

Podróże po Imperium Liczb

04 Liczby Pierwsze

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Wersja poprawiona i uzupełniona

19 marca 2012

Wstęp	1
1 Cyfry liczb pierwszych	5
1.1 Początkowe liczby pierwsze	5
1.2 Liczby pierwsze postaci $aa\dots ab$	6
1.3 Liczby pierwsze postaci $abb\dots b$	7
1.4 Liczby pierwsze postaci $abb\dots bc$	7
1.5 Liczby pierwsze postaci $baa\dots ab$	9
1.6 Palindromiczne liczby pierwsze	10
1.7 Absolutne liczby pierwsze	13
1.8 Cyfry potęg liczb pierwszych	15
1.9 Liczby pierwsze utworzone z kolejnych liczb naturalnych	15
1.10 Liczby pierwsze utworzone z kolejnych liczb nieparzystych	19
1.11 Jednolite liczby pierwsze	20
1.12 Początkowe i końcowe cyfry liczb pierwszych	21
2 Informacje i ciekawostki o liczbach pierwszych	22
2.1 Równoważne warunki na pierwszość	22
2.2 Przykłady i własności	22
2.3 Rozkłady na iloczyn liczb pierwszych	23
2.4 Liczby pierwsze i podzielność	25
2.5 Sumy i różnice liczb pierwszych	27
2.6 Hipoteza Goldbacha	28
2.7 Najmniejsze i największe dzielniki pierwsze	30
2.8 Liczby pierwsze i liczby względnie pierwsze	31
2.9 Funkcja π	31
2.10 Różne fakty i zadania o liczbach pierwszych	34
3 Liczby pierwsze szczególnej postaci	36
3.1 Liczby pierwsze Germain	36
3.2 Liczby postaci $p \pm n^2$	38
3.3 Pary liczb pierwszych bliźniaczych	38
3.4 Czworaczki, pięcioraczki, itp	41
3.5 Liczby pierwsze postaci $n^2 + 1$	42

4	Liczby złożone	43
4.1	Przykłady liczb złożonych	43
4.2	Liczby złożone i bazowe systemy kongruencji	44
4.3	Własności liczb złożonych	48
4.4	Ciągi liczb złożonych	49
4.5	Istnienie pewnych liczb złożonych	49
4.6	Liczby złożone i kwadraty	50
4.7	Liczby drugie, trzecie, czwarte,	51
4.8	Różne fakty i zadania o liczbach złożonych	54
5	Ciąg kolejnych liczb pierwszych	55
5.1	Twierdzenie Czebyszewa (Postulat Bertranda)	55
5.2	Ciąg (p_n)	56
5.3	Różnice $p_{n+1} - p_n$	59
5.4	Liczby pierwsze postaci $p\# \pm 1$	60
5.5	Sumy algebraiczne liczb postaci p_n	61
6	Liczby pierwsze w postępach arytmetycznych	63
6.1	Twierdzenie Dirichleta	63
6.2	Liczby pierwsze postaci $ak + b$	63
6.3	Skończone ciągi kolejnych liczb naturalnych i liczby pierwsze	66
6.4	Kolejne wyrazy skończonych ciągów arytmetycznych	70
6.5	Skończone postępy arytmetyczne liczb pierwszych	71
6.6	Uogólnione postępy arytmetyczne liczb pierwszych	77
6.7	Twierdzenie Baloga i jego uogólnienia	79
6.8	Nieskończone postępy arytmetyczne i liczby pierwsze	81
7	Szczególne przypadki twierdzenia Dirichleta	83
7.1	Nieskończoność zbioru liczb pierwszych	83
7.2	Liczby postaci $pk+1$, gdzie p jest liczbą pierwszą	85
7.3	Liczby postaci $ak+1$, gdzie a jest liczbą naturalną	86
7.4	Liczby postaci $2^m k+1$	87
7.5	$3k + r$	87
7.6	$4k + r$	88
7.7	$ak + r$, dla $a= 5, 6, 7$	88
7.8	$8k + r$	89
7.9	$ak + r$, dla $a > 8$	90
8	Małe Twierdzenie Fermata i Twierdzenie Eulera	92
8.1	Małe twierdzenie Fermata	92
8.2	Twierdzenie Eulera	93
8.3	Wzmocniona wersja twierdzenia Eulera	94
8.4	Zastosowania	95
8.5	Rzędy (wykładniki) liczb modulo m	97
8.6	Zadania różne	98

