Podróże po Imperium Liczb

Część 14. Równanie Pella

Rozdział 10

10. Pary liczb całkowitych i zastosowania równania Pella

Andrzej Nowicki 10 kwietnia 2013, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

10 Pary liczb całkowitych i zastosowania równania Pella

W tym rozdziale zajmować się będziemy parami liczb całkowitych (a, b) takimi, że

$$a \mid f(b) \quad \text{oraz} \quad b \mid f(a),$$

gdzie $f(x)$ jest niezerowym wielomianem o współczynnikach całkowitych. Szczególnie interesować nas będą takie pary, w których a i b są liczbami naturalnymi.

W pierwszym podrozdziale mówić będziemy o takich parach przy założeniu, że $f(x)$ jest wielomianem pierwszego stopnia. W następnych podrozdziałach stopień wielomianu $f(x)$ będzie większy od jedynki. Najwięcej miejsca zajmować będą wielomiany drugiego stopnia. W tym przypadku ważną rolę odgrywać będą równania Pella.

10.1 Pary i wielomiany liniowe

10.1.1. *Znaleźć wszystkie pary liczb naturalnych (a, b) takie, że*

$$a \mid b+1, \quad b \mid a+1 \quad \textit{oraz} \quad a \leqslant b.$$

Odp. $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$. ([Mat] 5/56 72).

10.1.2. *Istnieje dokładnie 5 par liczb naturalnych (a, b) takich, że:*

$$a \mid b+2, \quad b \mid a+2 \quad \textit{oraz} \quad a \leqslant b.$$

Są to pary: $(1,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,6)$.

10.1.3. *Istnieje dokładnie 7 par liczb naturalnych (a, b) takich, że:*

$$a \mid b+3, \quad b \mid a+3 \quad \textit{oraz} \quad a \leqslant b.$$

Są to pary: $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,4)$, $(2,5)$, $(3,3)$, $(3,6)$, $(6,9)$.

10.1.4. *Istnieje dokładnie 10 par liczb naturalnych (a, b) takich, że:*

$$a \mid 5b+1, \quad b \mid 5a+1 \quad \textit{oraz} \quad a \leqslant b.$$

Są to pary: $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,6)$, $(2,11)$, $(3,4)$, $(3,16)$, $(4,7)$, $(6,31)$, $(7,18)$.

10.1.5. *Istnieje dokładnie 13 par liczb naturalnych (a, b) takich, że:*

$$a \mid 7b+1, \quad b \mid 7a+1 \quad \textit{oraz} \quad a \leqslant b.$$

Są to pary: $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,4)$, $(1,8)$, $(2,3)$, $(2,5)$, $(2,15)$, $(3,11)$, $(4,29)$, $(5,12)$, $(8,57)$, $(9,32)$, $(12,17)$.

10.1.6. *Dla danych liczb naturalnych u oraz m rozpatrzmy zbiór*

$$\Big\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ x \mid uy+m,\ y \mid ux+m,\ x\leqslant y\Big\}.$$

Każdy taki zbiór jest niepusty i skończony.

D. Oznaczmy ten zbiór przez A. Jest on niepusty, gdyż należy do niego para $(1,1)$. Niech $(x,y)\in A$. Wtedy $x\leqslant y$ i istnieją takie liczby naturalne a,b, że $uy+m=ax$ oraz $ux+m=by$. Zauważmy, że

$$b=\frac{ux+m}{y}\leqslant\frac{ux+m}{x}=u+\frac{m}{x}\leqslant u+\frac{m}{1}=u+m.$$

Zatem b jest liczbą należącą do zbioru $\{1,2,\dots,u+m\}$. Ustalmy takie jedno b. Mamy wtedy:

$$b(ax)=b(uy+m)=u(by)+bm=u(ux+m)+bm=u^2x+um+bm$$

i stąd $(ab-u^2)x=m(u+b)$. Oczywiście $(ab-u^2)\neq 0$ (gdyż $m(u+b)>0$). Liczba naturalna x jest więc dzielnikiem liczby $m(u+b)$. Przy ustalonym b, liczb x może zatem być co najwyżej skończenie wiele. Ale

$$y=\frac{ux+m}{b},$$

więc przy ustalonym b istnieje co najwyżej skończenie wiele rozważanych par (x,y). Liczb b jest tylko skończenie wiele, a zatem zbiór A jest skończony. ⊠

10.1.7. *Znaleźć wszystkie pary (a,b) liczb naturalnych takich, że*

$$a\leqslant b,\quad b \mid 4a-1\quad \textit{oraz}\quad a \mid 4b-1.$$

Odp. $(1,1)$, $(1,3)$, $(5,19)$, $(7,9)$. ([Par] 1999(1) Q1035).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.2 Pary (a,b) takie, że $a \mid b^2+1$ oraz $b \mid a^2+1$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W poprzednim rozdziale, w podrozdziale o liczbach Fibonacciego, zajmowaliśmy się równaniem

$$x^2+y^2+1=3xy.$$

Rozwiązania naturalne tego równania posiadają interesującą własność. Jeśli (x,y) jest rozwiązaniem naturalnym tego równania, to

$$(*)\qquad x \mid y^2+1,\quad y \mid x^2+1.$$

Wykażemy, że każda para liczb naturalnych (x,y), spełniająca warunek $(*)$, jest rozwiązaniem naturalnym omawianego równania. W tym celu rozważmy zbiór

$$\mathcal{A}=\Big\{(a,b)\in\mathbb{N}^2;\ a \mid b^2+1,\ b \mid a^2+1,\ a\leqslant b\Big\}.$$

Zauważmy, że $(1,1)\in\mathcal{A}$; zbiór $\mathcal{A}$ jest więc niepusty. Łatwo dowodzi się (co będzie również wynikać z podanych tutaj stwierdzeń), że:

10.2.1. *Zbiór $\mathcal{A}$ jest nieskończony.* ([OM] Australia 1990, [N-6]).

Jest oczywiste, że jeśli $(a,b)\in\mathcal{A}$, to liczby a,b są względnie pierwsze. Jedyną więc parą (a,b) spełniającą warunek $a=b$ i należącą do $\mathcal{A}$ jest para $(1,1)$. Zbiór $\mathcal{A}\smallsetminus\{(1,1)\}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{A}^*$;

$$\mathcal{A}^*=\mathcal{A}\smallsetminus\{(1,1)\}=\Big\{(a,b)\in\mathbb{N}^2;\ a\mid b^2+1,\ b\mid a^2+1,\ a<b\Big\}.$$

Dla każdej pary (a,b), należącej do zbioru $\mathcal{A}$, oznaczmy przez $f(a,b)$ oraz $g(a,b)$ pary liczbowe określone następująco:

$$f(a,b)=\left(b,\ \frac{b^2+1}{a}\right),\quad g(a,b)=\left(\frac{a^2+1}{b},\ a\right).$$

10.2.2. *Niech $(a,b)\in\mathcal{A}$. Wtedy:*

(1) *$f(a,b)\in\mathcal{A}^*$;*

(2) *$g(a,b)\in\mathcal{A}$, gdy $(a,b)\neq(1,1)$;*

(3) *$f\Big(g(a,b)\Big)=(a,b)$ oraz $g\Big(f(a,b)\Big)=(a,b)$;*

([S56], [S59] 28-29).

D. (1). Ponieważ $a\mid b^2+1$, więc $b^2+1=ya$ dla pewnego $y\in\mathbb{N}$. Wtedy $b\mid ya-1$ i tym bardziej $b\mid y^2a^2-1$. Ale $b\mid a^2+1$, więc $b\mid y^2a^2+y^2$ i stąd $b\mid y^2+1$. Mamy więc: $b\mid y^2+1$ oraz $y\mid b^2+1$. Ponadto,

$$y=\frac{b^2+1}{a}\geqslant\frac{b^2+1}{b}=b+\frac{1}{b}>b.$$

Zatem $f(a,b)=(b,y)\in\mathcal{A}^*$.

(2). Załóżmy, że $(a,b)\neq(1,1)$. Mamy wtedy nierówność $a<b$. Ponieważ $b\mid a^2+1$, więc $a^2+1=ub$ dla pewnego $u\in\mathbb{N}$. Wtedy $a\mid ub-1$ i tym bardziej $a\mid u^2b^2-1$. Ale $a\mid b^2+1$, więc $a\mid u^2b^2+u^2$ i stąd $a\mid u^2+1$. Mamy więc: $a\mid u^2+1$ oraz $u\mid a^2+1$. Ponadto,

$$u=\frac{a^2+1}{b}<\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}\leqslant a+1,$$

czyli $u\leqslant a$. Zatem $g(a,b)=(u,a)\in\mathcal{A}$.

(3). $f\Big(g(a,b)\Big)=f\left(\frac{a^2+1}{b},\ a\right)=\left(a,\ \frac{a^2+1}{\frac{a^2+1}{b}}\right)=(a,b)$ i podobnie $g\Big(f(a,b)\Big)=(a,b)$. ⊠

Mamy zatem dwie, wzajemnie odwrotne, funkcje

$$f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^*\quad\text{oraz}\quad g:\mathcal{A}^*\to\mathcal{A}.$$

Niech (a,b) będzie dowolną parą należącą do $\mathcal{A}$, różną od $(1,1)$. Oznaczmy przez (a_1,b_1) parę $g(a,b)$. Wtedy $a_1\leqslant b_1=a_0$. Jeśli $a_1=b_1$, to (a_1,b_1) jest parą $(1,1)$. Jeśli natomiast $a_1<b_1$, to $(a_1,b_1)\in\mathcal{A}^*$ i mamy nową parę

$$(a_2,b_2)=g(a_1,b_1)=g(g((a,b))=g^2(a,b).$$

Kontynuujemy to postępowanie tak długo, aż dojdziemy do pary $(1,1)$. Do pary $(1,1)$ zawsze dojdziemy, gdyż istnieje tylko skończenie wiele liczb naturalnych mniejszych od a.

