Podróże po Imperium Liczb

Część 04. Liczby Pierwsze

Rozdział 1

1. Cyfry liczb pierwszych

Andrzej Nowicki 19 marca 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

1 Cyfry liczb pierwszych

1.1 Początkowe liczby pierwsze

2	179	419	661	947	1229	1523	1823	2131	2437	2749	3083	3433	3733
3	181	421	673	953	1231	1531	1831	2137	2441	2753	3089	3449	3739
5	191	431	677	967	1237	1543	1847	2141	2447	2767	3109	3457	3761
7	193	433	683	971	1249	1549	1861	2143	2459	2777	3119	3461	3767
11	197	439	691	977	1259	1553	1867	2153	2467	2789	3121	3463	3769
13	199	443	701	983	1277	1559	1871	2161	2473	2791	3137	3467	3779
17	211	449	709	991	1279	1567	1873	2179	2477	2797	3163	3469	3793
19	223	457	719	997	1283	1571	1877	2203	2503	2801	3167	3491	3797
23	227	461	727	1009	1289	1579	1879	2207	2521	2803	3169	3499	3803
29	229	463	733	1013	1291	1583	1889	2213	2531	2819	3181	3511	3821
31	233	467	739	1019	1297	1597	1901	2221	2539	2833	3187	3517	3823
37	239	479	743	1021	1301	1601	1907	2237	2543	2837	3191	3527	3833
41	241	487	751	1031	1303	1607	1913	2239	2549	2843	3203	3529	3847
43	251	491	757	1033	1307	1609	1931	2243	2551	2851	3209	3533	3851
47	257	499	761	1039	1319	1613	1933	2251	2557	2857	3217	3539	3853
53	263	503	769	1049	1321	1619	1949	2267	2579	2861	3221	3541	3863
59	269	509	773	1051	1327	1621	1951	2269	2591	2879	3229	3547	3877
61	271	521	787	1061	1361	1627	1973	2273	2593	2887	3251	3557	3881
67	277	523	797	1063	1367	1637	1979	2281	2609	2897	3253	3559	3889
71	281	541	809	1069	1373	1657	1987	2287	2617	2903	3257	3571	3907
73	283	547	811	1087	1381	1663	1993	2293	2621	2909	3259	3581	3911
79	293	557	821	1091	1399	1667	1997	2297	2633	2917	3271	3583	3917
83	307	563	823	1093	1409	1669	1999	2309	2647	2927	3299	3593	3919
89	311	569	827	1097	1423	1693	2003	2311	2657	2939	3301	3607	3923
97	313	571	829	1103	1427	1697	2011	2333	2659	2953	3307	3613	3929
101	317	577	839	1109	1429	1699	2017	2339	2663	2957	3313	3617	3931
103	331	587	853	1117	1433	1709	2027	2341	2671	2963	3319	3623	3943
107	337	593	857	1123	1439	1721	2029	2347	2677	2969	3323	3631	3947
109	347	599	859	1129	1447	1723	2039	2351	2683	2971	3329	3637	3967
113	349	601	863	1151	1451	1733	2053	2357	2687	2999	3331	3643	3989
127	353	607	877	1153	1453	1741	2063	2371	2689	3001	3343	3659	4001
131	359	613	881	1163	1459	1747	2069	2377	2693	3011	3347	3671	4003
137	367	617	883	1171	1471	1753	2081	2381	2699	3019	3359	3673	4007
139	373	619	887	1181	1481	1759	2083	2383	2707	3023	3361	3677	4013
149	379	631	907	1187	1483	1777	2087	2389	2711	3037	3371	3691	4019
151	383	641	911	1193	1487	1783	2089	2393	2713	3041	3373	3697	4021
157	389	643	919	1201	1489	1787	2099	2399	2719	3049	3389	3701	4027
163	397	647	929	1213	1493	1789	2111	2411	2729	3061	3391	3709	4049
167	401	653	937	1217	1499	1801	2113	2417	2731	3067	3407	3719	4051
173	409	659	941	1223	1511	1811	2129	2423	2741	3079	3413	3727	4057

★ L. Caners, *On tables of factors and primes*, [Mon] 63(7)(1956) 485-487.
Tablica liczb pierwszych do 98 000, [Dlt] 12/88, okładka.

