)\left(\frac{u_{(4k+1)+4}-2}{12},\ \frac{v_{(4k+1)+4}-1}{8}\right)\\
&= \left(\frac{97u_{4k+1}+168v_{4k+1}-2}{12},\ \frac{56u_{4k+1}+97v_{4k+1}-1}{8}\right)\\
&= \left(\frac{97(12x_k+2)+168(8y_k+1)-2}{12},\ \frac{56(12x_k+2)+97(8y_k+1)-1}{8}\right)\\
&= (97x_k + 112y_k + 30,\ 84x_k + 97y_k + 26)\,.
\end{aligned}$$

Jeśli więc para (x,y) jest rozwiązaniem naturalnym równania $3x^2 + x = 4y^2 + y$, to para $(97x + 112y + 30,\ 84x + 97y + 26)$ jest również rozwiązaniem naturalnym tego równania. Każde rozwiązanie naturalne tego równania otrzymujemy w ten sposób, startując od rowiązania $(30,26)$. ⊠

9.7 Równanie $ax^2+bx+c = py^2+qy$

Rozpatrzmy równanie postaci

$$\boxed{ax^2 + by^2 + c = py^2 + qy},$$

gdzie a i p są liczbami naturalnymi oraz b, c, q są liczbami całkowitymi. Zauważmy najpierw, że

$$4p(py^2 + qy) = (2py + q)^2 - q^2.$$

Jeśli więc (x, y) jest parą liczb spełniającą równość $ax^2 + by^2 + c = py^2 + qy$, to

$$4p^2a(ax^2 + bx + c) = ap \cdot 4p(py^2 + qy) = ap(2py + q)^2 - apq^2.$$

Ale $4p^2a(ax^2 + bx + c) = (2apx + bp)^2 + 4ap^2c - b^2p^2$. Mamy więc równość

$$(2apx + bp)^2 - ap(2py + q)^2 = b^2p^2 - 4ap^2c - apq^2.$$

Wykazaliśmy następujące stwierdzenie.

9.7.1. *Niech $a, p \in \mathbb{N}$, $b, c, g \in \mathbb{Z}$. Załóżmy, że (x, y) jest parą liczb całkowitych spełniających równość*

$$ax^2 + bx + c = py^2 + qy.$$

Wtedy zachodzi równość

$$u^2 - apv^2 = r,$$

gdzie $u = 2apx + bp$, $v = 2py + q$, $r = b^2p^2 - 4ap^2c - apq^2$.

Jeśli więc ap nie jest liczbą kwadratową, to badanie równania postaci

$$ax^2 + bx + c = py^2 + qy$$

sprowadza się do badania odpowiedniego równania Pella. Metodę tę zastosowaliśmy w poprzednim podrozdziale przy omawianiu równań

$$2x^2 + x = 3y^2 + y \quad \text{i} \quad 3x^2 + x = 4y^4 + y.$$

W ten sposób łatwo można udowodnić wszystkie fakty dotyczące tego rodzaju równań diofantycznych, które podaliśmy w [N-3]. Zanotujmy kilka przykładów.

Początkowe przykłady dotyczą równania postaci $x^2 + x + 1 = my^2$.

9.7.2. ([S56] 26, [S59] 109, [N-3]). *Równanie*

$$x^2 + x + 1 = 3y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Wszystkie rozwiązania naturalne tworzą ciąg (x_n, y_n) określony wzorami:

$$(x_0, y_0) = (1, 1), \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = (7x_n + 12y_n + 3, 4x_n + 7y_n + 2).$$

D. Stosując przekształcenia podane w 9.7.1 stwierdzamy, że badanie równania $x^2 + x + 1 = 3y^2$ sprowadza się do zbadania równania Pella

$$u^2 - 3v^2 = -3,$$

gdzie $u = 2x + 1$, $v = 2y$. Z 5.3.8 wiemy, że każde rozwiązanie naturalne równania $u^2 - 3v^2 - 3$ jest postaci (u_n, v_n), gdzie

$$u_n + v_n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^n \left(3+2\sqrt{3}\right),$$

dla $n \geqslant 0$. Stąd otrzymujemy:

$$\Big(u_{n+1},\ v_{n+1}\Big) = \Big(2u_n + 3v_n,\ u_n + 2v_n\Big), \quad (u_0, v_0) = (3, 2).$$

Szukamy takich rozwiązań naturalnych (u, v), które są postaci $(2x + 1,\ 2y)$. Łatwo zauważyć, że warunek ten spełniają wszystkie rozwiązania postaci

$$\Big(u_{2k},\ v_{2k}\Big)$$

oraz, że to są jedyne tego typu rozwiązania. Z tych rozwiązań otrzymujemy rozwiązania równania

$$x^2 + x + 1 = 3y^2.$$

Z rozwiązania $(u_0, v_0) = (3, 2)$ otrzymujemy rozwiązanie $(x_0,\ y_0) = (1, 1)$. Każde rozwiązanie naturalne równania $x^2 + x + 1 = 3y^2$ jest więc postaci $(x_k,\ y_k)$, gdzie

$$\Big(x_k,\ y_k\Big) = \left(\frac{u_{2k}-1}{2},\ \frac{v_{2k}}{2}\right),$$

dla $k \in \mathbb{N}_0$. Ponieważ $(u_{n+1},\ v_{n+1}) = (2u_n + 3v_n,\ u_n + 2v_n)$, więc

$$\Big(u_{n+2},\ v_{n+2}\Big) = \Big(7u_n + 12v_n,\ 4u_n + 7v_n\Big),$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
(x_{k+1},\ y_{k+1}) &= \left(\frac{u_{2k+2}-1}{2},\ \frac{v_{2k+2}}{2}\right) = \left(\frac{7u_{2k}+12v_{2k}-1}{2},\ \frac{4u_{2k}+7v_{2k}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{7(2x_k+1)+12(2y_k)-1}{2},\ \frac{4(2x_k+1)+7(2y_k)}{2}\right) \\
&= (7x_k + 12y_k + 3,\ 4x_k + 7y_k + 2)
\end{aligned}$$

i to kończy dowód. ⊠

9.7.3. *Równanie*

$$x^2 + x + 1 = 7y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Wszystkie rozwiązania naturalne tworzą dwa ciągi (x_n, y_n) *i* (x'_n, y'_n)*, określone wzorami:*

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &= (2, 1), & (x_{n+1}, y_{n+1}) &= (127x_n + 336y_n + 63,\ 48x_n + 127y_n + 24). \\
(x'_0, y'_0) &= (18, 7), & (x'_{n+1}, y'_{n+1}) &= (127x'_n + 336y'_n + 63,\ 48x'_n + 127y'_n + 24).
\end{aligned}$$

D. Stosując przekształcenia 9.7.1, otrzymujemy równanie Pella

$$u^2 - 7v^2 = -3,$$

gdzie $u = 2x + 1$, $v = 2y$. Z 5.6.6 wiemy, że równanie to ma dwie klasy rozwiązań. Każde rozwiązanie naturalne równania $u^2 - 7v^2 - 3$ jest postaci (u_n, v_n) lub (u'_n, v'_n), gdzie

$$\begin{aligned} u_n + v_n\sqrt{7} &= \left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n \left(5 + 2\sqrt{7}\right), \\ u'_n + v'_n\sqrt{7} &= \left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n \left(2 + 1\sqrt{7}\right). \end{aligned}$$

dla $n \geqslant 0$. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (u_{n+1}, v_{n+1}) &= (8u_n + 21v_n,\ 3u_n + 8v_n), & (u_0, v_0) &= (5, 2), \\ (u'_{n+1}, v'_{n+1}) &= (8u'_n + 21v'_n,\ 3u'_n + 8v'_n), & (u'_0, v'_0) &= (2, 1). \end{aligned}$$