9	Liczby S-pierwsze	99
9.1	Ogólne fakty o liczbach S -pierwszych	99
9.2	Podzbiory mnożymy \mathcal{M}_n	100
9.3	Przykłady dla podzbiorów \mathcal{M}_n	102
9.4	Przykłady dla innych podzbiorów mnożymy	103
10	Liczby pierwsze i nierozkładalne wielomiany	105
10.1	Liczba liczb pierwszych w obrazie i nierozkładalność	106
10.2	Przykłady wielomianów nierozkładalnych z liczbami pierwszymi	107
10.3	Pierwiastki zespolone wielomianów o współczynnikach całkowitych	107
10.4	Kryterium nierozkładalności z liczbami pierwszymi	109
11	Liczby pierwsze i wartości wielomianów	111
11.1	Liczby złożone jako wartości wielomianów	111
11.2	Liczby pierwsze jako wartości wielomianów	111
11.3	Podzielniki pierwsze wartości wielomianu	113
11.4	Trójmiany kwadratowe i liczby pierwsze	114
	Spis cytowanej literatury	117
	Skorowidz nazwisk	123
	Skorowidz	127

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

Skorowidz

- Abel U., 35
Aigner M., 117
Alkauskas G., 92
Anderson J.K., 76, 117
Anderson P.G., 117
Andreescu T., 117
Andrica D., 117
Angel M., 36
Atanassov K.T., 117
Augustin D., 36
- Balog A., 4, 72, 79, 80, 117
Baszmaĳov M.I., 56
Bateman P.T., 34, 91
Bauer, 114
Beard J.T.B. Jr., 66
Bednarek W., 59, 61, 77, 117
Bendukidze A.D., 34
Benjamin A.T., 117
Berlow S.L., 117
Bermant A., 22
Berndt B.C., 117
Bernik V.I., 117
Bevis J.H., 15
Bhargava T.N., 15
Blanus D., 48
Boal J.L., 15
Bobiński Z., 119
Boston N., 116
Brent R.P., 39
Brillhart J., 110, 114
Browkin J., 112, 116, 117
Brown K., 14, 64
Bruns V., 40
Bryński M., 35, 117
Buchsthab A.A., 94, 117
Burn B., 92
- Caldwell Ch.K., 60, 61, 84, 117, 118
Caners L., 5
Capelli A., 95
Carlitz L., 92
Carmichael R.D., 23
Chen J-R., 29, 38, 83
Chermoni R., 76
Chowla S., 72
Clements, 40
Cohen H., 34, 118
Cohn A., 110
Coogan D., 12
Corput van der, 72
Cosgrave J.B., 59, 84
- Crandall R., 35, 118
Czakyrĳan K., 118
- Davenport H., 118
Diamond H.G., 34
Dickson L.E., 118
Dilcher K., 92
Dirichlet, 63
Dixon J.D., 35
Djukić D., 118
Doduniekow S., 118
Dorwart H.L., 118
Doyle P.H., 15
Dubner, 38, 61
Dudley U., 35
Duncan D.G., 93
- Ecklund E.F., 70
Eggleton R.B., 70
Einsiedler M., 112
Erdős P., 45, 48, 70, 92
Escott E.B., 76
Euklides, 83
Euler, 28, 115
Evans R.J., 117
Everest G., 112
Ewnin A., 84, 85
- Feng Z., 117
Filaseta M., 110, 118
Fomin D.V., 118
Forman R., 35
Frind M., 76
Fry J., 76
Furstenberg H., 84
- Gałoczkin A.I., 63, 118
Gabai H., 12
Gajduk J., 35
Galpĳerin G.A., 23, 112, 116
Garrison B., 112
Gauss, 115
Genkin S.A., 118
Germain M.S., 36
Gerst I., 114
Gerstein L.J., 30
Gindykij S.G., 92
Gioia A.A., 118
Gładysz I., 56
Goździalska J., 100
Goldbach, 28, 83
Goldstein L.J., 34