Tablica wszystkich liczb pierwszych mniejszych od 500 000 znajduje się na internetowej stronie autora `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`.

Mówi się (patrz [Yat4], [Yat5]), że liczba pierwsza jest *tytaniczna* (ang. *titanic prime*) jeśli w zapisie dziesiętnym ma co najmniej tysiąc cyfr. Mówi się również liczba pierwsza jest *gigantyczna* (ang. *gigantic prime*) jeśli w zapisie dziesiętnym ma co najmniej 10 tysięcy cyfr ([Yat2b], [Ca06], [Ca07], [Ca08]).

Pewne fakty przedstawione w tym rozdziale, pochodzą z artykułu autora [No-0].

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2 Liczby pierwsze postaci aa...ab

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2.1. *Liczby* 2221, 22222222222222221, 22...21, *mające odpowiednio* 3, 17, 99 *dwójek, są jedynymi liczbami pierwszymi, których wszystkie cyfry, oprócz ostatniej, są dwójkami, do* 100 *dwójek włącznie, a ostatnią cyfrą jest jedynka.* (Maple).

1.2.2. *Liczby* $31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331$ *są pierwsze.*
Następna liczba 333333331 *już nie jest pierwsza, dzieli się przez* 17. ([Ca06]).

1.2.3. *Wszystkimi liczbami pierwszymi postaci* $a_n = \underbrace{33\dots3}_{n}1$*, dla* $n \leqslant 100$*, są liczby* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_{17}, a_{39}, a_{49}, a_{59}, a_{77}, a_{100}. (Maple).

1.2.4. *Liczby* 41, 441, $\underbrace{44\dots4}_{10}1$, $\underbrace{44\dots4}_{27}1$, $\underbrace{44\dots4}_{54}1$, $\underbrace{44\dots4}_{93}1$ *są pierwsze. Są to wszystkie liczby pierwsze tego rodzaju do* 100 *czwórek włącznie.* (Maple).

1.2.5. *Następująca tabelka przedstawia wszystkie liczby pierwsze postaci* $\underbrace{aa\dots a}_{n}1$*, gdzie* $a = 2, 3, \dots, 9$, $n \leqslant 100$.

a	n
2	$3, 17, 99$
3	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 17, 39, 49, 59, 77, 100$
4	$1, 2, 10, 27, 54, 93$
5	$11, 12$
6	$1, 2, 3, 9, 17, 20, 21, 27, 42, 65$
7	$1, 12, 19, 22, 30, 99$
8	$2, 18, 78$
9	$2, 4, 6, 32, 44$

Z tabelki tej odczytujemy, dla przykładu, że liczby 991, 99991, 9999991, $\underbrace{99\dots9}_{32}1$, $\underbrace{99\dots9}_{44}1$, *są pierwsze. Są to jedyne liczby pierwsze tego rodzaju do* 60 *dziewiątek włącznie.* (Maple).

1.2.6. *Tabelki dla liczb postaci* $\underbrace{xx\dots x}_{n}3$, $\underbrace{yy\dots y}_{n}7$, $\underbrace{zz\dots z}_{n}9$, $n \leqslant 101$. (Maple).

x	n
1	$1, 2, 4, 8, 10, 23, 83$
2	$1, 2, 7, 10, 35, 94, 100$
3	$---$
4	$1, 2, 5, 8, 11, 29, 31$
5	$1, 7, 25, 65, 73$
6	$---$
7	$1, 2, 4, 8, 11, 14, 20$
8	$1, 2, 4, 7, 8, 14, 50, 70, 76$
9	$---$

y	n
1	$1, 3, 4, 7, 22, 28, 39$
2	$2, 8, 14, 27, 63$
3	$1, 2, 5, 45$
4	$1, 3, 9, 19, 25$
5	$2, 3, 5, 9, 14, 21, 87$
6	$1, 5, 7, 8, 10, 19, 22, 40, 62, 65$
7	$---$
8	$2, 3, 5, 8, 11, 71$
9	$1, 2, 16$

z	n
1	$1, 4, 5, 7, 16, 49$
2	$1, 2, 4, 13$
3	$---$
4	$2, 4, 5, 47$
5	$1, 7, 11, 17, 25, 31$
6	$---$
7	$1, 65, 85, 89, 101$
8	$1, 13, 16, 34$
9	$---$