Szukamy takich rozwiązań naturalnych (u, v), które są postaci $(2x+1, 2y)$. Łatwo zauważyć, że warunek ten spełniają wszystkie rozwiązania postaci (u_{2k}, v_{2k}) i (u'_{2k+1}, v'_{2k+1}) oraz, że to są jedyne tego typu rozwiązania. Z tych rozwiązań otrzymujemy rozwiązania równania

$$x^2 + x + 1 = 7y^2.$$

Z rozwiązania $(u_0, v_0) = (5, 2)$ otrzymujemy rozwiązanie $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Z rozwiązania $(u'_1, v'_1) = (37, 14)$ otrzymujemy rozwiązanie $(x'_0, y'_0) = (18, 7)$. Każde rozwiązanie naturalne równania $x^2+x+1 = 7y^2$ jest więc postaci (x_k, y_k) lub (x'_k, y'_k), gdzie

$$(x_k,\ y_k) = \left(\frac{u_{2k} - 1}{2},\ \frac{v_{2k}}{2}\right), \quad (x'_k, y'_k) = \left(\frac{u'_{2k+1} - 1}{2},\ \frac{v'_{2k+1}}{2}\right)$$

dla $k \in \mathbb{N}_0$. Ponieważ $(u_{n+1}, v_{n+1}) = (8u_n + 21v_n,\ 3u_n + 8v_n)$, więc

$$(u_{n+2},\ v_{n+2}) = (127u_n + 336v_n,\ 48u_n + 127v_n)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Taka sama reguła rekurencyjna jest dla drugiego ciągu. Mamy zatem, dla pierwszego ciągu:

$$\begin{aligned} (x_{k+1},\ y_{k+1}) &= \left(\frac{u_{2k+2} - 1}{2},\ \frac{v_{2k+2}}{2}\right) = \left(\frac{127u_{2k} + 336v_{2k} - 1}{2},\ \frac{48u_{2k} + 127v_{2k}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{127(2x_k + 1) + 336(2y_k) - 1}{2},\ \frac{48(2x_k + 1) + 127(2y_k)}{2}\right) \\ &= (127x_k + 336y_k + 63,\ 48x_k + 127y_k + 24) \end{aligned}$$

i taka sama reguła rekurencyjna jest dla ciągu (x'_n, y'_n). ⊠

9.7.4. *Jeśli m jest bezkwadratową liczbą naturalną mniejszą od* 100*, to równanie*

$$x^2 + x + 1 = my^2$$

ma rozwiązanie naturalne wtedy i tylko wtedy, gdy m jest jedną z liczb:

3, 7, 13, 19, 21, 31, 39, 43, 57, 61, 67, 73, 91, 93, 97.

W każdym przypadku rozwiązań naturalnych jest nieskończenie wiele. (Maple).

9.7.5. *Każde rozwiązanie naturalne równania*

$$3x^2 - 3x + 1 = y^2$$

jest postaci $(x_n,\ y_n)$, *gdzie* $x_1 = y_1 = 1$ *oraz* $x_{n+1} = 7x_n + 4y_n - 3,\ \ y_{n+1} = 12x_n + 7y_n - 6$. ([S59] 89).

9.7.6. *Następujące równania mają nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.*

(1) $x^2 + x = 2y^2$. ([S59] 113).

(2) $x^2 + x = 5y^2 + y$. ([S88] 84).

(3) $2x^2 + x + 1 = y^2 + y$.

(4) $2x^2 + x + 1 = 3y^2 + y$.

(5) $3x^2 - x = 2y^2$. ([Mat] 3/1971 164, [S59] 89).

(6) $3x^2 + 3x + 1 = y^2$. ([S56] 29).

(7) $3x^2 + 3x + 1 = 2y^2 + y$.

9.7.7. *Równanie* $3x^2 + 3x + 1 = y^2 + y$ *nie ma rozwiązań całkowitych.*

D. Stosując przekształcenia 9.7.1, otrzymujemy równanie

$$u^2 - 3v^2 = -6,$$

które nie ma rozwiązań. (Tutaj $u = 6x + 3$, $v = 2y + 1$). ⊠

9.7.8. *Następujące równania nie mają rozwiązań całkowitych.*

(1) $2x^2 + x + 1 = 3y^2$.

(2) $2x^2 + 2x + 1 = 3y^2 + y$.

(3) $3x^2 + 3x + 1 = y^2 + 2y$.

9.7.9. *Równanie* $9x^2 - 39x + 40 = y^2$ *ma tylko dwa rozwiązania całkowite:* $(3, 2)$ *i* $(3, -2)$. ([Mat] 4/1959 211).

D. Stosując przekształcenia 9.7.1, otrzymujemy równanie

$$u^2 - v^2 = 9,$$

gdzie $u = 6x - 13$, $v = 2y$. Stąd otrzymujemy układy równań postaci $u + v = d, \quad u - v = \frac{9}{d}$, gdzie $d \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$. Analizując każdy z tych układów, otrzymujemy tezę. ⊠

9.7.10. *Równanie* $x^2 = y^2 + 2y + 13$ *ma tylko cztery rozwiązania całkowite:* $(4, 1),\ \ (4, -3),\ \ (-4, 1),\ \ (-4, 3)$. ([GaT] 1/83).

9.7.11. *Niech* $b_1, c_1, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$. *Równanie*

$$x^2 + b_1 x + c_1 = y^2 + b_2 y + c_2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b_1^2 - 4c_1 = b_2^2 - 4c_2.$$

([OM] Brazylia 1985).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.8 Równanie $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozpatrzmy wielomian o współczynnikach całkowitych

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

i oznaczmy literami D i Δ dwie liczby całkowite:

$$D = b^2 - 4ac, \quad \Delta = 4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2.$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi równość

$$(*) \qquad -4aD \cdot F(x, y) = \Big(Dy + db - 2ae\Big)^2 - D\Big(2ax + by + d\Big)^2 + 4a\Delta.$$

Wykorzystując tę równość oraz podstawowe fakty o równaniu Pella, można udowodnić następujące twierdzenie Gaussa.

9.8.1 (Gauss). *Niech* $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ *będzie takim wielomianem o współczynnikach całkowitych, dla którego* D *jest niekwadratową liczbą dodatnią oraz* Δ *jest liczbą różną od zera. Wówczas, jeśli równanie*

$$F(x, y) = 0$$

posiada rozwiązanie całkowite, to rozwiązań całkowitych ma nieskończenie wiele. ([Morl]).

D. (Modyfikacja dowodu podanego przez Mordella w [Morl] 57-58). Niech $p = 2a$, $q = b$, $r = d$, $s = D$, $t = db - 2ae$ oraz

$$X = sy + t, \quad Y = px + qy + r, \quad M = -4a\Delta.$$

Przy takich oznaczeniach równość $(*)$ ma postać

$$(**) \qquad -4aD \cdot F(x, y) = X^2 - DY^2 - M.$$

Z założeń wynika, że $a \neq 0$, $p \neq 0$, $s \neq 0$, $M \neq 0$ oraz D jest niekwadratową liczbą naturalną.