Dla każdej pary $(a,b) \in \mathcal{A}^*$ istnieje zatem taka liczba naturalna n, że

$$g^n(a,b) = (1,1).$$

Ponieważ funkcje f i g są wzajemnie odwrotne, więc z z równości $g^n(a,b) = (1,1)$ wynika równość

$$(a,b) = f^n(1,1).$$

Udowodniliśmy następujące stwierdzenie.

10.2.3. *Niech a, b będą liczbami naturalnymi. Para (a,b) należy do zbioru $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka nieujemna liczba całkowita n, że $(a,b) = f^n(1,1)$.* ([S56], [S59] 28-29).

Wszystkie elementy zbioru $\mathcal{A}$ tworzą więc nieskończony ciąg

$$(1,1),\ f(1,1),\ f^2(1,1),\ f^3(1,1),\ \dots,$$

czyli ciąg $(1,1),\ (1,2),\ (2,5),\ (5,13),\ (13,34),\ (34,89),\ (89,233),\ (233,610), (610,1597), \cdots$. Spójrzmy dokładniej na wyrazy tego ciągu. Oznaczmy te wyrazy przez (x_n, y_n), tzn.

$$(x_n, y_n) = f^{n-1}(1,1) \quad \text{dla} \quad \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n) = \left(y_n, \dfrac{y_n^2+1}{x_n}\right)$, więc

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2+1}{x_n}.$$

10.2.4. ([S59] 30). *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$x_n^2 + y_n^2 + 1 = 3x_ny_n.$$

D. (Indukcja ze względu na n). Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Załóżmy, że badana równość zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + 1 &= y_n^2 + \left(\frac{y_n^2+1}{x_n}\right)^2 + 1 = (y_n^2+1)\left(1 + \frac{y_n^2+1}{x_n^2}\right) \\ &= (y_n^2+1)\frac{x_n^2+y_n^2+1}{x_n^2} = (y_n^2+1)\frac{3x_ny_n}{x_n^2} = 3(y_n^2+1)\frac{y_n}{x_n} = 3y_n\frac{y_n^2+1}{x_n} \\ &= 3x_{n+1}y_{n+1} \end{aligned}$$

i to kończy dowód. ⊠

Korzystając z powyższych stwierdzeń można łatwo udowodnić następujące interesujące twierdzenie.

10.2.5 (W. H. Mills, W. Sierpiński)**.** *Niech $x < y$ będą liczbami naturalnymi. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(1) *Para (x,y) jest naturalnym rozwiązaniem równania $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$.*

(2) $x \mid y^2 + 1$ *oraz* $y \mid x^2 + 1$.

(3) *Istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$\Big(x, y\Big) = \Big(u_{2n-1},\ u_{2n+1}\Big),$$

gdzie u_m oznacza m-tą liczbę Fibonacciego.

D. Równoważność (1) $\iff$ (3) wykazaliśmy w 9.9.5. Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2) jest oczywista. Implikację (2) $\Rightarrow$ (1) wykazaliśmy w 10.2.4. ⊠

Zanotujmy pewne wnioski wynikające z tego twierdzenia.

10.2.6. *Niech k będzie liczbą naturalną. Równanie*

$$x^2 + y^2 + 1 = kxy$$

ma rozwiązanie naturalne wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 3$. ([S59]).

D. ([S59] 31). Dla $k = 3$ mamy rozwiązanie naturalne $(1, 1)$. Niech teraz k będzie dowolną liczbą naturalną i załóżmy, że para (x, y) jest rozwiązaniem naturalnym rozpatrywanego równania. Wtedy

$$x \mid y^2 + 1 \quad \text{oraz} \quad y \mid x^2 + 1.$$

Jeśli $x = y$, to $(k - 2)x^2 = 1$ i wtedy k musi być równe 3. Załóżmy dalej, że $x < y$. Z twierdzenia 10.2.5 wynika, że para (x, y) jest rozwiązaniem naturalnym równania $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$. Wobec tego

$$kxy = x^2 + y^2 + 1 = 3xy$$

i stąd $k = 3$. ⊠

10.2.7 (A. Schinzel)**.** *Jeśli k jest liczbą naturalną różną od* 3*, to równanie*

$$x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -4$$

nie ma rozwiązań naturalnych. ([S56], [S59]).

D. (W. Sierpiński [S59] 31-32). Przypuśćmy, że u, v, k są takimi liczbami naturalnymi, że

$$u^2 - (k^2 - 4)v^2 = -4.$$

Wtedy liczby u, kv są jednocześnie parzyste lub nieparzyste, a zatem liczba $x = (u + kv)/2$ jest naturalna. Niech $y = v$. Wtedy $u = 2x - ky$, $v = y$ i mamy równość $4x^2 - 4kxy + 4y^2 = -4$, czyli

$$x^2 + y^2 + 1 = kxy,$$

a zatem (na mocy poprzedniego wniosku) $k = 3$. ⊠

10.2.8. *Jeśli $\dfrac{x^2+1}{y^2} + 4$ jest kwadratową liczbą naturalną, to*

$$\frac{x^2+1}{y^2} = 5. \quad \text{([Djuk])}.$$

D. Niech $\dfrac{x^2+1}{y^2} + 4 = k^2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -1$ i (po pomnożeniu przez 4) mamy równość

$$u^2 - (k^2 - 4)v^2 = -4,$$

gdzie $u = 2x$ oraz $v = 2y$.

Na mocy 10.2.7 liczba k jest równa 3. Zatem $\dfrac{x^2+1}{y^2} = k^2 - 4 = 9 - 4 = 5$. ⊠

★ W. Sierpiński, *O równaniu $x^2 + y^2 + 1 = xyz$*, [S56], rozdział 12.
W. Sierpiński, *O liczbach naturalnych x, y, dla których $y \mid x^2 + 1$ oraz $x \mid y^2 + 1$*, [S59] 28-33.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.3 Konsekwencja twierdzenia Gaussa

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W poprzednim podrozdziale badaliśmy pary liczb naturalnych (x, y) takie, że $x \mid y^2 + 1$ oraz $y \mid x^2 + 1$. W tym podrozdziale zajmiemy się sytuacją ogólniejszą. Rozważać będziemy takie pary liczb całkowitych (x, y), dla których zachodzą podzielności

$$x \mid f(y) \quad \text{oraz} \quad y \mid f(x),$$

gdzie $f(z)$ jest pewnym trójmianem kwadratowym o współczynnikach całkowitych.

Następujące twierdzenie jest konsekwencją twierdzenia Gaussa **??**.

10.3.1. *Niech $f(z) = uz^2 + vz + w$ będzie trójmianem kwadratowym o współczynnikach całkowitych i niech*

$$D_0 = (2v + w)(2v + 4u + w), \quad \Delta_0 = -(v + w)^2(2v + 4u + w).$$

Jeśli D_0 jest niekwadratową liczbą dodatnią oraz Δ_0 jest liczbą różną od zera, to istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych (x, y) takich, że

$$x \mid f(y) \quad \textit{oraz} \quad y \mid f(x).$$

D. Rozpatrzmy wielomian dwóch zmiennych

$$(\star) \qquad F(x, y) = ux^2 - (2u + 2v + w)xy + uy^2 + vx + vy + w.$$

Jeśli para niezerowych liczb całkowitych (α, β) jest rozwiązaniem równania $F(x, y) = 0$, to

$$u\alpha^2 + v\alpha + u\beta^2 + v\beta + w = (2u + 2v + w)\alpha\beta$$

i wtedy $\alpha \mid f(\beta)$ oraz $\beta \mid f(\alpha)$. Wystarczy zatem udowodnić, że równanie $F(x, y) = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych. Zauważmy, że $F(1, 1) = 0$. Równanie $F(x, y) = 0$ ma więc co najmniej jedno rozwiązanie całkowite. Wykorzystajmy twierdzenie Gaussa **??** dla wielomianu $F(x, y)$. W naszym przypadku mamy: $a = u$, $b = -(2u + 2v + w)$, $c = u$, $d = v$, $e = v$, $f = w$. Ponadto,

$$D = b^2 - 4ac = (2u + 2v + w)^2 - 4u^2 = (2v + w)(2v + 4u + w) = D_0$$

oraz (co łatwo sprawdzić) $\Delta = 4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = \Delta_0$. Z twierdzenia Gaussa wynika więc, że równanie $F(x, y) = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych i to kończy dowód. ⊠

U. Stosując podstawienia podane w dowodzie twierdzenia Gaussa **??**, równanie $(\star)$ sprowadza się do równania

$$(\star\star) \qquad X^2 - (2v + w)(2v + 4u + w)Y^2 = 4u(v + w)^2(2v + 4u + w),$$

gdzie $X = (2v + w)(2v + 4u + w)y - v(2v + 4u + w)$ oraz $Y = 2ux - (2u + 2v + w)y + v$. ⊠

Przedstawimy teraz kilka zastosowań twierdzenia 10.3.1.

10.3.2. *Istnieje nieskończenie wiele par $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ takich, że*

$$x \mid (y^2 + y + 1) \quad \textit{oraz} \quad y \mid (x^2 + x + 1). \qquad \text{(Patrz 10.4.3).}$$

D. Stosujemy twierdzenie 10.3.1 dla wielomianu

$$f(z) = z^2 + z + 1.$$

Tutaj $u = v = w = 1$ oraz $D_0 = 21$ i $\Delta_0 = -28$. Liczba D_0 jest niekwadratowa i dodatnia oraz $\Delta_0 \neq 0$. Spełnione są więc założenia twierdzenia 10.3.1. ⊠

Równaniem $(\star\star)$, stowarzyszonym z trójmianem $f(z) = z^2 + z + 1$, jest

$$X^2 - 21Y^2 = 112.$$

Zbadajmy teraz omawiane pary (x, y) ze względu na wielomian

$$f(z) = z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2.$$

W tym przypadku równaniem $(\star\star)$ jest

$$X^2 - 45Y^2 = 324.$$

Jednym z jego rozwiązań naturalnych jest para $(27, 3)$.