Widzimy, w szczególności, że liczby

$$13,\ 113,\ 11113,\ \underbrace{11\dots1}_{8}3,\ \underbrace{11\dots1}_{10}3,\ \underbrace{11\dots1}_{23}3,\ \underbrace{11\dots1}_{83}3,$$

są pierwsze. Są to jedyne liczby pierwsze tego rodzaju do 101 *jedynek włącznie. Z tabelek tych odczytujemy podobną informację o liczbach:*

$$67,\ 666667,\ \underbrace{66\dots6}_{7}7,\ \underbrace{66\dots6}_{8}7,\ \underbrace{66\dots6}_{10}7,\ \underbrace{66\dots6}_{19}7,\ \underbrace{66\dots6}_{22}7,\ \underbrace{66\dots6}_{40}7,\ \underbrace{66\dots6}_{62}7,\ \underbrace{66\dots6}_{65}7.$$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3 Liczby pierwsze postaci abb...b

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3.1. *Liczby* 211, 211111, 21111111111, 211111111111, *mające odpowiednio* 2, 5, 10, 11 *jedynek, są liczbami pierwszymi.* (Maple).

1.3.2. *Następujące tabelki przedstawiają wszystkie liczby pierwsze postaci*

$$t\underbrace{11\dots1}_{n},\quad x\underbrace{33\dots3}_{n},\quad y\underbrace{77\dots7}_{n},\quad z\underbrace{99\dots9}_{n},\qquad \textit{dla}\ \ n \leqslant 100.$$

t	n
1	$1, 18, 22$
2	$2, 3, 12, 18, 23, 57$
3	$2, 5, 10, 11, 13, 34, 47, 52, 77, 88$
4	$3, 13, 25, 72$
5	$5, 12, 15, 84$
6	$5, 7, 25, 31$
7	$7, 55$
8	$2, 3, 26$
9	$2, 5, 20, 41, 47, 92$

x	n
1	$15, 41, 83, 95$
2	$2, 3, 4, 10, 16, 22, 53, 91, 94$
3	$- - -$
4	$2, 16, 31, 37, 55, 62$
5	$3, 13, 25, 49$
6	$- - -$
7	$2, 3, 5, 53, 57$
8	$7, 23, 29$
9	$- - -$

y	n
1	$3, 9, 13, 42, 51, 54, 91$
2	$2, 3, 9, 15, 18, 36, 63$
3	$13, 17$
4	$4, 13, 25, 36$
5	$2, 8, 14, 17, 18, 33, 35$
6	$2, 4, 10, 13, 25$
7	$- - -$
8	$2, 9, 15, 32, 38, 65$
9	$2, 4, 19, 28, 73$

z	n
1	$2, 3, 5, 7, 26, 27, 53$
2	$3, 6, 7, 19, 27, 43, 55$
3	$- - -$
4	$2, 3, 4, 6, 14, 54$
5	$2, 4, 5, 7, 10, 13, 22, 23, 28, 34, 40, 61, 73$
6	$- - -$
7	$4, 5, 8, 10, 25, 49, 76$
8	$2, 7, 19, 29, 37, 93$
9	$- - -$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4 Liczby pierwsze postaci abb...bc

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4.1. *Liczby* 3001, 30000001, 30000000001, 3000000000000000000000000001, *mające odpowiednio* 2, 6, 9, 27 *zer, są liczbami pierwszymi.* (Maple).