Załóżmy, że para (x_0, y_0) jest rozwiązaniem całkowitym badanego równania $F(x, y) = 0$. Wtedy $F(x_0, y_0) = 0$ i dzięki równości $(**)$ otrzymujemy równość $X_0^2 - DY_0^2 = M$, gdzie

$$X_0 = sy_0 + t, \quad Y_0 = px_0 + qy_0 + r.$$

Równanie $X^2 - DY^2 = M$ ma zatem rozwiązanie całkowite.

Niech (T, U) będzie dowolnym rozwiązaniem naturalnym równania Pella $T^2 - DU^2 = 1$. Mamy wtedy nową parę

$$(X, Y) = (TX_0 - DUY_0,\ TY_0 - UX_0),$$

będącą nowym rozwiązaniem całkowitym równania $X^2 - DY^2 = M$. Spójrzmy na układ równań

$$(***) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} sy + t &=& T(sy_0 + t) - DU(px_0 + qy_0 + r), \\ px + qy + r &=& T(px_0 + qy_0 + r) - U(sy_0 + t), \end{array} \right.$$

w którym niewiadomymi są x i y. Każde rozwiązanie całkowite (x, y) tego układu jest oczywiście (na mocy równości $(**)$) rozwiązaniem całkowitym równania $F(x, y) = 0$.

Z twierdzenia 1.5.4 (zastosowanego dla $m = ps$) wiemy, że istnieje nieskończneie wiele takich rozwiązań (T, U) równania $T^2 - DU^2 = 1$, że

$$T \equiv 1 \pmod{ps}, \quad U \equiv 0 \pmod{ps}.$$

Załóżmy więc, że $T = ips + 1$, $U = jps$, gdzie $i, j \in \mathbb{Z}$. Dla takiej pary (T, U) z układu $(***)$ otrzymujemy parę (x, y), w której

$$\begin{array}{rcl} y &=& y_0 + pz, \\ x &=& x_0 + is(px_0 + qy_0 + r) - js(sy_0 + t) - qz, \end{array}$$

gdzie $z = i(sy_0 + t) - jD(px_0 + qy_0 + r) = iX_0 - jDY_0$. Para ta jest rozwiązaniem całkowitym równania $F(x, y) = 0$. Zatem, równanie $F(x, y) = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych. ⊠

Zajmiemy się teraz równaniem

$$\boxed{ax^2 + bxy + cy^2 = k}\ ,$$

gdzie a, b, c, k są niezerowymi liczbami całkowitymi. Równanie to jest szczególnym przypadkiem równania rozpatrywanego w twierdzeniu Gaussa 9.8.1. Liczby d i e są zerami, $f = -k$ oraz

$$\Delta = kD = k(b^2 - 4ac).$$

W tym przypadku twierdzenie Gaussa redukuje się do następującego twierdzenia.

9.8.2. *Niech a, b, c, k będą takimi liczbami całkowitymi, że $k \neq 0$ oraz $D = b^2 - 4ac$ jest niekwadratową liczbą dodatnią. Jeśli równanie*

$$ax^2 + bxy + cy^2 = k$$

ma rozwiązanie całkowite, to rozwiązań całkowitych ma nieskończenie wiele.

Z tego, że rozważane równanie ma rozwiązanie naturalne nie musi wynikać, że rozwiązań naturalnych istnieje nieskończenie wiele. Zanotujmy jeden z przykładów tego typu.

9.8.3. *Para $(1, 1)$ jest rozwiązaniem naturalnym równania*

$$x^2 + 5xy + 2y^2 = 8.$$

Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych, wśród których jest tylko jedno rozwiązanie naturalne.

D. Jest oczywiste, że jest tylko jedno rozwiązanie naturalne $(x, y) = (1, 1)$. Liczba $D = b^2 - 4ac$ jest równa 17; jest niekwadratową liczbą dodatnią. Nieskończoność zbioru rozwiązań całkowitych jest więc konsekwencją twierdzenia 9.8.2. ⊠

Kilka przykładów z równaniami postaci $ax^2 + bxy + by^2 = k$.

9.8.4. *Równanie*

$$x^2 - 4xy + y^2 = 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ([Djuk]).

D. Podstawiamy: $x = v$, $y = u + 2x = u + 2v$ i otrzymujemy równanie Pella $u^2 - 3v^2 = 1$. ⊠

9.8.5. *Równanie*

$$x^2 + y^2 = 3xy - 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ([S56] 58, [S59] 31).

D. Udowodnimy, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych postaci

$$(x, y) = (2a,\ b + 3a),$$

gdzie $a, b \in \mathbb{N}$. Podstawiając $x = 2a$ i $y = b + 3a$, otrzymujemy równanie

$$b^2 - 5a^2 = -1,$$

które ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych (patrz 5.4.8). Najmniejszym jego rozwiązaniem jest para $(a, b) = (1, 2)$, a następnym $(a, b) = (17, 38)$. Stąd otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych danego równania $x^2 + y^2 = 3xy - 1$. Przykładowe takie rozwiązania: $(x, y) = (2, 5)$, $(x, y) = (34, 89)$. ⊠

9.8.6. *Równanie*

$$2x^2 + 3y^2 = 6xy - 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych. ([AnAn]).

D. Równanie to można zapisać w postaci

$$x^2 - 3(y - x)^2 = 1.$$

Podstawiając $u = x$, $v = y - x$, mamy równanie Pella

$$u^2 - 3v^2 = 1,$$

które ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ⊠

9.8.7. *Równanie*

$$x^2 - 6xy + y^2 = -3$$

nie ma rozwiązań całkowitych.

D. Przypuśćmy, że istnieją takie liczby całkowite x i y, że $x^2 - 6xy + y^2 = -3$. Wtedy

$$(x+y)^2 - 2(x-y)^2 = -(x^2 - 6xy + y^2) = -(-3) = 3,$$

a więc wtedy liczby całkowite $u = x + y$ i $v = x - y$ spełniają równość

$$u^2 - 2v^2 = 3.$$

Jest to sprzeczne z tym, że równanie

$$x^2 - 2y^2 = 3$$

nie ma rozwiązań całkowitych (patrz 5.2.11). ⊠

9.8.8. *Równanie* $2x^2 - 14xy + 11y^2 = -2$ *nie ma rozwiązań całkowitych.*

D. Przypuśćmy, że istnieją liczby całkowite x i y spełniające to równanie. Wtedy

$$(x+y)^2 - 3(x-2y)^2 = -(2x^2 - 14xy + 11y^2) = -(-2) = 2,$$

a więc wtedy liczby całkowite $u = x + y$ i $v = x - 2y$ spełniają równość

$$u^2 - 3v^2 = 2.$$

Jest to sprzeczne z tym, że równanie $x^2 - 3y^2 = 2$ nie ma rozwiązań całkowitych. ⊠

9.8.9. *Każde równanie postaci*

$$x^2 - (2n+4)xy - (n^2-2)y^2 = -3,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, *nie ma rozwiązań całkowitych.*

D. Niech n będzie liczbą naturalną. Przypuśćmy, że istnieją takie liczby całkowite x i y, że $x^2 - (2n+4)xy - (n^2-2)y^2 = -3$. Wtedy

$$-(x+ny)^2 + 2(x-y)^2 = x^2 - (2n+4)xy - (n^2-2)y^2 = -3,$$

a więc wtedy liczby całkowite $u = x + ny$ i $v = x - y$ spełniają równość

$$u^2 - 2v^2 = 3.$$

Jest to sprzeczne z tym, że równanie $x^2 - 2y^2 = 3$ nie ma rozwiązań całkowitych (patrz 5.2.11). ⊠

W podobny sposób wykazujemy następne przykłady.