10.3.3. *Istnieje nieskończenie wiele par* $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *takich, że*

$$x \mid (y + 1)^2 \quad \textit{oraz} \quad y \mid (x + 1)^2. \quad \text{(Patrz 10.4.6).}$$

D. Stosujemy twierdzenie 10.3.1 dla wielomianu

$$f(z) = (z + 1)^2 = z^2 + 2z + 1.$$

Tutaj $u = w = 1$, $v = 2$ oraz $D_0 = 451$ i $\Delta_0 = -91$. Liczba D_0 jest niekwadratowa i dodatnia oraz $\Delta_0 \neq 0$. Spełnione są więc założenia twierdzenia 10.3.1. ⊠

Zajmowaliśmy się trójmianami $z^2 + z + 1$ oraz $z^2 + 2z + 1$. Podobna sytuacja ma miejsce dla dowolnego trójmianu postaci

$$f(z) = z^2 + mz + 1,$$

gdzie m jest liczbą naturalną. Z twierdzenia 10.3.1 wynika, że:

10.3.4. *Dla każdej liczby naturalnej* m *istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych* (x, y) *takich, że*

$$x \mid y^2 + my + 1, \quad y \mid x^2 + mx + 1.$$

(Patrz 10.4.9).

Podamy teraz jeszcze kilka innych zastosowań twierdzenia 10.3.1.

10.3.5. *Dla każdego z podanych trójmianów* $f(z)$ *istnieje nieskończenie wiele par niezerowych liczb całkowitych* (x, y) *takich, że*

$$x \mid f(y), \quad y \mid f(z), \quad x \leqslant y.$$

W każdym przypadku podano: trójmian $f(z)$, liczby D_0 oraz Δ_0, równanie $(\star\star)$ i przykładowe pary liczb naturalnych (x, y).

(1) $f(z) = z^2 + z + 2,\ \ D_0 = 32,\ \ \Delta_0 = -72,\ \ X^2 - 32Y^2 = 288;$
$(1,1),\ (1,2),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,4),\ (2,8),\ (4,22),\ (8,37),\ (8,74),\cdots.$

(2) $f(z) = z^2 + z + 3,\ \ D_0 = 45,\ \ \Delta_0 = -144,\ \ X^2 - 45Y^2 = 576;$
$(1,1),\ (1,5),\ (3,3),\ (3,5),\ (3,15),\ (5,11),\ (5,33),\ (11,27),\ (15,81),\cdots.$

(3) $f(z) = z^2 + 2z + 2,\ \ D_0 = 60,\ \ \Delta_0 = -160,\ \ X^2 - 60Y^2 = 640;$
$(1,1),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,10),\ (5,37),\ (10,122),\ (37,289),\ (289,2273),\cdots.$

(4) $f(z) = z^2 + 2z + 3,\ \ D_0 = 77,\ \ \Delta_0 = -275,\ \ X^2 - 77Y^2 = 1100;$
$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,6),\ (2,11),\ (3,3),\ (3,6),\ (3,9),\cdots.$

(5) $f(z) = 3z^2 + 2z + 1,\ \ D_0 = 85,\ \ \Delta_0 = -153,\ \ X^2 - 85Y^2 = 1836;$
$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,6),\ (2,17),\ (3,34),\ (6,121),\ (11,193),\cdots.$

10.3.6. *Przykłady trójmianów dla których nie są spełnione założenia twierdzenia* 10.3.1. *Podano również odpowiednie liczby D_0 i Δ_0.*

(1) $f(z) = x^2 + z - 1,\ \ D_0 = 5,\ \ \Delta_0 = 0;$

(2) $f(z) = x^2 - z + 1,\ \ D_0 = -3,\ \ \Delta_0 = 0;$

(3) $f(z) = x^2 - z + 2,\ \ D_0 = 0,\ \ \Delta_0 = -4.$

10.3.7. *Ile jest par $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ takich, że $x \mid (y^2 + y - 1)$ oraz $y \mid (x^2 + x - 1)$?*

10.3.8. *Ile jest par $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ takich, że $x \mid (y^2 - y + 1)$ oraz $y \mid (x^2 - x + 1)$?*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.4 Moniczne wielomiany z symetrycznymi współczynnikami

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wykazaliśmy (patrz 10.3.2 oraz 10.3.3), że jeśli $f(z) = z^2 + z + 1$ lub $f(z) = z^2 + 2z + 1$, to istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych (x, y) takich, że $x \mid f(y)$ oraz $y \mid f(x)$. Łatwo można udowodnić (i do tego nie jest potrzebna żadna teoria dotycząca równań Pella), że istnieje nieskończenie wiele takich par składających się z liczb naturalnych. Trójmian $z^2 + z + 1$ jest wielomianem monicznym (tzn. współczynnik wiodący jest równy 1) i jest to wielomian z symetrycznymi współczynnikami. Niech

$$f(x) = p_s x^s + p_{s-1} x^{s-1} + \cdots + p_0, \qquad p_s \neq 0.$$

Mówimy, że wielomian $f(x)$ ma *symetryczne współczynniki*, jeśli

$$p_{s-i} = p_i \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Moniczne wielomiany z symetrycznymi współczynnikami posiadają następujące własności.

10.4.1. *Niech $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ będzie monicznym wielomianem z symetrycznymi współczynnikami i niech a, b będą takimi niezerowymi liczbami całkowitymi, że*

$$f(b) \neq 0, \quad a \mid f(b) \quad \textit{oraz} \quad b \mid f(a).$$

Oznaczmy przez przez c liczbę $\dfrac{f(b)}{a}$. Wtedy c jest niezerową liczbą całkowitą i zachodzą podzielności

$$b \mid f(c) \quad \textit{oraz} \quad c \mid f(b).$$

D. Niech $f(x) = x^s + p_{s-1}x^{s-1} + \cdots + p_1 x + 1$. Z równości $ac = f(b)$ wynika, że c jest niezerową liczbą całkowitą dzielącą liczbę $f(b)$. Wykażemy, że $b \mid f(c)$ czyli, że $f(c) \equiv 0 \pmod{|b|}$. W tym celu zauważmy najpierw, że liczby a i b są względnie pierwsze, $f(a) \equiv 0 \pmod{|b|}$ oraz $f(b) \equiv 1 \pmod{|b|}$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} a^s f(c) &= (ac)^s + p_{s-1}a(ac)^{s-1} + \cdots + p_1 a^{s-1}(ac) + a^s \\ &= f(b)^s + p_{s-1}af(b)^{s-1} + \cdots + p_1 a^{s-1} f(b) + a^s \\ &\equiv 1 + p_{s-1}a + \cdots + p_1 a^{s-1} + a^s = a^s + p_{s-1}a^{s-1} + \cdots + p_1 a + 1 \\ &= f(a) \equiv 0 \pmod{|b|}. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy symetryczność współczynników wielomianu $f(x)$. Zatem $b \mid a^s f(c)$ i stąd wynika, że $b \mid f(c)$ (gdyż liczby a i b są względnie pierwsze). ⊠

10.4.2. *Jeśli $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ jest monicznym wielomianem z symetrycznymi współczynnikami takim, że $f(n) > n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$, to istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) spełniających warunki:*

$$a \mid f(b), \quad b \mid f(a), \quad a < b.$$

D. Warunki te spełnia para $(a, b) = (1, f(1))$. Co najmniej więc jedna taka para istnieje. Niech (a, b) będzie dowolną parą spełniającą podane warunki. Wtedy $a \mid f(b)$, więc $c = \frac{f(b)}{a}$ jest liczbą naturalną i mamy

$$c = \frac{f(b)}{a} > \frac{f(b)}{b} > \frac{b^2}{b} = b,$$

a więc $c > b$. Wiemy (patrz 10.4.1), że $b \mid f(c)$ oraz $c \mid f(b)$. Otrzymaliśmy zatem nową parę (b, c) spełniającą podane warunki. Z parą (b, c) postępujemy podobnie i otrzymujemy następną parę; potem znowu następną, itd. ⊠

Z tego twierdzenia i jego dowodu otrzymujemy natychmiast inny dowód faktu 10.3.2 oraz serię przykładów z parami liczb naturalnych.

10.4.3. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + b + 1, \quad b \mid a^2 + a + 1, \quad a \leqslant b. \qquad \text{([KoM] 1998(9) F3240 i N182).}$$

Przykłady: $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,13)$, $(13,61)$, $(61,291)$, $(291,1393)$, $(1393,6673)$, $\cdots$.

10.4.4. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^3 + b^2 + b + 1, \quad b \mid a^3 + a^2 + a + 1, \quad a \leqslant b.$$

Pewne serie przykładów takich par:

$$(1,1),\ (1,4),\ (4,85),\ (85,155359),\ (155359,44115694558912),\cdots;$$
$$(1,2),\ (2,15),\ (15,1808),\ (1808,394225119),\ (394225119,338871038651200170531 80),\cdots;$$
$$(2,3),\ (3,20),\ (20,2807),\ (2807,1106246700),\ \cdots;$$
$$(2,5),\ (5,78),\ (78,96143),\ (96143,11393651279600),\ \cdots;$$
$$(3,5),\ (5,52),\ (52,28673),\ (28673,453347481285),\ \cdots;$$
$$(3,8),\ (8,195),\ (195,931637),\ (931637,4146732680978068),\ \cdots;$$
$$(4,5),\ (5,39),\ (39,12176),\ (12176,46289765511),\ \cdots;$$
$$(4,17),\ (17,1305),\ (1305,130832468),\ \cdots.$$

10.4.5. *Dla każdej liczby naturalnej $s \geqslant 2$ istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid 1 + b + b^2 + \cdots + b^s, \quad b \mid 1 + a + a^2 + \cdots + a^s.$$

Wielomian $f(z) = z^2+2z+1$ jest moniczny i ma symetryczne współczynniki. Z twierdzenia 10.4.2 (i jego dowodu) otrzymujemy inny dowód stwierdzenia 10.3.3.