1.4.2. *Następujące tabelki przedstawiają wszystkie liczby pierwsze postaci*

$$a\underbrace{00\dots0}_{n}b,\ \ \textit{dla}\ \ n \leqslant 100.$$

(a,b)	n
$(1,1)$	$0,1$
$(2,1)$	$---$
$(3,1)$	$2,6,9,27,35,66,80$
$(4,1)$	$1,2,12$
$(5,1)$	$---$
$(6,1)$	$1,7,8,14,19,25,37,44,64$
$(7,1)$	$1,2,3,4,7,8,44$
$(8,1)$	$---$
$(9,1)$	$2,3,4,8,21,26,35,56,61,77$

x	n
$(1,3)$	$1,4,5,10,16,17,38,55,100$
$(2,3)$	$2,4,5,6,11,15,16,21,23,34$
$(3,3)$	$---$
$(4,3)$	$2,6,9,39$
$(5,3)$	$2,4,5,6,11,15,16,21,23,34$
$(6,3)$	$---$
$(7,3)$	$3,5,15,21,38$
$(8,3)$	30
$(9,3)$	$---$

y	n
$(1,7)$	$1,3,7,8,23,59$
$(2,7)$	$---$
$(3,7)$	$1,4,7,23,28,83$
$(4,7)$	$1,8,38$
$(5,7)$	$---$
$(6,7)$	$1,2,7,8,18,57$
$(7,7)$	$---$
$(8,7)$	$---$
$(9,7)$	$1,2,3,4,14,18,19,45,51,52$

z	n
$(1,9)$	$1,2,3,8,17,21,44,48,55,68$
$(2,9)$	$4,24$
$(3,9)$	$---$
$(4,9)$	$1,3,4,7,8,27$
$(5,9)$	$1,2,4,7,19,28,85$
$(6,9)$	$---$
$(7,9)$	$1,3,5,10,11,12,34,45,56$
$(8,9)$	$1,2,5,11,19,20,36,41,59,97,99$
$(9,9)$	$---$

1.4.3. *Pewne liczby pierwsze postaci abb ... bc.*

$$1\underbrace{99\dots9}_{81}3,\quad 1\underbrace{44\dots4}_{81}7,\quad 2\underbrace{55\dots5}_{81}9,\quad 7\underbrace{99\dots9}_{81}3,\quad 7\underbrace{44\dots4}_{81}9,\quad 6\underbrace{55\dots5}_{82}9,$$

$$4\underbrace{11\dots1}_{83}7,\quad 6\underbrace{33\dots3}_{83}1,\quad 6\underbrace{55\dots5}_{83}1,\quad 6\underbrace{55\dots5}_{83}7,\quad 7\underbrace{33\dots3}_{84}9,$$

$$5\underbrace{44\dots4}_{85}1,\quad 8\underbrace{22\dots2}_{85}7,\quad 9\underbrace{33\dots3}_{85}7,\quad 9\underbrace{66\dots6}_{85}7,$$

$$1\underbrace{55\dots5}_{86}9,\quad 2\underbrace{44\dots4}_{86}7,\quad 4\underbrace{99\dots9}_{86}3,\quad 7\underbrace{22\dots2}_{87}1,\quad 9\underbrace{55\dots5}_{87}1,\quad 9\underbrace{66\dots6}_{88}1,$$

$$1\underbrace{88\dots8}_{89}3,\quad 3\underbrace{44\dots4}_{89}9,\quad 4\underbrace{55\dots5}_{89}3,\quad 4\underbrace{66\dots6}_{89}7,\quad 6\underbrace{44\dots4}_{89}3,\quad 6\underbrace{55\dots5}_{89}3,\quad 6\underbrace{55\dots5}_{89}9,$$

$$7\underbrace{22\dots2}_{89}3,\quad 7\underbrace{66\dots6}_{89}3,\quad 9\underbrace{88\dots8}_{89}1,\quad 4\underbrace{11\dots1}_{90}3,$$

$$6\underbrace{44\dots4}_{91}7,\quad 8\underbrace{44\dots4}_{91}1,\quad 8\underbrace{55\dots5}_{91}9,\quad 9\underbrace{66\dots6}_{91}7,$$