9.8.10. *Następujące równania nie mają rozwiązań całkowitych.*

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - 11y^2 &= -1, \\ 2x^2 - 14xy + 11y^2 &= 1, \\ 2x^2 - 10xy - y^2 &= 1, \\ x^2 - 2xy - 11y^2 &= 2. \end{aligned}$$

★ D. E. Flath, $aX^2 + bXY + cY^2 = m$, [Flth] 118-124.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
9.9 Liczby Fibonacciego
oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przez u_n oznaczamy n-tą liczbę Fibonacciego, czyli n-ty wyraz ciągu nieskończonego, określonego warunkami

$$\boxed{u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}}\ .$$

Przyjmujemy ponadto, że $u_0 = 0$. Z liczbami Fibonacciego stowarzyszone jest równanie

$$x^2 - 5y^2 = \pm 4.$$

9.9.1. *Każda para $\Big(u_{2n-2} + u_{2n},\ u_{2n-1}\Big)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest rozwiązaniem naturalnym równania*

$$u^2 - 5v^2 = -4$$

i każde rozwiązanie naturalne tego równania jest takiej postaci.

Każda para $\Big(u_{2n-1} + u_{2n+1},\ u_{2n}\Big)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest rozwiązaniem naturalnym równania

$$u^2 - 5v^2 = 4$$

i każde rozwiązanie naturalne tego równania jest takiej postaci. ([Kw] 3(2002) s.9).

D. Wiemy (patrz 5.4.8), że każde rozwiązanie naturalne równania $x^2 - 5y^2 = -4$ jest postaci

$$\Big(9 + 4\sqrt{5}\Big)^s \Big(a + b\sqrt{5}\Big)$$

gdzie $s \in \mathbb{N}_0$ oraz (a, b) jest jedną z par: $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(11, 5)$. Zauważmy, że

$$(1, 1) = (u_0 + u_2, u_1), \quad (4, 2) = (u_2 + u_4, u_3), \quad (11, 5) = (u_4 + u_6, u_5).$$

Ponieważ

$$\Big(x + y\sqrt{5}\Big)\Big(9 + 4\sqrt{5}\Big) = (9x + 20y) + (4x + 9y)\sqrt{5},$$

więc jeśli para (x, y) jest rozwiązaniem naturalnym, to para $(9x + 20y,\ 4x + 9y)$ również jest rozwiązaniem naturalnym. Załóżmy, że $(x, y) = \Big(u_{2n-2} + u_{2n},\ u_{2n-1}\Big)$. Pokażemy, że wtedy

$$\Big(9x + 20y,\ 4x + 9y\Big) = \Big(u_{2(n+3)-2} + u_{2(n+3)},\ u_{2(n+3)-1}\Big).$$

Sprawdzamy:

$$\begin{aligned}
9x + 20y &= 9(u_{2n-2} + u_{2n}) + 20u_{2n-1} = 9u_{2n-2} + 9u_{2n} + 20u_{2n-1} = 9u_{2n} + 11u_{2n-1} + 9u_{2n} \\
&= 18u_{2n} + 11u_{2n-1} = 11u_{2n+1} + 7u_{2n} = 7u_{2n+2} + 4u_{2n+1} \\
&= 4u_{2n+3} + 3u_{2n+2} = 3u_{2n+4} + u_{2n+3} = u_{2n+5} + 2u_{2n+4} = u_{2n+6} + u_{2n+4} \\
&= u_{2(n+3)-2} + u_{2(n+3)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x + 9y &= 4(u_{2n-2} + u_{2n}) + 9u_{2n-1} = 4u_{2n-2} + 4u_{2n} + 9u_{2n-1} = 4u_{2n} + 4u_{2n} + 5u_{2n-1} \\
&= 8u_{2n} + 5u_{2n-1} = 5u_{2n+1} + 3u_{2n} = 3u_{2n+2} + 2u_{2n+1} = 2u_{2n+3} + u_{2n+2} \\
&= u_{2n+4} + u_{2n+3} \\
&= u_{2n+5}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$(9x + 20y,\ 4x + 9y) = (u_{2(n+3)-2} + u_{2(n+3)},\ u_{2(n+3)-1})$$

i wobec tego (na mocy indukcji) teza, dotycząca równania $x^2 - 5y^2 = -4$, została udowodniona.

Dowód dotyczący równania $x^2 - 5y^2 = 4$ przeprowadzamy podobnie. Wiemy (patrz 5.4.6), że każde rozwiązanie naturalne równania $x^2 - 5y^2 = 4$ jest postaci

$$\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^s \left(a + b\sqrt{5}\right)$$

gdzie $s \in \mathbb{N}_0$ oraz (a, b) jest jedną z par: $(3, 1)$, $(7, 3)$, $(18, 8)$. Zauważmy, że

$$(3, 1) = (u_1 + u_3, u_2), \quad (7, 3) = (u_3 + u_5, u_4), \quad (18, 8) = (u_5 + u_7, u_6).$$

Dalsza część dowodu przebiega dokładnie tak samo jak poprzednio. ⊠

Liczbami Fibonacciego zajmowaliśmy się w [N-7]. Na uwagę dotyczącą tych liczb zasługuje następujące stwierdzenie, które teraz możemy łatwo udowodnić.

9.9.2. *Liczba naturalna b jest liczbą Fibonacciego wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z liczb*

$$5b^2 + 4 \quad i \quad 5b^2 - 4$$

jest kwadratowa. ([Djuk]).

D. Załóżmy, że $b = u_m$ jest liczbą Fibonacciego i skorzystajmy z 9.9.1. Jeśli $m = 2n$ jest parzyste, to para

$$\Big(x, y\Big) = \Big(u_{2n-1} + u_{2n+1},\ b\Big)$$

jest rozwiązaniem naturalnym równania $x^2 - 5y^2 = 4$, a więc wtedy $5b^2 + 4$ jest liczbą kwadatową, równą x^2. Jeśli natomiast $n = 2n - 1$ jest nieparzyste, to para

$$\Big(x, y\Big) = \Big(u_{2n-2} + u_{2n}, b\Big)$$

jest rozwiązaniem naturalnym równania $x^2 - 5y^2 = -4$ i wtedy $5b^2 + 4$ jest liczbą kwadratową, równą x^2. Implikacja w przeciwnym kierunku również w łatwy sposób wynika z 9.9.1. ⊠

9.9.3. *Równanie $x^2 - xy - y^2 = \mp 1$ (po pomnożeniu stronami przez 4) sprowadza się do równania*

$$u^2 - 5v^2 = \mp 4.$$

Każde rozwiązanie naturalne równania $x^2 - xy - y^2 = -1$ jest postaci (u_{2n}, u_{2n-1}). Każde rozwiązanie naturalne równania $x^2 - xy - y^2 = 1$ jest postaci (u_{2n+1}, u_{2n}). ([Kw] 3(2002) s.9).