10.4.6. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid (b + 1)^2, \quad b \mid (a + 1)^2, \quad a \leqslant b.$$

Cztery serie przykładów takich par:

$$(1,1),\ (1,4),\ (4,25),\ (25,169),\ (169,1156),\ (1156,7921),\ (7921,54289),\ (54289,372100),\ \cdots;$$
$$(1,2),\ (2,9),\ (9,50),\ (50,289),\ (289,1682),\ (1682,9801),\ (9801,57122),\ (57122,332929),\ \cdots;$$
$$(2,3),\ (3,8),\ (8,27),\ (27,98),\ (98,363),\ (363,1352),\ (1352,5043),\ (5043,18818),\ \cdots;$$
$$(4,5),\ (5,9),\ (9,20),\ (20,49),\ (49,125),\ (125,324),\ (324,845),\ (845,2209),\ (2209,5780),\ \cdots.$$

10.4.7. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid (b + 1)^3, \quad b \mid (a + 1)^3, \quad a \leqslant b.$$

Pewne serie przykładów takich par:

$$(1,1),\ (1,8),\ (8,729),\ (729,48627125),\ (48627125,1577278119113549667 44),\cdots;$$
$$(1,2),\ (2,27),\ (27,10976),\ (10976,48987720179),\ cdots;$$
$$(1,4),\ (4,125),\ (125,500094),\ (500094,1000570108306859),\ \cdots;$$
$$(2,3),\ (3,32),\ (32,11979),\ (11979,53730449750),\ \cdots;$$
$$(2,9),\ (9,500),\ (500,13972389),\ (13972389,5455594632121525838),\ \cdots;$$
$$(3,8),\ (8,243),\ (243,1815848),\ (1815848,24639558401022243),\ \cdots;$$
$$(4,5),\ (5,54),\ (54,33275),\ (33275,682338045344),\ \cdots;$$
$$(4,25),\ (25,4394),\ (4394,3395757195),\ \cdots.$$

10.4.8. *Dla każdej liczby naturalnej $s \geqslant 2$ istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid (b + 1)^s, \quad b \mid (a + 1)^s, \quad a \leqslant b.$$

Z twierdzenia 10.4.2 wynika natychmiast stwierdzenie 10.3.4. W podanych (powyższych i poniższych) seriach przykładów wykorzystaliśmy dowód twierdzenia 10.4.2 oraz Maple.

10.4.9. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + mb + 1, \quad b \mid a^2 + mb + 1.$$

Zanotujmy kilka szczególnych przypadków.

10.4.10. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + 3b + 1, \quad b \mid a^2 + 3a + 1, \quad a \leqslant b.$$

Przykłady: $(1, 1)$, $(1, 5)$, $(5, 41)$, $(41, 361)$, $(361, 3205)$, $(3205, 28481)$, $(28481, 253121), \cdots$.

10.4.11. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + 4b + 1, \quad b \mid a^2 + 4a + 1, \quad a \leqslant b.$$

Trzy serie przykładów takich par:

$(1, 1)$, $(1, 6)$, $(6, 61)$, $(61, 661)$, $(661, 7206)$, $(7206, 78601)$, $(78601, 857401), \cdots$;
$(1, 2)$, $(2, 13)$, $(13, 111)$, $(111, 982)$, $(982, 8723)$, $(8723, 77521)$, $(77521, 688962), \cdots$;
$(1, 3)$, $(3, 22)$, $(22, 191)$, $(191, 1693)$, $(1693, 15042)$, $(15042, 133681)$, $(133681, 1188083), \cdots$.

10.4.12. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + 5b + 1, \quad b \mid a^2 + 5a + 1, \quad a \leqslant b.$$

Dwie serie przykładów takich par:

$(1, 1)$, $(1, 7)$, $(7, 85)$, $(85, 1093)$, $(1093, 14119)$, $(14119, 182449)$, $(182449, 2357713), \cdots$;
$(3, 5)$, $(5, 17)$, $(17, 75)$, $(75, 353)$, $(353, 1685)$, $(1685, 8067)$, $(8067, 38645)$, $(38645, 185153), \cdots$.

10.4.13. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + 6b + 1, \quad b \mid a^2 + 6a + 1, \quad a \leqslant b.$$

Trzy serie przykładów takich par:

$(1, 1)$, $(1, 8)$, $(8, 113)$, $(113, 1681)$, $(1681, 25096)$, $(25096, 374753)$, $(374753, 5596193), \cdots$;
$(1, 2)$, $(2, 17)$, $(17, 196)$, $(196, 2329)$, $(2329, 27746)$, $(27746, 330617)$, $(330617, 3939652), \cdots$;
$(1, 4)$, $(4, 41)$, $(41, 482)$, $(482, 5737)$, $(5737, 68356)$, $(68356, 814529)$, $(814529, 9705986), \cdots$.

Z twierdzenia 10.4.2 mamy również następujący wniosek.

10.4.14. *Dla każdej liczby naturalnej $s \geqslant 2$ istnieje nieskończenie wiele par (a, b) liczb naturalnych takich, że*

$$b \mid a^s + 1 \quad \textit{oraz} \quad a \mid b^s + 1.$$

([Mat] 5/56 72, [Zw] 1999).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.5 Moniczne trójmiany kwadratowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $f(z) = z^2 + vz + w$ będzie danym trójmianem kwadratowym o współczynnikach całkowitych. Udowodniliśmy (patrz twierdzenie 10.3.1), że przy pewnych dodatkowych założeniach o liczbach u i v, istnieje nieskończenie wiele par niezerowych liczb całkowitych (a, b) takich, że

$$a \mid f(b) \quad \text{oraz} \quad b \mid f(a).$$

W tym podrozdziale przedstawimy inny dowód tego faktu. Podamy ponadto proste wzory pozwalające skonstruować nieskończony ciąg takich par i przy tym, w większości przypadków, wszystkie pary składać się będą tylko z liczb naturalnych. Założenia o danych liczbach u i v będą nieco inne od założeń w twierdzeniu 10.3.1.

Kluczową rolę w tym co chcemy tu przedstawić odgrywa następujące elementarne stwierdzenie.

10.5.1. *Niech $f(z) = z^2 + vz + w$ będzie trójmianem kwadratowym o współczynnikach całkowitych. Literą p oznaczmy liczbę $2v + w + 2$ i rozważmy ciąg (y_n) określony równościami:*

$$y_1 = y_2 = 1, \quad y_{n+2} = py_{n+1} - y_n - v$$

dla $n \in \mathbb{N}$. W szczególności, $y_3 = u+w+1$. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzą równości:

(1) $y_{n+1}^2 + y_n^2 + vy_{n+1} + vy_n + w = py_{n+1}y_n$,

(2) $y_n y_{n+2} = f(y_{n+1})$.

Ponadto, jeśli $v \geqslant 0$ oraz $v + w > 0$, to $1 = y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < \cdots$.

D. Równości (1) i (2) wykazujemy za pomocą indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ i $n = 2$ równości te są oczywiste. Krok indukcyjny w przypadku (1) przebiega następująco:

$$\begin{aligned}
&y_{n+2}^2 + y_{n+1}^2 + vy_{n+2} + vy_{n+1} + w - py_{n+2}y_{n+1} \\
&= (py_{n+1} - y_n - v)^2 + y_{n+1}^2 + v(py_{n+1} - y_n - v) + vy_{n+1} + w - p(py_{n+1} - y_n - v)y_{n+1} \\
&= p^2y_{n+1}^2 + y_n^2 + v^2 - 2py_{n+1}y_n - 2pvy_{n+1} + 2vy_n + y_{n+1}^2 + vpy_{n+1} - vy_n - v^2 + vy_{n+1} + w \\
&\quad -p^2y_{n+1}^2 + py_{n+1}y_n + vpy_{n+1} \\
&= y_{n+1}^2 + y_n^2 + vy_{n+1} + vy_n + w - py_{n+1}y_n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

natomiast w przypadku (2) mamy:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}y_{n+3} - f(y_{n+2}) &= y_{n+1}(py_{n+2} - y_{n+1} - v) - y_{n+2}^2 - vy_{n+2} - w \\
&= y_{n+2}\left(py_{n+1} - y_{n+2} - v\right) - y_{n+1}^2 - vy_{n+1} - w \\
&= y_{n+2}y_n - f(y_{n+1}) = f(y_{n+1}) - f(y_{n+1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że $v \geqslant 0$ oraz $v + w > 0$. Wtedy $y_4 > y_3 > y_2 = 1$ i dla $n \geqslant 3$ (znowu na mocy indukcji) mamy:

$$y_{n+2} = (3v + w + 2)y_{n+1} - y_n - v = (v + w + 1)y_{n+1} + (y_{n+1} - y_n) + v(y_n - 1) > y_{n+1}.$$

Zatem $1 = y_2 < y_3 < y_4 < \cdots$. ⊠

Z tego stwierdzenia wynika następujące twierdzenie.

10.5.2. *Niech $f(z) = z^2 + vz + w$ będzie trójmianem kwadratowym o współczynnikach całkowitych takim, że $v \geqslant 0$ oraz $v+w > 0$. Istnieje wtedy nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid f(b) \quad \text{oraz} \quad b \mid f(a).$$

Własność tę spełnia każda para (a, b) występująca w nieskończonym ciągu

$$(y_1, y_2),\ (y_2, y_3),\ (y_3, y_4),\ (y_4, y_5),\ \cdots,$$

gdzie $y_1 = y_2 < y_3 < y_4 < \cdots$ jest ciągiem określonym równościami

$$y_1 = y_2 = 1, \quad y_{n+2} = (2v + w + 2)y_{n+1} - y_n - v \quad \text{dla} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

D. Ponieważ $v \geqslant 0$ i $v + w > 0$, więc (na mocy stwierdzenia 10.5.1) każdy wyraz y_n jest liczbą naturalną oraz $1 = y_1 = y_2 < y_3 < y_4 < \cdots$. Podzielności $y_n \mid f(y_{n+1})$ oraz $y_{n+1} \mid y_n$ wynikają natychmiast z równości (1). Wynikają one również z równości (2), gdyż $y_{n-1}y_{n+1} = f(y_n)$ oraz $y_n y_{n+2} = f(y_{n+1})$. ⊠

Zanotujmy kilka przykładów wynikających z twierdzenia 10.5.2.