- Golomb S.W., 84
Górnicki J., 35
Granville A., 4, 63, 73, 78, 80, 81, 118
Green B., 4, 73, 78, 79, 116, 118
Greenleaf N., 102
Greenwood M.L., 116
Gribanow W.U., 118
Grigorjan A.A., 121
Grimm C.A., 69, 70
Gross F., 35
Grosswald E., 34
Gueron S., 87
Gutenmacher W.L., 122
Guy R.K., 30, 40, 61, 70, 77, 118
- Hadamard J., 32
Hagedorn M., 66
Hardy G.H., 29, 42
Harris V.C., 84
Hayes D.R., 29, 30
Heinrich K., 93
Hemminger R.I., 84
Hitruk W.S., 54
Hobby D., 34
Horak P., 93
- Iga K., 92
Indlekofer, 39
Ireland K., 119
Isaacs I.M., 92, 119
Itenberg I.W., 118
Iwaniec H., 42
Iwanow S.W., 117
- Ja'rai, 39
Jacobson B., 102
Jadrenko M.I., 122
James R.D., 100
Janković V., 118
Jarek P., 119
Jędrzejewicz P., 119
Jegorow A.A., 122
Jerszow A., 34
Jobling P., 36
Jones J.P., 35, 111
Jones L., 46–48, 119
- Karset E., 76
Kartaszow I.W., 122
Kim M-H., 119
Knapowski S., 35
Kochas K.P., 117
Koninck De J.-M., 22, 23, 119
Konjagin S.W., 121
Korobov A., 56
- Koshy T., 93
Kostis G.J., 40
Kravitz S., 61
Kreczmar A., 35
- Lada A., 15
Landau E., 63, 119
Larsson R.D., 59
Lee W.L., 62
Leech J., 32, 34
Lehmer D.H., 92
LeLionnais F., 119
Lemaire G., 76
Leszczyński B., 70
Levinson N., 34
Littlewood J.E., 29, 42
Low M.E., 91
- Mabkhout, 42
MacKinnon N., 38
Małowski A., 23, 67, 74, 75, 78
Marzantowicz W., 119
Matić I., 118
Matijasewicz J.W., 66
Mavlo D., 15
McLean K.R., 107, 112, 116
Meissel, 32
Melnikow O.W., 117
Mercer I.D., 84
Mercier A., 22, 23, 119
Michaiłowski W.I., 122
Mignotte M., 42
Miszyńska A.P., 119
Mollin R.A., 34, 120
Monsky P., 63
Morozowa E.A., 120
Morton P., 82
Mostowski A., 120
Motose K., 120
Mroczkowska H., 65
Murty R., 87, 110
- Nagell T., 120
Narkiewicz W., 63, 120
Nathanson M.B., 30, 120
Nesterenko Y.V., 63, 118
Newman D.J., 34
Niven I., 87, 100
Nodzyński P., 119
Nowicki A., 6, 110, 120
- Odlyzko A., 110
Olesiak M., 66
Olunloyo V.O.S., 22
Ore O., 106, 118