Dokładniejsze badanie rozwiązań równania

$$x^2 - 5y^2 = \pm 4$$

doprowadziło do następującego wyniku.

9.9.4. *Jedynymi kwadratowymi liczbami Fibonacciego są: $u_1 = u_2 = 1^2$, $u_{12} = 12^2$. Jedynymi liczbami Fibonacciego postaci $2x^2$ są: $u_3 = 2 \cdot 1^2$ i $u_6 = 2 \cdot 2^2$.* ([Morl] 60).

Udowodniliśmy (patrz 9.8.5), że równanie

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Teraz możemy dokładniej opisać wszystkie rozwiązania naturalne tego równania.

9.9.5. *Każda para* $(u_{2n-1},\ u_{2n+1})$*, gdzie* $n \in \mathbb{N}$*, jest rozwiązaniem naturalnym równania*

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy$$

i każde rozwiązanie naturalne tego równania (x, y)*, spełniające nierówność* $x < y$*, jest takiej postaci.* ([S59] 31).

D. Niech (x, y) będzie rozwiązaniem naturalnym danego równania, spełniającym nierówność $x < y$. Mnożymy dane równanie przez 4 i otrzymujemy równoważne równanie

$$(2y - 3x)^2 - 5x^2 = -4.$$

Istnieje zatem (na mocy 9.9.1) takie $n \in \mathbb{N}$, że

$$(2y - 3x,\ x) = (u_{2n-2} + u_{2n},\ u_{2n-1}).$$

Wtedy $x = u_{2n-1}$, $2y - 3x = u_{2n-2} + u_{2n}$ i mamy:

$$2y = u_{2n-2} + u_{2n} + 3u_{2n-1} = 2\,(u_{2n} + u_{2n-1}) = 2u_{2n+1},$$

a więc $(x, y) = (u_{2n-1}, u_{2n+1})$. ⊠

Wykazaliśmy w szczególności, że dla liczb Fibonacciego zachodzi równość:

9.9.6. $u_{2n-1}^2 + u_{2n+1}^2 + 1 = 3u_{2n-1}u_{2n+1}$.

Rozwiązania naturalne równania

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy$$

posiadają interesującą własność. Zauważmy, że jeśli (x, y) jest rozwiązaniem naturalnym tego równania, to

$$x \mid y^2 + 1, \quad y \mid x^2 + 1.$$

W drugim podrozdziale następnego rozdziału wykażemy, że każda para liczb naturalnych (x, y), spełniająca powyższy warunek, jest rozwiązaniem naturalnym omawianego równania.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.10 Sześciany

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.10.1. *Istnieje nieskończenie wiele czwórek (x, y, z, t) parami różnych liczb całkowitych takich, że*

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 2 \quad \textit{oraz} \quad x + y + z + t = 2. \qquad \text{([Kw] 4/2002 s.6).}$$

D. ([Kw] 2/2004 s.56). Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że

$$b^2 - 2a^2 = 2.$$

Dla każdej takiej pary (a, b) przyjmijmy: $x = 2+a$, $y = 2-a$, $z = b-1$, $t = -b-1$. Wtedy $x+y+z+t = 2$ oraz $x^3+y^3+z^3+t^3 = (8+12a+6a^2+a^3)+(8-12a+6a^2-a^3)+(b^3-3b^2+3b-1)-(b^3+3b^2+3b+1) = 14 - 6(b^2 - 2a^2) = 14 - 6 \cdot 2 = 2$. ⊠

9.10.2. *Rozwiązania naturalne (x, y) równania Pella*

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

posiadają ciekawą własność. Liczba x jest zawsze nieparzysta, a liczba y parzysta. Niech $x = 2a + 1$, $y = 2b$ i oznaczmy: $x_1 = b + 1$, $x_2 = a$, $x_3 = b - 1$, $x_4 = a + 1$. Liczby x_1, x_2, x_3, x_4 spełniają równanie

$$x_1^3 + x_2^3 = x_3^3 + x_4^3 + 1.$$

Równanie to ma więc nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Przykłady:

$$7^3 + 8^3 = 5^3 + 9^3 + 1,\ 36^3 + 49^3 = 34^3 + 50^3 + 1,\ 205^3 + 288^3 = 203^3 + 289^3 + 1.$$

([S50] 304).

Stąd w szczególności wynikają następujące dwa wnioski.

9.10.3. *Równanie*

$$x_1^3 + x_2^3 = x_3^3 + x_4^3 + x_5^3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.

9.10.4. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których liczby*

$$n \quad i \quad n + 1$$

są sumami dwóch sześcianów liczb naturalnych. ([S59] 468).

D. Sposób I. Wiemy (na mocy 9.10.2), że równanie

$$x_1^3 + x_2^3 = x_3^2 + x_4^3 + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (x_1, x_2, x_3, x_4) będzie jednym z takich rozwiązań. Niech

$$n = x_3^3 + x_4^3.$$

Wtedy n jest sumą dwóch sześcianów liczb naturalnych oraz liczba

$$n+1 = x_1^3 + x_2^3$$

również jest taką sumą. W 9.10.2 podany jest sposób konstruowania pewnych rozwiązań omawianego równania, związanych z równaniem Pella

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

. Jest więc oczywiste, że takich liczb naturalnych n jest nieskończenie wiele. ⊠

D. Sposób II ([S59] 468). Wykażemy (i to wystarczy), że równanie

$$(x+13)^3 + (y+14)^3 = (x+3)^3 + (y+17)^3 + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze w nieujemnych liczb całkowitych. Ponieważ

$$13^3 + 14^3 = 3^3 + 17^3 + 1,$$

więc jednym takim rozwiązaniem jest $(x,y) = (0,0)$. Łatwo sprawdzić, że jeśli para (x,y) jest rozwiązaniem, to para

$$(11x + 6y + 173,\ 20x + 11y + 315)$$

również jest rozwiązaniem. ⊠

Bardzo interesujące jest następujące twierdzenie Mordella, które ma zaskakująco prosty dowód.

9.10.5 (Mordell 1957)**.** *Dla dowolnej liczby naturalnej n rozpatrzmy równanie*

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = n.$$

Załóżmy, że równanie to ma rozwiązanie całkowite $(x,y,z,w) = (a,b,c,d)$ takie, że liczba

$$-(a+b)(c+d)$$

jest dodatnia i niekwadratowa oraz $a \neq b$, $c \neq d$. Wtedy równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych. ([Morl] 58).

D. ([Morl] 58). Niech $x = a + X$, $y = b - X$, $z = c + Y$, $w = d - Y$. Wtedy

$$(a+b)X^2 + (a^2 - b^2)X + (c+d)Y^2 + (c^2 - d^2)Y = 0$$

i teza wynika z twierdzenia Gaussa 9.8.1. ⊠

Analizując dokładniej podany w tej książce dowód twierdzenia Gaussa 9.8.1, powyższe twierdzenie Mordella można wysłowić w następujący sposób.

9.10.6. *Niech $q \in \mathbb{Z}$. Załóżmy, że istnieją liczby całkowite a, b, c, d takie, że*

$$a^3 + b^3 = c^3 + d^3 + q, \quad a \neq b, \quad c \neq d, \quad (a+b)(c+d) > 0$$

oraz liczba $(a+b)(c+d)$ jest niekwadratowa. Wtedy równanie

$$x^3 + y^3 = z^3 + w^3 + q$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.