Niech $f(z) = z^2 + z + 2$. Ciąg (y_n) jest w tym przypadku określony równościami:

$$y_1 = y_2 = 1, \quad y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n - 1.$$

Początkowe wyrazy: 1, 1, 4, 22, 127, 739, 4306, 25096, 146269, 852517, $\cdots$. Dla każdej więc pary liczb naturalnych (a, b), występującej w ciągu

$$(1, 1),\ (1, 4),\ (4, 22),\ (222, 127),\ (127, 739),\ (739, 4306),\ (4306, 25096),\ \cdots,$$

zachodzi własność: $a \mid b^2 + b + 2$ oraz $b \mid a^2 + a + 2$. Drobna modyfikacja dowodu stwierdzenia 10.5.1 pozwala wykazać, że tę samą własność posiadają pary (a, b) postaci (z_n, z_{n+1}), gdzie (z_n) jest nieskończonym ciągiem określonym równościami:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 2, \quad z_{n+2} = 5z_{n+1} - z_n - 1 \quad \text{dla} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

W ten sposób mamy następny nieskończony ciąg par:

$$(1, 2),\ (2, 8),\ (8, 37),\ (37, 176),\ (176, 842),\ (842, 4033),\ (4033, 19322),\ \cdots,$$

posiadających omawianą własność. Istnieją jeszcze takie pary (a, b), które nie występują w żadnym z tych dwóch ciągów. Takimi są na przykład:

$$(2, 2),\ (2, 4),\ (4, 11),\ (8, 74),\ (74, 694),\ (212, 674),\ (268, 6554).$$

Zauważmy, że w pierwszym ciągu par wszystkie pary (y_{n-1}, y_n), dla n niepodzielnych przez 4, są względnie pierwsze. Podobna sytuacja występuje w drugim ciągu par. Mamy więc w szczególności:

10.5.3. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + b + 2, \quad b \mid a^2 + a + 1 \quad \textit{oraz} \quad \mathrm{nwd}(a, b) = 1.$$

Stosując podobne metody dla wielomianów

$$f(z) = z^2 + z + 5 \quad \text{oraz} \quad f(z) = z^2 + 2z + 3$$

otrzymujemy odpowiednio następujące wnioski.

10.5.4. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + b + 5 \quad \textit{oraz} \quad b \mid a^2 + a + 5.$$

Własność tę posiada każda para (a, b) występująca w ciągu:

$$(1, 1),\ (1, 7),\ (7, 61),\ (61, 541),\ (541, 4807),\ (4807, 42721),\ (42721, 379681),\ \cdots.$$

Wszystkie wyrazy tego ciągu są postaci (y_n, y_{n+1}), gdzie (y_n) jest nieskończonym ciągiem określonym równościami:

$$y_1 = y_2 = 1, \quad y_{n+2} = 9y_{n+1} - y_n - 1.$$

Wśród tych par istnieje nieskończenie wiele par składających się z liczb względnie pierwszych. Istnieją również pary, posiadające omawianą własność, które nie występują w powyższym ciągu. Takimi są na przykład pary:

$$(5, 5),\ (5, 7),\ (5, 35),\ (35, 253),\ (35, 1265),\ (1265, 45757),\ (275, 3995).$$

10.5.5. *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + 2b + 3 \quad \textit{oraz} \quad b \mid a^2 + 2a + 3.$$

Własność tę posiada każda para (a, b) występująca w jednym z trzech ciągów:

$(1, 1), (1, 6), (6, 51), (51, 451), (451, 4006), (4006, 35601), (35601, 316401), (316401, 2812006), \cdots;$
$(1, 2), (2, 11), (11, 73), (73, 498), (498, 3411), (3411, 23377), (23377, 160226), (160226, 1098203), \cdots;$
$(1, 3), (3, 18), (18, 121), (121, 827), (827, 5666), (5666, 38833), (38833, 266163), (266163, 1824306), \cdots.$

Wśród nich występuje nieskończenie wiele par składających się z liczb względnie pierwszych. Istnieją również pary, posiadające omawianą własność, które nie występują w powyższych ciągach. Takimi są na przykład pary: $(3, 3), (3, 6), (6, 17), (3, 9), (9, 34), (9, 102), (102, 1179),$ $(1179, 13651), (18, 363), (363, 7361), (33, 579), (579, 10194), (10194, 179513).$

Ze stwierdzenia 10.5.1 wynika również następujący interesujący wniosek.

10.5.6. *Niech v, w będą liczbami całkowitymi takimi, że $v \geqslant 0$ oraz $v + w > 0$. Niech (y_n) będzie ciągiem określonym równościami:*

$$y_1 = y_2 = 1, \quad y_{n+2} = \frac{y_{n+1}^2 + vy_{n+1} + w}{y_n} \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.

Założenia $v \geqslant 0$ oraz $v+w > 0$ są tylko po to potrzebne by mieć pewność, że rozpatrywany ciąg jest dobrze zdefiniowany, tzn. by każde y_n było różne od zera. Wystarczy założyć, że trójmian $x^2 + vx + w$ nie ma pierwiastków wymiernych; wtedy każdy wyraz ciągu (y_n) jest liczbą całkowitą. Podobnego typu przykłady występują w [N-7].

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.6 Pary (a,b) takie, że $a \mid b^2 + m$ oraz $b \mid a^2 + m$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W drugim podrozdziale badaliśmy pary liczb naturalnych (a, b) takie, że $a \mid b^2 + m$ oraz $b \mid a^2 + m$, przy czym m było równe 1. Teraz m będzie dowolną liczbą naturalną.

Spójrzmy jeszcze raz na twierdzenie 10.3.1 i zastosujmy to twierdzenie dla wielomianu

$$f(z) = z^2 + m.$$

W tym przypadku $u = 1$, $v = 0$, $w = m$, a zatem

$$D_0 = m(4 + m), \quad \Delta_0 = -m^2(4 + m)$$

i równanie $(\star\star)$ jest postaci

$$X^2 - m(4 + m)Y^2 = 4m^2(4 + m),$$

gdzie $X = m(4 + m)y = D_0 y$ oraz $Y = 2x - (2 + m)y$. Zauważmy, że:

10.6.1. *Dla każdej liczby naturalnej m liczba $D_0 = m(4+m)$ jest dodatnia i niekwadratowa.*

D. Przypuśćmy, że $m(4+m) = a^2$, gdzie $a \in \mathbb{N}$. Wtedy $m^2 + 4m + 4 = a^2 + 4$, $(m+2)^2 - a^2 = 4$ i stąd

$$(m + 2 + a)(m + 2 - a) = 4.$$

Ponieważ $m + 2 + a \geqslant 4$, więc $m + 2 + a = 4$ oraz $m + 2 - a = 1$ i po dodaniu stronami mamy sprzeczność: $2(m + 2) = 5$. ⊠

Z twierdzenia 10.3.1 wynika zatem następujący wniosek.

10.6.2. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + m \quad \textit{oraz} \quad b \mid a^2 + m.$$

W przypadku $m = 1$ opisaliśmy wszystkie pary (a, b) posiadające powyższą własność. Podobne opisy można podać również dla innych liczb naturalnych m. Tym się teraz zajmiemy. Dla pewnych liczb naturalnych m opiszemy wszystkie takie pary składające się z liczb względnie pierwszych.

Niech m będzie ustaloną liczbą naturalną i niech

$$\mathcal{A}_m = \Big\{(a, b) \in \mathbb{N}^2;\ a \mid b^2 + m,\ b \mid a^2 + m,\ a \leqslant b,\ \mathrm{nwd}(a, b) = 1\Big\}.$$

Zauważmy, że $(1, 1) \in \mathcal{A}_m$; zbiór $\mathcal{A}_m$ jest więc niepusty. Jedyną parą (a, b), spełniającą warunek $a = b$ i należącą do $\mathcal{A}_m$, jest $(1, 1)$. Zbiór $\mathcal{A}_m \smallsetminus \{(1, 1)\}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{A}_m^*$;

$$\mathcal{A}_m^* = \Big\{(a, b) \in \mathbb{N}^2;\ a \mid b^2 + m,\ b \mid a^2 + m,\ a < b,\ \mathrm{nwd}(a, b) = 1\Big\}.$$

Dla każdej pary (a,b), należącej do zbioru $\mathcal{A}_m$, oznaczmy przez $f_m(a,b)$ oraz $g_m(a,b)$ pary liczbowe określone następująco:

$$f_m(a,b) = \left(b,\ \frac{b^2+m}{a}\right), \quad g_m(a,b) = \left(\frac{a^2+m}{b},\ a\right).$$

10.6.3. *Jeśli $(a,b) \in \mathcal{A}_m$, to $f_m(a,b) \in \mathcal{A}_m^*$.*

D. Niech $(a,b) \in \mathcal{A}_m$ i niech $u = \dfrac{b^2+m}{a}$. Oczywiście u jest liczbą naturalną. Udowodnimy, że $(b,u) \in \mathcal{A}_m^*$. Zauważmy najpierw, że $b < u$. Istotnie,

$$u = \frac{b^2+m}{a} \geqslant \frac{b^2+m}{b} = b + \frac{m}{b} > b.$$

Następnie wykażemy, że $\mathrm{nwd}(b,u) = 1$. Przypuśćmy, że $\mathrm{nwd}(b,u) \geqslant 2$. Istnieje wtedy taka liczba pierwsza p, że $p \mid b$ oraz $p \mid u$. Wtedy $p \mid ua = b^2+m$ i $p \mid b^2$, a więc $p \mid m$. Ponieważ $b \mid a^2+m$ oraz $p \mid b$ i $p \mid m$, więc $p \mid a$. Liczby a i b są więc podzielne przez p; wbrew temu, że $\mathrm{nwd}(a,b) = 1$. Zatem $\mathrm{nwd}(b,u) = 1$.