- Osborn R., 94
- Page R.L., 40
- Pawłowski H., 120, 121
- Penney D.E., 61
- Perez M.L., 121
- Petrović N., 118
- Pietrakow I.S., 120
- Pinasco J.P., 84
- Polignac de A., 59, 60
- Pollack P., 30
- Polya G., 35, 110
- Pomerance C., 35, 118
- Pompe W., 94
- Postnikov M.M., 63, 121
- Pournaki M.R., 92
- Powell B., 87
- Pritchard P., 76
- Proskuriakow I.W., 119
- Rabbot Z.M., 122
- Rabczuk R., 121
- Rademacher H., 84, 121
- Rempała J., 117
- Ribenboim P., 121
- Riesel H., 45, 48
- Robinson R.M., 92
- Rosen M., 119
- Rotkiewicz A., 35, 121
- Rouse J.A., 117
- Rubinstein M., 84
- Ryko W., 34
- Sabia J., 87
- Sadowniczj W.A., 121
- Sato D., 35, 111
- Scherk H.J., 61
- Schinzel A., 29, 58, 121
- Schreiber M., 100
- Schur I., 113, 114
- Selberg A., 63
- Selfridge J., 46
- Senderov W., 92
- Seredinskij N., 76
- Sergiejew N.N., 121
- Sergusov, 40
- Serret, 107
- Shanks D., 121
- Shapiro H.N., 26
- Siebert H., 35
- Sierpiński W., 30, 33, 34, 45, 48, 58, 60, 62, 63, 77, 116, 121
- Silberger D.M., 34
- Silverman J.H., 121
- Singmaster D., 94
- Skulik B., 35
- Ślisko A., 121
- Smarandache F., 121
- Spivak A., 92
- Stark H.M., 115
- Stark M., 120
- Stein A.H., 26
- Stein-Stein, 28
- Steinhaus H., 35
- Stewart I., 35
- Straszewicz S., 117, 121, 122
- Świątek A., 110, 119
- Szapiro G.M., 122
- Szichanowicz Ju., 35
- Szneiderman L.B., 122
- Sznirelman L., 84, 122
- Szoka M., 107
- Szurek M., 122
- Szydłowski A.B., 63, 118
- Tao T., 4, 73, 78, 79, 116, 118
- Tattersall J.J., 23, 122
- Tesauri S., 87
- Tessler R., 87
- Thébault V., 76
- Thangadurai R., 87
- Titow P.I., 118
- Toeplitz O., 84, 121
- Tomalczyk W., 121
- Toom A.L., 122
- Trost E., 63, 122
- Trypanis A.A., 92
- Turowicz A., 122
- Ufanarowski W., 56
- Ulam S., 66, 115
- Uscki M., 119
- Vaidya A.M., 66
- Vallée-Poussin, 32
- Vatwani A., 87
- Wada H., 35, 111
- Waksman A., 35
- Wakulicz A., 65
- Ward T., 112
- Wasilev N.B., 122
- Weinstock R., 93
- Weintraub S., 76
- Weisner L., 107
- Weiss A.D., 22
- Więckowski A., 35
- Wieczyńska J., 110
- Wiens D., 35, 111
- Williams K.S., 117