Zanotujmy pewne wnioski wynikające z powyższego twierdzenia Mordella.

9.10.7. *Równanie*

$$x_1^3 + x_2^3 = x_3^3 + x_4^3 + 6$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych ([S59] 466).

D. Sposób I. Wynika to z równości

$$5^3 + 6^3 = 7^3 + (-2)^3 + 6$$

oraz twierdzenia 9.10.6. ⊠

D. Sposób II ([S59] 466). Wykażemy, że równanie

$$(x+5)^3 + (y+6)^3 = (x-2)^3 + (y+7)^3 + 6$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze w nieujemnych liczb całkowitych. Ponieważ

$$5^3 + 6^3 = 7^3 + (-2)^3 + 6,$$

więc jednym takim rozwiązaniem jest $(x, y) = (0, 0)$. Łatwo sprawdzić, że jeśli para (x, y) jest rozwiązaniem, to para

$$(8x + 3y + 30,\ 21x + 8y + 77)$$

również jest rozwiązaniem. ⊠

9.10.8. *Jeśli q jest liczbą naturalną podzielną przez 3, to równanie*

$$x_1^3 + x_2^3 = x_3^3 + x_4^3 + q$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ([S59] 466).

Przedstawimy teraz jeszcze inne równania diofantyczne z sześcianami, dla których problem istnienia rozwiązań sprowadza się do zbadania odpowiednich równań Pella.

9.10.9. *Równanie $x^2 - 5y^2 = 1$ jest równoważne równaniu*

$$(x+1)^3 + (y-5)^3 + 7^3 = (x-1)^3 + (y+5)^3 + 1^3.$$

Stąd wynika, że równanie

$$x_1^3 + x_2^3 + 7^3 = x_3^3 + x_4^3 + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Najmniejszą tego rodzaju równością jest

$$162^3 + 67^3 + 6^3 = 160^3 + 77^3 + 1^3. \quad \text{([S50] 304).}$$

9.10.10. *Równanie*

$$(x+1)^3 - x^3 = y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Wszystkie rozwiązania naturalne tego równania są postaci (x_n, y_n), gdzie $x_0 = 0, y_0 = 1$,

$$x_{n+1} = 7x_n + 4y_n + 3, \quad y_{n+1} = 12x_n + 7y_n + 6.$$

([S88] 99, [Kw] 3(2002) s.7).

D. Po przekształceniu równanie to sprowadza się do równania

$$u^2 - 3v^2 = 1,$$

gdzie $u = 2y$, $v = 2x + 1$. ⊠

9.10.11. *Jeśli różnica dwóch kolejnych sześcianów jest liczbą kwadratową równą n^2, to n jest sumą kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych.* ([Mon] 57(1950) 189-190, [S59] 113).

9.10.12. *Jeśli różnica dwóch kolejnych sześcianów jest liczbą kwadratową równą n^2, to $2n-1$ jest również liczbą kwadratową.* ([Djuk]).

9.10.13 (A. Rotkiewicz 1961). *Równanie*

$$x^3 - y^3 = (x-y)^5$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Każde rozwiązanie naturalne jest postaci $(x, y) = (v(u+1), vu)$, gdzie para (u, v) jest rozwiązaniem naturalnym równania

$$(x+1)^3 - x^3 = y^2.$$

([S88] 100).

9.10.14. *Równanie*

$$(x+2)^3 - x^3 = y^2$$

nie ma rozwiązań naturalnych. ([Kw] 3(2002) s.7).

D. Po przekształceniu równanie to sprowadza się do równania

$$2u^2 - 3v^2 = 1,$$

które nie ma rozwiązań naturalnych. ⊠

9.10.15. *Równanie*

$$x^3 + y^3 = z^2 - 2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych. ([S59] 467).

D. ([S59] 467). Wystarczy na przykład wykazać, że równanie

$$(1+2x)^3 + (1-2x)^3 = (2y)^2 - 2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych. Ale równanie to sprowadza się do równania Pella

$$x^2 - 6y^2 = 1.$$

Teza więc jest oczywista. ⊠

9.10.16. *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych x, y, z, które spełniają równość*

$$x^3 + y^3 = z^2 + 1.$$

(Mordell 1955, [S59] 467).

D. ([S59] 467). Wystarczy wykazać, że równanie

$$(1+x)^3 + (1-x)^3 = y^2 + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych. To równanie sprowadza się do równania $y^2 - 6x^2 = 1$. Teza więc jest oczywista. ⊠

★ L. J. Mordell, *On the four integer cube problem*, [Jlms] 11(1936) 208-218. Addendum 12(1937), 80. Corrigendum 32(1957), 383.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.11 Trójkąty Herona

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Trójkąt Herona, to taki trójkąt, którego pole oraz długości wszystkich boków są liczbami wymiernymi. Pewne fakty i informacje dotyczące takich trójkątów znajdziemy w [N15]. Teraz wykorzystamy równanie Pella do opisu pewnego typu trójkątów Herona.

9.11.1. *Istnieje nieskończenie wiele trójkątów, których długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi i pole jest liczbą naturalną.*

Dokładniej, długości $a \leqslant b \leqslant c$, boków trójkąta, są kolejnymi liczbami naturalnymi i pole jest liczbą naturalną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = 2x - 1, \quad b = 2x, \quad c = 2x + 1,$$

gdzie x jest liczbą naturalną spełniającą równość

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

dla pewnego naturalnego y. Wtedy pole jest równe $3xy$. ([S50] 259-261, [ME] 6(3)(2001)).

D. ([S50], [ME]). Niech $z-1$, z i $z+1$, gdzie $2 \leqslant z \in \mathbb{N}$, będą długościami boków trójkąta. Wtedy połowa obwodu jest równa $\frac{3}{2}z$ i pole (na mocy wzoru Herona) jest równe

$$S = \frac{z}{4}\sqrt{3(z^2-4)}.$$

Jeśli pole ma być liczbą naturalną, to z musi być liczbą parzystą. Niech $z = 2x$. Wtedy

$$S = x\sqrt{3(x^2-1)}.$$

Stąd dalej wynika, że $x^2 - 1$ musi być postaci $3y^2$, gdzie $y \in \mathbb{N}$. Poszukiwanie trójkątów spełniających podane warunki sprowadza się więc do rozwiązań naturalnych równania $x^2 - 3y^2 = 1$. ⊠

Z tego dowodu można wywnioskować:

9.11.2. *Istnieje nieskończenie wiele trójkątów, których długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi i pole jest liczbą wymierną. Pole takiego trójkąta jest zawsze liczbą naturalną.* ([S50] 259-261).

★ R. J. Clarke, *Triangles, surds and Pell's equation*, [MG] 497(1999) 221-225.

E. Kieith LLoyd, *The standard deviation of* $1, 2, \ldots, n$ *- Pell equation and rational triangles*, [MG] 81 491(1997) 231-243.

W. Sierpiński, *Zastosowanie równania Pella*, [S50] 259-261.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
9.12 Silnie i symbole Newtona
oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.12.1. *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczba $n!$ jest podzielna przez n^2+1.* ([Kw] z.M618, [ME] 6(3)(2001), [Kw] 4(2002) s.6).