Jest jasne, że $u \mid b^2+m$ (gdyż $b^2+m = ua$). Należy więc jeszcze tylko wykazać, że $b \mid u^2+m$. Ponieważ $b \mid a^2+m$, więc

$$a^2(u^2+m) = (au)^2 + a^2m = (b^2+m)^2 + a^2m \equiv m^2 + a^2m = m(a^2+m) \equiv m \cdot 0 = 0 \pmod{b},$$

czyli $b \mid a^2(u^2+m)$. Ale $\mathrm{nwd}(a,b) = 1$, więc $b \mid u^2+m$. Zatem $f_m(a,b) = (b,u) \in \mathcal{A}_m^*$. ⊠

Teraz możemy podać inny dowód stwierdzenia 10.6.2 i to nawet dla liczb względnie pierwszych.

10.6.4. *Dla każdej liczby naturalnej m, zbiór $\mathcal{A}_m$ jest nieskończony. Innymi słowy, dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele par $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ takich, że*

$$\mathrm{nwd}(a,b) = 1, \quad a \mid b^2+m \quad \textit{oraz} \quad b \mid a^2+m.$$

([IMO] Shortlist 1992, [Djmp] s.558, [OM] Indie 1997).

D. Niech $(a_0,b_0) = (1,1)$ oraz $(a_n,b_n) = f_m(a_{n-1},b_{n-1})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy nieskończony ciąg par. Wszystkie te pary są, na mocy faktu 10.6.3, parami różne i należą do zbioru $\mathcal{A}_m$. ⊠

Z faktu 10.6.3 wynika, że f_m jest pewną funkcją działającą ze zbioru $\mathcal{A}_m$ do zbioru $\mathcal{A}_m^*$. Przypomnijmy, że

$$f_m(a,b) = \left(b,\ \frac{b^2+m}{a}\right)$$

dla $(a,b) \in \mathcal{A}_m$.

Dla danej pary $(a,b) \in \mathcal{A}_m$ wprowadziliśmy również nową parę (v,a), gdzie

$$v = \frac{a^2+m}{b},$$

którą oznaczyliśmy przez $g_m(a,b)$. Jest to oczywiście para składająca się z liczb naturalnych.

10.6.5. *Jeśli* $(v, a) = g_m(a, b)$, *gdzie* $(a, b) \in \mathcal{A}_m$, *to*

$$v \mid a^2 + m, \quad a \mid v^2 + m \quad \textit{oraz} \quad \operatorname{nwd}(v, a) = 1.$$

D. Najpierw wykażemy, że $\operatorname{nwd}(v, a) = 1$. Przypuśćmy, że $\operatorname{nwd}(v, a) \geqslant 2$. Istnieje wtedy taka liczba pierwsza p, że $p \mid v$ oraz $p \mid a$. Wtedy $p \mid vb = a^2 + m$ i $p \mid a^2$, a więc $p \mid m$. Ponieważ $a \mid b^2 + m$ oraz $p \mid a$ i $p \mid m$, więc $p \mid b$. Liczby a i b są więc podzielne przez p; wbrew temu, że $\operatorname{nwd}(a, b) = 1$. Zatem $\operatorname{nwd}(v, a) = 1$.

Jest jasne, że $v \mid a^2 + m$ (gdyż $a^2 + m = vb$). Należy więc jeszcze tylko wykazać, że $a \mid v^2 + m$. Ponieważ $a \mid b^2 + m$, więc

$$b^2(v^2 + m) = (bv)^2 + b^2m = (a^2 + m)^2 + b^2m \equiv m^2 + b^2m = m(b^2 + m) \equiv m \cdot 0 = 0 \pmod{a},$$

czyli $a \mid b^2(v^2 + m)$. Ale $\operatorname{nwd}(a, b) = 1$, więc $a \mid v^2 + m$. ⊠

W przypadku $m = 1$ udowodniliśmy (patrz 10.2.2(2)), że jeśli $(a, b) \in \mathcal{A}_m^*$, to $g_m(a, b) \in \mathcal{A}_m$. W dowolnym przypadku, gdy $m > 1$, taka własność nie musi zachodzić. Tak jest na przykład dla $m = 3$. Para $(1, 2)$ należy do $\mathcal{A}_3^*$, a para $(2, 1) = g_3(1, 2)$ do zbioru $\mathcal{A}_3$ nie należy. Jeśli bowiem jakaś para (x, y) należy do $\mathcal{A}_m$, to $x \leqslant y$ (w tym przypadku $(x, y) = (2, 1)$ oraz $x = 2 > 1 = y$).

Niech m będzie dowolną liczbą naturalną i niech $(v, a) = g_m(a, b)$, gdzie $(a, b) \in \mathcal{A}_m^*$. Z powyższego faktu 10.6.5 wynika, że

$$(v, a) \in \mathcal{A}_m \iff v \leqslant a.$$

Mówić będziemy, że liczba naturalna m jest *specjalna*, jeśli dla każdej pary (a, b) ze zbioru $\mathcal{A}_m^*$, para $g_m(a, b)$ należy do zbioru $\mathcal{A}_m$. Innymi słowy, liczba naturalna m jest specjalna, jeśli dla dowolnych liczb naturalnych a, b takich, że

$$a < b, \quad \operatorname{nwd}(a, b) = 1, \quad a \mid b^2 + m, \quad \text{oraz} \quad b \mid a^2 + m,$$

zachodzi nierówność $a^2 + m \leqslant ab$. Zbiór wszystkich liczb naturalnych specjalnych oznaczać będziemy przez $\mathbb{S}$. Jest to zbiór niepusty. Z 10.2.2(2) wynika, że $1 \in \mathbb{S}$.

10.6.6. *Liczba* 2 *jest specjalna.*

D. Niech $(a, b) \in \mathcal{A}_2^*$. Należy wykazać, że $a^2 + 2 \leqslant ab$. Jeśli $a = 1$, to $b = 3$ (gdyż $b \mid 1^2 + 2 = 3$ i $b > 1$) i wtedy $a^2 + 2 = 3 \leqslant 1 \cdot 3 = ab$. Załóżmy teraz, że $a \geqslant 2$. Mamy wtedy:

$$\frac{a^2 + 2}{b} < \frac{a^2 + 2}{a} \leqslant a + \frac{2}{a} \leqslant a + 1$$

i stąd $\dfrac{a^2 + 2}{b} \leqslant a$, czyli $a^2 + 2 \leqslant ab$. ⊠

10.6.7. *Liczba* 4 *jest specjalna.*

D. Niech $(a, b) \in \mathcal{A}_4^*$. Należy wykazać, że $a^2 + 4 \leqslant ab$. Jeśli $a = 1$, to $b = 5$ (gdyż $b \mid 1^2 + 4 = 5$ i $b > 1$) i wtedy $a^2 + 4 = 5 \leqslant 1 \cdot 5 = ab$.

Przypuśćmy, że $a = 2$. Wtedy $b \mid 6 = a^2 + 4$, więc $b = 3$ lub $b = 6$ (gdyż $b > 2$). Ponieważ $\operatorname{nwd}(a, b) = 1$, więc przypadek $b = 6$ odpada; zostaje $b = 3$, ale wtedy $b^2 + 4$ jest liczbą nieparzystą;

nie jest więc liczbą podzielną przez $a = 2$. Zatem a nie może być równe 2. Niech $a = 3$. Wtedy $b \mid 13 = a^2 + 4$, więc $b = 13$ i mamy:

$$a^2 + 4 = 13 < 3 \cdot 13 = ab.$$

Załóżmy teraz, że $a \geqslant 5$. Mamy wtedy:

$$\frac{a^2+4}{b} < \frac{a^2+4}{a} \leqslant a + \frac{4}{a} \leqslant a + 1$$

i stąd $\dfrac{a^2+4}{b} \leqslant a$, czyli $a^2 + 4 \leqslant ab$. ⊠

10.6.8. *Wszystkie liczby naturalne specjalne mniejsze od* 1000 :

$$1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28, 30, 36, 40, 42, 46, 52, 58, 60, 70, 72, 78, 82, 88, 96,$$
$$100, 102, 106, 108, 112, 126, 130, 148, 150, 156, 162, 166, 172, 178, 180, 190, 192, 198,$$
$$210, 222, 226, 228, 232, 238, 240, 250, 256, 262, 268, 270, 280,$$
$$306, 310, 312, 316, 330, 336, 348, 352, 358, 372, 378, 382, 396,$$
$$400, 408, 418, 420, 430, 432, 438, 442, 448, 460, 462, 466, 478, 490,$$
$$502, 508, 520, 522, 540, 546, 562, 570, 576, 592, 598,$$
$$606, 612, 616, 618, 630, 640, 646, 652, 658, 660, 672, 676, 682, 690,$$
$$700, 708, 718, 732, 738, 742, 750, 756, 760, 768, 796,$$
$$808, 810, 820, 822, 828, 838, 856, 862, 880, 882, 886,$$
$$910, 918, 928, 936, 940, 946, 966, 970, 982, 990, 996.$$

Jest 140 *takich liczb.* (Maple).