Winniczenko A.P., 35, 66

Winogradow I., 28, 122

Wisner R.J., 102

Woronin S.M., 23, 122

Wróblewski J., 76, 77, 94

Wunderlich M., 84

Wyszenskij W.A., 122

Yates S., 122

Young J., 76

Zagier D., 34

Zarzycki P., 119

Ziegler G.M., 35, 117

Żuk I.K., 117

Skorowidz

- absolute prime, 13
- bazowy system kongruencji, 44, 46
- bikwadrat liczby naturalnej, 25, 26, 34, 42, 51, 89, 96, 102, 103
- blok, 67, 70, 71
- ciąg
 - arytmetyczny, 10, 21, 28, 30, 31, 45, 63, 71–79, 81, 82, 100, 101, 104, 116
 - liczb pierwszych, 38, 59
 - liczb złożonych, 44
 - nieograniczony, 30
 - nieskończony, 15, 17, 35, 38, 49, 50, 59, 82
 - rekurencyjny, 50
 - skończony, 21, 33, 34, 68, 70, 71, 77, 80
- covering, 44
- cyfry, 6, 9, 10
 - liczby pierwszej, 5–7, 9–22, 36, 37, 45, 48, 50, 54, 56, 60, 61, 109
 - ostatnie, 9, 15, 20, 21, 37, 46, 47
 - początkowe, 15–17, 20, 21, 33, 34, 56
- cykliczne przedstawienie cyfr, 14
- część całkowita, 2, 32, 33, 38, 58, 95
- czwórka liczb naturalnych, 52, 53
- czworaczki, 41
- dywan Ulama, 115
- funkcja
 - φ , 2, 16, 32, 40, 82, 84, 86, 87, 93, 95, 97, 98
 - μ Möbiusa, 32
 - π , 31, 32, 58
 - σ , 40
 - Riemanna, 29
- gigantic prime, 6
- granica ciągu, 26, 32, 33, 35, 42, 58, 59, 113
- hipoteza, 73
 - Goldbacha, 3, 28, 29, 55, 83
 - Grimma, 69
 - Hardy-Littlewooda, 42
 - Polignaca, 59
 - Riemanna, 29
- IMO, 1, 25, 51, 70, 96, 100, 115
 - Longlist, 27, 102
 - Shortlist, 96
- indukcja matematyczna, 57, 58, 61, 93
- jednoznaczność rozkładu, 4
- kolejne liczby, 49, 70
 - naturalne, 15–19, 23, 39, 51–53, 56, 66–69, 71
 - nieparzyste, 19, 70
 - pierwsze, 27, 40, 55, 59, 111
 - złożone, 44
- kryterium Eisensteina, 29, 30, 105
- lemat Gaussa, 105
- liczba
 - bezkwadratowa, 93
 - czwarta, 3, 51, 52
 - druga, 3, 51, 53
 - Fermata, 83, 87
 - Fibonacciego, 83
 - jedynekowa e_n , 13, 14, 95
 - kwadratowa, 22, 38, 39, 50, 51, 60, 61, 115
 - Mersenne’a, 83, 85
 - nieparzysty, 10, 12, 19, 22, 23, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 50, 51, 62, 70, 89, 90, 94, 100, 107
 - palindromiczna, 10
 - parzysty, 10, 13, 27–31, 42, 54, 59, 67, 83, 87, 90, 98
 - piąta, 3, 51, 52
 - pierwsza, 3
 - [s]-pierwsza, 37, 38
 - absolutna, 13, 14
 - Germain, 3, 36–38
 - gigantyczna, 6
 - lewostronnie jednolita, 20
 - palindromiczna, 9–12
 - postaci $a00\dots 0b$, 7
 - postaci $a^b + b^a$, 23
 - postaci $aa\dots ab$, 6, 7, 14
 - postaci $abb\dots b$, 7
 - postaci $baa\dots ab$, 9, 10, 45
 - postaci $n^2 + 1$, 42
 - prawostronnie jednolita, 20
 - tytaniczna, 6
 - postaci $n^2 + 1$, 42, 64
 - postaci $p + \pm n^2$, 38
 - postaci $p\# \pm 1$, 60, 61, 76
 - S-pierwsza, 4, 99–104
 - trzecia, 3, 51–53
 - złożona, 43, 45
 - zero-jedynekowa, 12, 95
 - zespólona, 107–109
- liczby względnie pierwsze, 31, 32, 41, 58, 59, 63, 68, 69, 81, 83, 84, 86, 87, 94, 95, 99, 105, 113
- logarytm, 32, 42, 60
- Maple, 1, 6–10, 15–20, 24, 36–39, 41, 42, 51–54, 59, 66,