D. ([ME]). Równanie $x^2-5y^2=-1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (x,y) będzie dowolnym jego rozwiązaniem naturalnym, ale takim, że $y>5$. Wtedy $5<y<2y\leqslant x$, gdyż $4y^2\leqslant 5y^2-1=x^2$. Niech $n=x$. Wtedy

$$2(n^2+1)=2\cdot 5y^2=5\cdot y\cdot 2y$$

i przy tym $n!=1\cdots 5\cdots y\cdots 2y\cdots x$. Zatem n^2+1 dzieli $n!$. ⊠

9.12.2. *Dla dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha>0$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczba $[n\alpha]!$ jest podzielna przez n^2+1.* ([Kw] 4(2002) s.6).

9.12.3. *Jeśli $d>1$ jest niekwadratową liczbą naturalną, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczba $n!$ jest podzielna przez dn^2+1.* ([Mon] 117(5)(2010) z.11358 s.459-460).

D. ([Mon]). Niech (u,v) będzie rozwiązaniem naturalnym równania Pella

$$x^2-dy^2=1$$

takim, że $u>3\sqrt{d}$ (oczywiście takie rozwiązanie istnieje). Istnieje wtedy (patrz 1.3.6) nieskończenie wiele rozawiązań naturalnych (x,y), w których liczba x jest podzielna przez u; wśród nich jest nieskończenie wiele takich, że $x>2u^2$. Ustalmy jedno takie rozwiązanie (x,y) i niech $n=y$. Udowodnimy, że $dn^2+1\mid n!$.

Niech $s=\dfrac{x}{u}$. Wtedy

$$s=\frac{x}{u}>\frac{2u^2}{u}=2u,$$

a więc $s>2u$. Ponadto,

$$x<\frac{3n}{2}\sqrt{d}.$$

Istotnie, $x^2=1+dn^2<dn^2+dn^2<dn^2+dn^2+\frac{1}{4}dn^2=\frac{9}{4}dn^2$ i stąd $x<\frac{3n}{2}\sqrt{d}$.. Zatem

$$s=\frac{x}{u}<\frac{\frac{3}{2}n\sqrt{d}}{u}<\frac{\frac{3}{2}n\sqrt{d}}{3\sqrt{d}}=\frac{1}{2}n.$$

Ponieważ $dn^2+1=x^2=(su)^2$, więc dn^2+1 dzieli liczbę $4s^2u^2=s\cdot 2s\cdot u\cdot 2u$. Ale

$$u<2u<s<2s<n,$$

więc iloczyn $u\cdot 2u\cdot s\cdot 2s=4s^2u^2$ dzieli liczbę $n!$, a zatem dn^2+1 dzieli $n!$. ⊠

U. W [Mon] podano również inne dowody omawianego zadania. Wśród nich jest dowód, podany przez J. Guerreiro, dla dowolnej liczby naturalnej d (niekoniecznie niekwadratowej); każda liczba naturalna postaci

$$n=dk^2(d+1)^2+k(d+1)+1,$$

gdzie $k > 1$ jest liczbą naturalną, posiada rozważaną własność.

Zanotujmy również, że autor tego zadania, Marian Tetiva z Rumunii, udowodnił, że jeśli a, b, c są liczbami całkowitymi, z których co najmniej jedna jest różna od zera, to istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że liczba $an^2 + bn + c$ dzieli liczbę $n!$. Wspomniany autor pyta się czy coś podobnego zachodzi dla wielomianów wyższych stopni. ⊠

9.12.4. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, k, dla których zachodzi równość*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k+1}.$$

D. ([Barb] s.23,144). Rozważana równość sprowadza się do równości

$$x^2 - 5y^2 = -4,$$

gdzie $x = 5m + 4$, $y = 2n - 3m - 2$. ⊠

9.12.5. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, k takich, że $k < n$ oraz*

$$\binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \quad \text{([Djuk])}.$$

D. ([Djuk]). Mnożymy daną równość przez $\dfrac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}$ i otrzymujemy:

$$k(k+1) = 2(k+1)(n-k+1) + (n-k)(n-k+1)$$

i stąd mamy kolejno: $n^2 + 3n + 2 = 2k^2 + 2k$, $4n^2 + 12n + 8 = 8k^2 + 8k$ i stąd

$$(2n+3)^2 - 2(2k+1)^2 = -1.$$

Równanie $x^2 - 2y^2 = -1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. W każdym jego rozwiązaniu naturalnym (x, y) liczby x, y są nieparzyste. Niech (x, y) będzie dowolnym rozwiązaniem naturalnym z liczbą x większą od 3. Wtedy para

$$(n, k) = \left(\frac{x-3}{2}, \frac{y-1}{2}\right)$$

spełnia daną równość z symbolami Newtona i oczywiście $k < n$. Jest jasne, że takich par (n, k) jest nieskończenie wiele. ⊠

U. Rozwiązaniami naturalnymi równania $x^2 - 2y^2 = -1$ są na przykład pary $(7, 5)$, $(41, 29)$, $(239, 169)$. Z tych par powstają pary (n, k), równe odpowiednio $(2, 2)$, $(19, 14)$, $(118, 84)$. Mamy zatem równości:

$$\binom{2}{1} = 2\binom{2}{2} + \binom{2}{3}, \quad \binom{41}{28} = 2\binom{41}{29} + \binom{41}{30}, \quad \binom{239}{168} = 2\binom{239}{169} + \binom{239}{170}.$$

Wszystkie tego typu równości powstają w opisany powyżej sposób. ⊠

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.13 Liczby z pierwiastkami

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.13.1. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $m = 2 + 2\sqrt{28n^2+1}$. Jeśli m jest liczbą naturalną, to jest liczbą kwadratową.*

D. ([Djuk]). Załóżmy, że m jest liczbą naturalną. Wtedy m jest parzyste i para $\left(\frac{m}{2}-1, n\right)$ jest rozwiązaniem naturalnym równania Pella

$$x^2 - 28y^2 = 1,$$

którego najmniejszym rozwiązaniem naturalnym jest para $(x_0, y_0) = (127, 24)$. Zatem

$$\left(\frac{m}{2} - 1\right) + n\sqrt{28} = \left(127 + 24\sqrt{28}\right)^k$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Łatwo sprawdzić, że

$$m = 2 + \left(127 + 24\sqrt{28}\right)^k + \left(127 - 24\sqrt{28}\right)^k = a^2,$$

gdzie a jest liczbą naturalną równą $\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^k + \left(8 - 3\sqrt{7}\right)^k$. ⊠

9.13.2. *Niech*

$$a_n = \left[\sqrt{n^2 + (n+1)^2}\right].$$

Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że

$$a_n - a_{n-1} > 1 \quad \textit{oraz} \quad a_{n+1} - a_n = 1.$$

([ME] 6(3)(2001)).