10.6.9. *Każda liczba naturalna specjalna, większa od* 1, *jest liczbą parzystą.*

D. Niech $m = 2n + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wtedy para $(a, b) = (1, 2)$ należy do zbioru $\mathcal{A}_m^*$ oraz

$$a^2 + m = 1 + m = 2n + 2 > 2 = ab.$$

Żadna więc liczba nieparzysta, większa od 1, nie może być liczbą specjalną. ⊠

10.6.10. *Jeśli liczba naturalna m jest specjalna, to $m + 1$ jest liczbą pierwszą.*

D. Załóżmy, że liczba m jest specjalna i przypuśćmy, że $m + 1$ nie jest liczbą pierwszą. Istnieją wtedy liczby naturalne c, d, większe od 1 takie, że

$$m + 1 = cd.$$

Para $(1, c)$ jest wtedy elementem zbioru $\mathcal{A}_m^*$ i dla niej nie zachodzi żądana nierówność. Istotnie, $\dfrac{1^2+m}{c} = d > 1 = c$ i stąd $1 + m^2 > 1 \cdot c$. ⊠

Implikacja w przeciwnym kierunku nie musi zachodzić.

10.6.11. *Dla $m = 66$, liczba $m + 1 = 67$ jest pierwsza oraz m nie jest liczbą specjalną. Jest to najmniejsza liczba naturalna o tej własności.*

D. Liczba 66 nie jest specjalna, gdyż $(5,7) \in \mathcal{A}^*_{66}$ oraz $5^2 + 66 = 91 > 5 \cdot 7$. ⊠

10.6.12. *Wszystkie liczby pierwsze p, mniejsze od 1000 takie, że $p-1$ nie jest liczbą specjalną:*

$$67, 137, 139, 197, 277, 283, 293, 347, 367, 389, 457, 487, 499,$$
$$557, 569, 587, 601, 643, 727, 773, 787, 827, 853, 859, 877, 907, 953, 977.$$

Jest 28 *takich liczb.* (Maple).

Nie znam odpowiedzi na następujące pytania.

10.6.13. *Czy liczb naturalnych specjalnych istnieje nieskończenie wiele? Czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że liczba $p-1$ nie jest specjalna?*

Przypomnijmy, że jeśli liczba naturalna m jest specjalna, to dla każdej pary (a,b) należącej do zbioru $\mathcal{A}^*_m$, para

$$g_m(a,b) = \left(\frac{a^2+m}{b},\ a\right)$$

należy do zbioru $\mathcal{A}_m$. Mamy więc wtedy funkcję

$$g_m : \mathcal{A}^*_m \to \mathcal{A}_m.$$

Zawsze, dla każdego m, mamy również funkcję $_m : \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}^*_m$. Przypomnijmy, że

$$f_m(a,b) = \left(b, \frac{b^2+m}{a}\right)$$

dla $(a,b) \in \mathcal{A}_m$.

10.6.14. *Jeśli liczba naturalna m jest specjalna, to funkcje f_m i g_m są wzajemnie odwrotne.*

D. $f_m\Big(g_m(a,b)\Big) = f_m\left(\frac{a^2+m}{b},\ a\right) = \left(a,\ \frac{a^2+m}{\frac{a^2+m}{b}}\right) = (a,b)$

i podobnie $g_m\Big(f_m(a,b)\Big) = (a,b)$. ⊠

W dalszym ciągu załóżmy, że m jest ustaloną liczbą naturalną specjalną i oznaczmy:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_m, \quad \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*_m, \quad f = f_m, \quad g = g_m.$$

Niech (a,b) będzie dowolną parą należącą do $\mathcal{A}$, różną od $(1,1)$. Oznaczmy przez (a_1,b_1) parę $g(a,b)$. Wtedy $a_1 \leqslant b_1 = a_0$. Jeśli $a_1 = b_1$, to (a_1,b_1) jest parą $(1,1)$. Jeśli natomiast $a_1 < b_1$, to $(a_1,b_1) \in \mathcal{A}^*$ i mamy nową parę

$$(a_2,b_2) = g(a_1,b_1) = g(g((a,b)) = g^2(a,b).$$

Kontynuujemy to postępowanie tak długo, aż dojdziemy do pary $(1,1)$. Do pary $(1,1)$ zawsze dojdziemy, gdyż istnieje tylko skończenie wiele liczb naturalnych mniejszych od a.

Dla każdej pary $(a, b) \in \mathcal{A}^*$ istnieje zatem taka liczba naturalna n, że

$$g^n(a, b) = (1, 1).$$

Ponieważ funkcje f i g są wzajemnie odwrotne, więc z z równości $g^n(a, b) = (1, 1)$ wynika równość

$$(a, b) = f^n(1, 1).$$

Udowodniliśmy zatem następujące stwierdzenie.

10.6.15. *Niech m będzie liczbą naturalną specjalną i niech a, b będą liczbami naturalnymi. Para (a, b) należy do zbioru $\mathcal{A}_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka nieujemna liczba całkowita n, że*

$$(a, b) = f_m^n(1, 1),$$

gdzie f_m^n oznacza n-tą iterację funkcji f_m.

Jeśli więc m jest liczbą naturalną specjalną, to wszystkie elementy zbioru $\mathcal{A}_m$ tworzą nieskończony ciąg

$$(1, 1),\ f(1, 1),\ f^2(1, 1),\ f^3(1, 1),\ \ldots,$$

gdzie $f = f_m$. Spójrzmy dokładniej na wyrazy tego ciągu. Oznaczmy te wyrazy przez (x_n, y_n), tzn.

$$(x_n, y_n) = f^{n-1}(1, 1) \quad \text{dla} \quad \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n) = \left(y_n, \dfrac{y_n^2 + m}{x_n}\right)$, więc

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2 + m}{x_n}.$$

10.6.16. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$x_n^2 + y_n^2 + m = (m + 2)x_n y_n.$$

D. (Indukcja ze względu na n). Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Załóżmy, że badana równość zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + 1 &= y_n^2 + \left(\frac{y_n^2 + m}{x_n}\right)^2 + 1 = (y_n^2 + m)\left(1 + \frac{y_n^2 + m}{x_n^2}\right) \\
&= (y_n^2 + m)\frac{x_n^2 + y_n^2 + m}{x_n^2} = (y_n^2 + m)\frac{(m + 2)x_n y_n}{x_n^2} \\
&= (m + 2)(y_n^2 + m)\frac{y_n}{x_n} = (m + 2)y_n\frac{y_n^2 + m}{x_n} \\
&= (m + 2)x_{n+1}y_{n+1}
\end{aligned}$$

i to kończy dowód. ⊠

10.6.17. $y_1 = 1$, $y_2 = m + 1$ *oraz* $y_{n+2} = (m + 2)y_{n+1} - y_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

D. Jest jasne, że $y_1 = 1$ oraz $y_2 = \dfrac{1^2+m}{1} = m+1$. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$y_{n+2} = \frac{y_{n+1}^2 + m}{x_{n+1}} = \frac{(m+2)x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+1}^2}{x_{n+1}} = (m+2)y_{n+1} - x_{n+1} = (m+2)y_{n+1} - y_n.$$

Wykorzystaliśmy równość 10.6.16. ⊠

Udowodniliśmy zatem następujące twierdzenie.

10.6.18. *Niech m będzie liczbą naturalną specjalną i niech $\mathcal{A}_m$ będzie zbiorem wszystkich par liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$a \mid b^2 + m, \quad b \mid a^2 + m, \quad \mathrm{nwd}(a, b) = 1, \quad a \leqslant b.$$

Wówczas wszystkie elementy zbioru $\mathcal{A}_m$ tworzą nieskończony ciąg

$$(1, 1), \ (y_1, y_2), \ (y_2, y_3), \ (y_3, y_4), \ (y_4, y_5), \ldots,$$

gdzie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem określonym równościami:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = m + 1, \quad y_{n+2} = (m+2)y_{n+1} - y_n \quad dla \quad n \in \mathbb{N}.$$

Korzystając z powyższych faktów można łatwo udowodnić następujące twierdzenie.

10.6.19. *Niech m będzie liczbą naturalną specjalną i niech $x < y$ będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(1) *Para (x, y) jest naturalnym rozwiązaniem równania $x^2 + y^2 + m = (m+2)xy$.*

(2) *$x \mid y^2 + m$ oraz $y \mid x^2 + m$.*

(3) *Istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $(x, y) = (y_n, y_{n+1})$, gdzie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem określonym równościami: $y_1 = 1$, $y_2 = m + 1$ oraz $y_{n+2} = (m+2)y_{n+1} - y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

D. Implikacja (1) ⇒ (2) jest oczywista. Implikacja (2) ⇒ (3) jest treścią twierdzenia 10.6.18. Implikację (3) ⇒ (1) wykazaliśmy w 10.6.16. ⊠

W podrozdziale o liczbach Fibonacciego podaliśmy przykłady par należących do zbioru $\mathcal{A}_m$ dla $m = 1$. Teraz podamy takie przykłady dla innych liczb naturalnych m. Rozpoczynamy od $m = 2$. Przypomnijmy (patrz 10.6.6), że 2 jest liczbą specjalną.

10.6.20. *Przykłady względnie pierwszych par liczb naturalnych (a, b) takich, że $a \leqslant b$, $a \mid b^2 + 2$ oraz $b \mid a^2 + 2$:*

$$(1,1), \ (1,3), \ (3,11), \ (11,41), \ (41,153), \ (153,571), \ (571,2131), \ (2131,7953), (7953,29681), \cdots.$$

10.6.21. *Niech k będzie liczbą naturalną. Równanie*

$$x^2 + y^2 + 2 = kxy$$

ma rozwiązanie naturalne wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 4$.

D. Dla $k = 4$ mamy rozwiązanie naturalne $(1, 1)$. Niech teraz k będzie dowolną liczbą naturalną i załóżmy, że para (x, y) jest rozwiązaniem naturalnym rozpatrywanego równania. Wtedy $x \mid y^2 + 2$ oraz $y \mid x^2 + 2$. Zauważmy, że $\text{nwd}(x, y) = 1$. Istotnie, jeśli $\text{nwd}(x, y) = d$, to $x = x_1 d, y = y_1 d$ dla pewnych, względnie pierwszych, liczb naturalnych x_1, y_1 i wtedy

$$d^2 x_1^2 + d^2 y_1^2 + 2 = kd^2 x_1 y_1,$$

więc $d^2 \mid 2$ i stąd $d = 1$.