- max, 33
- moduły systemu kongruencji, 44
- multiplikatywny podzbiór, 4, 99–104
- najmniejszy dzielnik pierwszy, 30
- największy dzielnik pierwszy, 30, 42
- nierówność, 30, 32, 55–61, 107, 108
- nieskończoność zbioru liczb pierwszych, 21, 25, 28, 29, 35, 38, 40–42, 49, 63, 81, 83–91, 99, 101, 103, 113, 115
- nwd, 1, 25, 40, 69, 97, 105
- nww, 1, 69, 94, 97
- Olimpiada Matematyczna
- Anglia, 49
 - Belgia, 25
 - Brazylia, 115
 - Bułgaria, 30
 - Chorwacja, 25
 - Czechy-Słowacja, 22
 - Hong-Kong, 35
 - Irlandia, 98
 - Jugosławia, 59
 - Kanada, 39, 43
 - Korea, 44
 - Manhatan, 23
 - Moldawia, 57
 - Moskwa, 23, 31, 112
 - Niemcy, 68
 - Polska, 26, 48, 49, 69, 114, 115
 - Rosja, 48
 - Rumunia, 30, 44, 98, 107
 - St Petersburg, 30, 35, 50, 54
 - W.Brytania, 30, 35
 - ZSRR, 13, 49, 68, 114, 115
- otwarty problem, 46
- para liczb
- naturalnych, 26, 51–53, 66, 96
 - pierwszych, 29, 59
 - pierwszych bliźniaczych, 38–40, 59
- permutable prime, 13
- pięcioraczki, 41
- podzbiór ułamkowo gęsty, 33
- podzielniki pierwsze, 26, 30, 31, 35, 42, 54, 66–70, 81, 82, 85, 87–91, 113–115
- podzielność, 12, 14–16, 22, 25–27, 29, 31, 38–41, 43, 50, 54, 58, 65, 69, 74, 76–78, 83, 85, 86, 88, 90–101, 105, 111, 113, 114
- przez 3, 15, 38, 44, 45
 - przez 5, 13, 25, 95, 96
 - przez 6, 39, 72
 - przez 7, 13, 14, 45, 49, 68
 - przez 11, 9, 10, 14, 45, 68, 96
 - przez 12, 98
 - przez 13, 45
 - przez 17, 50, 68, 95
 - przez 24, 25
- postulat Bertranda, 55
- potęga
- dwójki, 15, 22, 25, 30, 34, 44, 45, 49, 51, 54, 56–58, 70, 73, 81, 83, 85, 87, 94, 96
 - liczby pierwszej, 15, 51, 56, 70, 93, 94, 107, 112, 114
 - piątki, 15, 43, 44, 49, 96, 110
 - siódemki, 96
 - szóstki, 96
 - trójki, 30, 87, 96
- prime number theorem, 32
- primorial primes, 60
- problem Gaussa, 115
- przestrzeń topologiczna, 84
- pytanie, 9, 22, 23, 30, 46, 60, 66, 67, 70, 71, 103, 111, 115
- reszta, 13, 14, 25, 26, 39, 41
- równanie, 40, 72, 106
- dwóch zmiennych, 64
 - Fermata, 36
 - jednej zmiennej, 34, 115
- rozkład kanoniczny, 22, 23, 93, 94
- rozwiązanie
- całkowite, 106, 115
 - kongruencji, 113
 - naturalne, 36, 64
 - w zbiorze liczb pierwszych, 40, 72
- rząd liczby, 97
- siedmioraczki, 42
- silnia, 3, 22, 35, 40, 41, 66, 67, 69, 73, 80, 81
- spirala Ulama, 66, 115
- stała Brunsa, 40
- symbol Legendre’a, 88–91
- symbol Newtona, 55, 93
- system kongruencji, 44
- system numeracji, 43, 80, 109
- dwójkowy, 45, 46
 - dziesiętny, 46
- sześcian liczby naturalnej, 23, 25, 43, 96
- sześcioraczki, 42
- szereg, 40, 58, 59
- tablica liczbowa, 5, 36, 115
- titanic prime, 6
- trójka liczb naturalnych, 51–53, 64, 115
- twierdzenie
- Baloga, 4, 72, 79, 80
 - chińskie o resztach, 47, 69
 - Czebyszewa, 3, 55–58, 84

- Dirichleta, 3, 21, 27, 28, 31, 63, 71, 82, 83,
 85–91, 100, 101
 Eulera, 3, 16, 92–95, 97
 Fermata, 64
 Greena-Tao, 4, 73, 78–81, 116
 małe Fermata, 3, 83, 85, 86, 88–93, 96
 o trzech ciągach, 32
 Sierpińskiego, 58
 Szhinzla, 33
 Wilsona, 3
 twin primes, 38

 układ kongruencji, 47, 48
 uogólniony ciąg arytmetyczny, 77

 warunki równoważne, 22, 26, 36, 38–41, 48, 50, 51,
 57, 58, 63–67, 72, 92, 98, 102, 103, 113,
 115
 wielomian, 4, 29, 105, 107, 108, 111–116
 cyklotomiczny, 86
 Eulera, 115
 moniczny, 105
 nierozkładalny, 4, 29, 105–110, 114
 prymitywny, 105
 wykładnik liczby, 97

 zbiór, 31, 38, 50, 60, 64, 68, 77, 78, 80, 97
 \mathbb{N}_0 , 1
 gęsty, 33
 liczb całkowitych, 1, 87–89
 liczb naturalnych, 1, 30, 50, 100
 liczb pierwszych, 1, 22, 28, 35, 54, 80, 81, 83,
 111
 liczb rzeczywistych, 1
 liczb wymiernych, 1
 liczb złożonych, 48
 liczb zespolonych, 1
 nieograniczony, 97
 nieskończony, 15–17, 27–31, 36, 38, 42, 50, 51,
 58, 60, 69, 72, 73, 77–82, 96, 113, 114, 116
 ograniczony, 113
 otwarty, 84
 skończony, 35, 82, 99
 wielomianów, 105