$$7\underbrace{66\dots6}_{92}3,\quad 9\underbrace{55\dots5}_{92}1,\quad 2\underbrace{44\dots4}_{93}3,\quad 2\underbrace{33\dots3}_{93}9,$$

$$4\underbrace{88\dots8}_{95}9,\quad 5\underbrace{99\dots9}_{95}3,\quad 6\underbrace{55\dots5}_{95}3,\quad 6\underbrace{33\dots3}_{95}7,$$

$$2\underbrace{44\dots4}_{96}9,\quad 3\underbrace{55\dots5}_{96}1,\quad 4\underbrace{33\dots3}_{96}7,\quad 5\underbrace{33\dots3}_{98}9,\quad 7\underbrace{66\dots6}_{98}9,\quad 8\underbrace{77\dots7}_{98}3,$$

$$6\underbrace{99\dots9}_{99}1,\quad 6\underbrace{11\dots1}_{100}3,\quad 8\underbrace{44\dots4}_{100}7.$$ (Maple).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5 Liczby pierwsze postaci baa...ab

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5.1. *Nie istnieje żadna liczba pierwsza postaci* $122\dots21$. *Każda bowiem taka liczba jest podzielna przez* 11.

1.5.2. *Liczby* 131, 13331, 1333331, $133\dots31$, *mające odpowiednio* 1, 3, 5, 93 *trójek, są jedynymi liczbami pierwszymi, których wszystkie cyfry, oprócz pierwszej i ostatniej, są trójkami, do* 100 *trójek włącznie, a pierwszą i ostatnią cyfrą jest jedynka.* (Maple).

1.5.3. *Następujące tabelki przedstawiają wszystkie liczby pierwsze postaci*

$$1\underbrace{tt\dots t}_{n}1,\quad 3\underbrace{xx\dots x}_{n}3,\quad 7\underbrace{yy\dots y}_{n}7,\quad 9\underbrace{zz\dots z}_{n}9,\qquad \textit{dla}\ \ n\leqslant 100.$$

t	n
1	$0, 17, 21$
2	$---$
3	$1, 3, 5, 93$
4	$5, 65$
5	$1, 3, 19, 31$
6	$3, 11, 15, 17, 35, 51, 71, 99$
7	$5, 47$
8	$1, 7, 13, 39, 91$
9	$1, 3, 7, 39, 85$

x	n
1	$1, 11, 13, 29$
2	$5, 7$
3	$---$
4	$5, 11$
5	$1, 7$
6	$---$
7	$1, 13, 53, 67, 83, 85$
8	$1, 11, 29, 59$
9	$---$

y	n
1	$---$
2	$1, 3, 7, 27, 63$
3	$---$
4	$9, 29$
5	$1, 3, 9, 19, 21, 57, 73, 81$
6	$1, 5, 53, 95$
7	$---$
8	$1, 3, 85$
9	$1, 3, 27$

z	n
1	1
2	$1, 5, 11$
3	$---$
4	$---$
5	$---$
6	$---$
7	$---$
8	$5, 71, 95$
9	$---$

1.5.4. *Nie ma liczb pierwszych postaci* $733\dots37$ *i nie ma liczb pierwszych postaci* $977\dots79$.

D. Każda liczba takiej postaci jest podzielna przez 11. ⊠

W rozdziale o liczbach złożonych (patrz 4.2.1 i 4.2.2) udowodnimy:

1.5.5. *Nie ma liczb pierwszych postaci* $944\dots449$ *oraz* $955\dots559$.

Niech $d_n = 7\underbrace{11\dots11}_{n}7$. Nie znam odpowiedzi na następujące pytanie.

1.5.6. *Czy istnieją liczby pierwsze postaci* d_n *?*

Łatwo sprawdzić, że jeśli n jest parzyste, to liczba d_n jest podzielna przez 11. Jeśli $n \equiv 1 \pmod 3$, to $3 \mid d_n$. Jeśli $n \equiv 5 \pmod 6$, to $13 \mid d_n$. Kłopoty są w przypadku gdy n jest nieparzystą liczbą podzielną przez 3. Przykłady:

$$d_9 = 85999 \cdot 826883, \quad d_{33} = 3359 \cdot 211703218550494525487082795805 63.$$

Sprawdzono, za pomocą Maple, że d_n nie jest liczbą pierwszą gdy $n \leqslant 134$.