Jeśli $x = y$, to $x = y = 1$ i wtedy oczywiście $k = 4$. Załóżmy dalej, że $x < y$. Przypomnijmy (patrz 10.6.6), że 2 jest liczbą specjalną. Z twierdzenia 10.6.19 wynika, że para (x, y) jest rozwiązaniem naturalnym równania $x^2 + y^2 + 2 = 4xy$. Wobec tego

$$kxy = x^2 + y^2 + 2 = 4xy$$

i stąd $k = 4$. ⊠

10.6.22. *Jeśli k jest liczbą naturalną różną od 4, to równanie*

$$x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -8$$

nie ma rozwiązań naturalnych.

D. Przypuśćmy, że u, v, k są takimi liczbami naturalnymi, że $u^2 - (k^2 - 4)v^2 = -8$. Wtedy liczby u, kv są jednocześnie parzyste lub nieparzyste, a zatem liczba $x = (u + kv)/2$ jest naturalna. Niech $y = v$. Wtedy $u = 2x - ky$, $v = y$ i mamy równość

$$4x^2 - 4kxy + 4y^2 = -8,$$

czyli $x^2 + y^2 + 2 = kxy$, a zatem (na mocy poprzedniego faktu) $k = 4$. ⊠

10.6.23. *Jeśli* $\dfrac{x^2 + 2}{y^2} + 4$ *jest kwadratową liczbą naturalną, to* $\dfrac{x^2 + 2}{y^2} = 12$.

D. Niech $\dfrac{x^2 + 2}{y^2} + 4 = k^2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -2$ i (po pomnożeniu przez 4) mamy równość

$$u^2 - (k^2 - 4)v^2 = -8,$$

gdzie $u = 2x$ oraz $v = 2y$. Na mocy 10.6.22 liczba k jest równa 4.
Zatem $\dfrac{x^2 + 2}{y^2} = k^2 - 4 = 16 - 4 = 12$. ⊠

10.6.24. *Jeśli* $\dfrac{x^2 + 8}{y^2} + 4$ *jest kwadratową liczbą naturalną, to* $\dfrac{x^2 + 8}{y^2} = 12$.

D. Niech $\dfrac{x^2 + 8}{y^2} + 4 = k^2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -8$ i stąd, na mocy 10.6.22, liczba k jest równa 4. Zatem $\dfrac{x^2 + 8}{y^2} = k^2 - 4 = 16 - 4 = 12$. ⊠

10.6.25. *Przykłady względnie pierwszych par liczb naturalnych* (a, b) *takich, że* $a \leqslant b$, $a \mid b^2 + 3$ *oraz* $b \mid a^2 + 3$:

$$(1,1),\ (1,4),\ (4,19),\ (19,91),\ (91,436),\ (436,2089),\ (2089,10009),\ (10009,47956),\cdots;$$
$$(1,2),\ (2,7),\ (7,26),\ (26,97),\ (97,362),\ (362,1351),\ (1351,5042),\ (5042,18817),\cdots.$$

10.6.26. *Przykłady względnie pierwszych par liczb naturalnych* (a, b) *takich, że* $a \leqslant b$, $a \mid b^2 + 4$ *oraz* $b \mid a^2 + 4$:

$$(1,1),\ (1,5),\ (5,29),\ (29,169),\ (169,985),\ (985,5741),\ (5741,33461),(33461,195025),\cdots.$$

10.6.27. *Niech* k *będzie liczbą naturalną. Równanie*

$$x^2 + y^2 + 4 = kxy$$

ma rozwiązanie naturalne wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 3$ *lub* $k = 6$.

D. Dla $k = 3$ mamy rozwiązanie naturalne $(2, 2)$, natomiast dla $k = 6$ rozwiązaniem naturalnym jest $(1, 1)$ Niech k będzie dowolną liczbą naturalną i załóżmy, że para (x, y) jest rozwiązaniem naturalnym rozpatrywanego równania. Niech $\mathrm{nwd}(x, y) = d$, $x = x_1d$, $y = y_1d$, $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(x_1, y_1) = 1$. Wtedy $d^2 \mid 4$, więc $d = 2$ lub $d = 1$. Jeśli $d = 2$, to

$$x_1^2 + y_1^2 + 1 = kx_1y_1$$

i wtedy (na mocy 10.2.6) $k = 3$. Załóżmy, że $d = 1$. Wtedy x, y są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi takimi, że $x \mid y^2 + 4$ oraz $y \mid x^2 + 4$.

Jeśli $x = y$, to $x = y = 1$ i wtedy oczywiście $k = 6$. Załóżmy dalej, że $x < y$. Przypomnijmy (patrz 10.6.7), że 4 jest liczbą specjalną. Z twierdzenia 10.6.19 wynika, że para (x, y) jest rozwiązaniem naturalnym równania $x^2 + y^2 + 4 = 6xy$. Wobec tego

$$kxy = x^2 + y^2 + 4 = 6xy$$

i stąd $k = 6$. ⊠

Z powyższego faktu wynika następujące stwierdzenie, którego dowód taki sam jak dowód stwierdzenia 10.6.22.

10.6.28. *Jeśli* k *jest liczbą naturalną różną od* 3 *i* 6, *to równanie*

$$x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -16$$

nie ma rozwiązań naturalnych.

10.6.29. *Przykłady względnie pierwszych par liczb naturalnych* (a, b) *takich, że* $a \leqslant b$, $a \mid b^2 + 5$ *oraz* $b \mid a^2 + 5$:

$$(1,1),\ (1,6),\ (6,41),\ (41,281),\ (281,1926),\ (1926,13201),\ (13201,90481),\ (90481,620166),\cdots;$$
$$(1,2),\ (2,9),\ (9,43),\ (43,206),\ (206,987),\ (987,4729),\ (4729,22658),\ (22658,108561),\cdots;$$
$$(1,3),\ (3,14),\ (14,67),\ (67,321),\ (321,1538),\ (1538,7369),\ (7369,35307),\ (35307,169166),\cdots;$$
$$(2,3),\ (3,7),\ (7,18),\ (18,47),\ (47,123),\ (123,322),\ (322,843),\ (843,2207),\ (2207,5778),\cdots.$$

10.6.30. *Przykłady względnie pierwszych par liczb naturalnych (a,b) takich, że $a \leqslant b$, $a \mid b^2+6$ oraz $b \mid a^2+6$:*

$$(1,1),\ (1,7),\ (7,55),\ (55,433),\ (433,3409),\ (3409,26839),\ (26839,211303),\ (211303,1663585),\cdots.$$

10.6.31. *Przykłady względnie pierwszych par liczb naturalnych (a,b) takich, że $a \leqslant b$, $a \mid b^2+7$ oraz $b \mid a^2+7$:*

$$(1,1),\ (1,8),\ (8,71),\ (71,631),\ (631,5608),\ (5608,49841),\ (49841,442961),\cdots;$$
$$(1,2),\ (2,11),\ (11,64),\ (64,373),\ (373,2174),\ (2174,12671),\ (12671,73852),\cdots;$$
$$(1,4),\ (4,23),\ (23,134),\ (134,781),\ (781,4552),\ (4552,26531),\ (26531,154634),\cdots.$$

10.6.32. *Przykłady względnie pierwszych par liczb naturalnych (a,b) takich, że $a \leqslant b$, $a \mid b^2+8$ oraz $b \mid a^2+8$:*

$$(1,1),\ (1,9),\ (9,89),\ (89,881),\ (881,8721),\ (8721,86329),\ (86329,854569),\cdots;$$
$$(1,3),\ (3,17),\ (17,99),\ (99,577),\ (577,3363),\ (3363,19601),\ (19601,114243),\cdots.$$

10.6.33. *Przykłady względnie pierwszych par liczb naturalnych (a,b) takich, że $a \leqslant b$, $a \mid b^2+9$ oraz $b \mid a^2+9$:*

$$(1,1),\ (1,10),\ (10,109),\ (109,1189),\ (1189,12970),\ (12970,141481),\ (141481,1543321),\cdots;$$
$$(1,2),\ (2,13),\ (13,89),\ (89,610),\ (610,4181),\ (4181,28657),\ (28657,196418),\cdots;$$
$$(1,5),\ (5,34),\ (34,233),\ (233,1597),\ (1597,10946),\ (10946,75025),\ (75025,514229),\cdots.$$

Przez cały czas zakładaliśmy, że m jest liczbą naturalną. Zakończmy ten podrozdział następującym stwierdzeniem dla $m=-1$.

10.6.34 (J. Bronstein 1939)**.** *Istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a,b) takich, że*

$$a \mid b^2-1, \quad b \mid a^2-1, \quad a<b.$$

Każda taka para (a,b) jest wyrazem ciągu postaci

$$(1,s),\ f(1,s),\ f^2(1,s),\ f^3(1,s),\ \ldots,$$

gdzie $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$ oraz $f(x,y)=(y,sy-x)$. ([S59] 77-78).

★ E. S. Barnes, *On the diophantine equation $x^2+y^2+c=xyz$*, [Jlms] 28(1953) 242-244.
W. H. Mills, *A system of quadratic diophantine equations*, [PacJ] 3(1953), 209-220.

Literatura

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.

[Djuk] D. Djukić, *Pell's Equation*, Olympiad Taining Materials, 2007.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[Jlms] Journal of the London Mathematical Society, (J. London. Math. Soc.)

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2012.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[N-6] A. Nowicki, *Podzielność w Zbiorze Liczb Całkowitych*, Podróże po Imperium Liczb, cz.6, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2009; Wydanie drugie 2012.

[N-7] A. Nowicki, *Ciągi Rekurencyjne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.7, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2010; Wydanie drugie 2012.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[PacJ] Pacific Journal of Mathematics.

[Par] Parabola, australijskie czasopismo matematyczne.

[S56] W. Sierpiński, *O Rozwiązywaniu Równań w Liczbach Całkowitych*, PWN, Warszawa, 1956.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.