D. ([ME]). Równanie $x^2 - 2y^2 = -1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Niech (x, y) będzie dowolnym jego rozwiązaniem naturalnym. Wtedy x jest liczbą nieparzystą. Niech $x = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Liczba naturalna n spełnia żądane warunki. ⊠

9.13.3. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k, że*

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}.$$

D. ([Kw] 3/2002). Rozpatrzmy rozwiązania naturalne równania $x^2 - dy^2 = \pm 1$. Wiemy (patrz 5.1.7), że każde rozwiązanie naturalne tego równania jest postaci (u_n, v_n), gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz u_n, v_n są liczbami naturalnymi takimi, że $u_n + v_n\sqrt{2} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n$. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wtedy równość $u_n^2 - 2v_n^2 = (-1)^n$. Zatem:

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = u_n + v_n\sqrt{2} = \sqrt{u_n^2} + \sqrt{2v_n^2} = \sqrt{u_n^2} + \sqrt{u_n^2 - (-1)^n}.$$

Liczbę k definiujemy w zależności od parzystości liczby n. Jeśli n jest nieparzyste, to przyjmujemy: $k = u_n^2$. Jeśli natomiast n jest parzyste, to przyjmujemy: $k = u_n^2 - 1$. W obu przypadkach mamy równość $\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$. ⊠

W dowodzie wykorzystaliśmy rozwiązania naturalne równania $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. Ten sam dowód można powtórzyć z dowolnymi równaniami Pella.

9.13.4. *Niech (a, b) będzie naturalnym rozwiązaniem równania Pella $x^2 - dy^2 = 1$, w którym d jest niekwadratową liczbą naturalną. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k, że*

$$\left(a + b\sqrt{d}\right)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}.$$

D. Niech x_n, y_n będą liczbami naturalnymi takimi, że

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(a + b\sqrt{d}\right)^n.$$

Wtedy $x_n^2 - dy_n^2 - 1$ i dla $k = x_n^2 - 1$ mamy: $\left(a + b\sqrt{d}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{d} = \sqrt{x_n^2} + \sqrt{y_n^2 d} = \sqrt{x_n^2} + \sqrt{x_n^2 - 1} = \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$. ⊠

W podobny sposób wykazujemy:

9.13.5. *Niech (a, b) będzie naturalnym rozwiązaniem równania $x^2 - dy^2 = -1$, w którym d jest niekwadratową liczbą naturalną. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k, że*

$$\left(a + b\sqrt{d}\right)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}.$$

Zanotujmy szczególny przypadek powyższych faktów.

9.13.6. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k, że*

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}.$$

9.13.7. *Dla dowolnych liczb naturalnych m, n, d istnieje taka liczba naturalne k, że*

$$\left(\sqrt{m} = \sqrt{m+1}\right)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k + d^n}.$$ ([Kw] 3/2002).

9.13.8. *Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Istnieje wtedy taka liczba naturalne k, że*

$$\left(\frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}\right)^m = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$ ([Kw] 3/2002).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.14 Inne zastosowania

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.14.1. *Istnieje wielomian $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, stopnia 2, który nie jest kwadratem wielomianu stopnia 1 i którego obraz $f(\mathbb{Z})$ ma nieskończenie wiele liczb kwadratowych.* ([Kw] 2(2002) s.6).

D. Takim wielomianem jest na przykład $f(t) = 2t^2 + 1$. Obraz ma nieskończenie wiele liczb kwadratowych, gdyż równanie $y^2 - 2x^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ⊠

9.14.2. *Jedynym rozwiązaniem naturalnym równania*

$$5^a - 3^b = 2$$

jest $a = b = 1$.

D. ([ME] 6(3)(2001)). Jeśli $a = 1$ lub $b = 1$, to odpowiednio $b = 1$ i $a = 1$. Załóżmy, że $a \geqslant 2$ i $b \geqslant 2$. Modulo 4 mamy wtedy $3^b \equiv 3$ i stąd wnioskujemy, że b jest nieparzyste. Ponadto,

$$2^a \equiv 2 \pmod 3$$

i wobec tego a jest również nieparzyste. Niech

$$x = 3^b + 1, \quad y = 3^{(b-1)/2} 5^{(a-1)/2}.$$

Wtedy $x^2 - 15y^2 = 1$. Najmniejszym rozwiązaniem naturalnym równania

$$x^2 - 15y^2 = 1$$

jest para $(4, 1)$. Każde więc rozwiązanie naturalne jest postaci (x_n, y_n), gdzie

$$x_n + y_n\sqrt{15} = \left(4 + \sqrt{15}\right)^n.$$

W naszym przypadku $3 \mid y$. Łatwo wykazać, że przez 3 są podzielne tylko liczby postaci y_{3m} oraz, że wszystkie liczby postaci y_{3m} są podzielne przez 7. Tymczasem $7 \nmid y$. ⊠

9.14.3. *Liczba* $3^n - 2$ *jest kwadratowa tylko wtedy, gdy* $n = 1$ *lub* $n = 3$. ([Djuk]).

★ T. Andreescu, D. Andrica, I. Cucurezeanu, *Pell-type equations*, [AnAC] 117-145.
T. Andreescu, R. Gelca, *Pell equations*, [AndG] 80-83.
D. P. Wegener, *An application of Pell's equation*, [FQ] 19(1981) 450-451.

Literatura

[AnAC] T. Andreescu, D. Andrica, I. Cucurezeanu, *An Introduction to Diophantine Equations*, Birkhäuser, 2010.

[AnAn] T. Andreescu, D. Andrica, *An Introduction to Diophantine Equations*, GIL Publishing Hause 2002.

[AndG] T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2004.

[B-rs] J. Browkin, J. Rempała, S. Straszewicz, *25 lat Olimpiady Matematycznej*, WSiP, Warszawa, 1975.

[Barb] E. J. Barbeau, *Pell's Equation*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2003.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Djuk] D. Djukić, *Pell's Equation*, Olympiad Taining Materials, 2007.

[Flth] D. E. Flath, *Introduction to Number Theory*, John Wiley & Sons, 1989.

[FQ] The Fibonacci Quarterly, czasopismo matematyczne.

[GaT] G. A. Galpierin, A. K. Tołpygo, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), 1935-1985, Moskwa, 1986.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[Jlms] Journal of the London Mathematical Society, (J. London. Math. Soc.)

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[ME] Mathematical Excalibur, chińskie popularne czasopismo matematyczne, Hong Kong.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2012.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[Morl] L. J. Mordell, *Diophantine Equations*, Academic Press, London and New York, 1969.

[N-3] A. Nowicki, *Liczby Kwadratowe*, Podróże po Imperium Liczb, cz.3, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2009; Wydanie drugie 2012.

[N-7] A. Nowicki, *Ciągi Rekurencyjne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.7, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2010; Wydanie drugie 2012.

[N-8] A. Nowicki, *Liczby Mersenne'a, Fermata i Inne Liczby*, Podróże po Imperium Liczb, cz.8, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2010; Wydanie drugie 2012.

[N15] A. Nowicki, *Liczby, Funkcje, Ciągi, Zbiory, Geometria*, Podróże po Imperium Liczb, cz.15, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pjap] Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences.

[S50] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa - Wrocław, 1950.

[S56] W. Sierpiński, *O Rozwiązywaniu Równań w Liczbach Całkowitych*, PWN, Warszawa, 1956.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[S62] W. Sierpiński, *Liczby Trójkątne*, Biblioteczka Matematyczna 12, PZWS, Warszawa, 1962.

[S88] W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers*, Editor: A. Schinzel, North-Holland Mathematical Library, Vol. 31, 1988.

[Str72] S. Straszewicz, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom IV, 16-20, 64/65 - 68/69, PZWS, Warszawa, 1972.

[Uls] M. Ulas, *On certain diophantine equations related to triangular and tetrahedral numbers*, XI Międzynarodowe Warsztaty dla Młodych Matematyków, *Teoria Liczb*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 2009, 211-222.