★ Tablica liczb pierwszych zbudowanych z dwóch cyfr znajduje się na internetowej stronie autora `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6 Palindromiczne liczby pierwsze

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że dana liczba naturalna n jest *palindromiczna* (patrz [Ri97], [Rabc], [N-2]) jeśli pokrywa się z liczbą mającą cyfry liczby n zapisane w odwrotnym kierunku. Przykłady: 676, 123454321, 557343755. W poprzednim rozdziale zajmowaliśmy się palindromicznymi liczbami pierwszymi postaci $baa \dots aab$. Teraz podamy inne przykłady palindromicznych liczb pierwszych. Do powstania tych przykładów przyczyniły się komputery i Maple.

1.6.1. *Każda liczba palindromiczna o parzystej liczbie cyfr jest podzielna przez* 11. *Palindromiczne liczby pierwsze* (*oprócz* 11) *mają więc nieparzystą liczbę cyfr.*

1.6.2. *Wszystkie trzycyfrowe palindromiczne liczby pierwsze* (*jest ich* 15) :

$$\begin{array}{c} 101, 131, 151, 181, 191, \\ 313, 353, 373, 383, 727, \\ 757, 787, 797, 919, 929. \end{array}$$

1.6.3. *Wszystkie pięciocyfrowe palindromiczne liczby pierwsze* (*jest ich* 93) :

10301,	10501,	10601,	11311,	11411,	12421,	12721,	12821,	13331,	13831,
13931,	14341,	14741,	15451,	15551,	16061,	16361,	16561,	16661,	17471,
17971,	18181,	18481,	19391,	19891,	19991,	30103,	30203,	30403,	30703,
30803,	31013,	31513,	32323,	32423,	33533,	34543,	34843,	35053,	35153,
35353,	35753,	36263,	36563,	37273,	37573,	38083,	38183,	38783,	39293,
70207,	70507,	70607,	71317,	71917,	72227,	72727,	73037,	73237,	73637,
74047,	74747,	75557,	76367,	76667,	77377,	77477,	77977,	78487,	78787,
78887,	79397,	79697,	79997,	90709,	91019,	93139,	93239,	93739,	94049,
94349,	94649,	94849,	94949,	95959,	96269,	96469,	96769,	97379,	97579,
97879,	98389,	98689.							

1.6.4. *Przykłady czterech palindromicznych liczb pierwszych tworzących ciąg arytmetyczny:*

10301,	13331,	16361,	19391;
13931,	14741,	15551,	16361;
70607,	73637,	76667,	79697;
94049,	94349,	94649,	94949.

([MM] 29(2)(1955) s.110).

1.6.5. *Palindromiczne liczby* 199909991 *i* 199999991 *są pierwsze.*

1.6.6. *Palindromiczne liczby pierwsze:*

19990209991,	19990809991,	19992229991,	19993539991,	19994449991,
19994749991,	19995759991,	19997379991,	19997479991,	19998289991.

1.6.7. *Przykłady palindromicznych liczb pierwszych:*

123424321	1234562654321	1234567891234567892929876543219876543 21
123484321	1234565654321	123456789123456789505987654321987654321
123494321	123456737654321	123456789123456789535987654321987654321
12345254321	123456797654321	112233445566778899020998877665544332211
12345854321	12345678487654321	
	1234567894987654321	

1.6.8. *Następne przykłady palindromicznych liczb pierwszych:*

111181111	33533
111191111	3331333
1111118111111	3337333
111111151111111	333333313333333
111111181111111	333333373333333
1111111111111111111	333333383333333
111111111161111111111	33333333333733333333333
11111111111111111111111	333333333333373333333333333
11111111111111611111111111111	33333333333333333533333333333333333
111111111111111111131111111111111111111	33333333333333333733333333333333333

1.6.9. *Kolejne przykłady palindromicznych liczb pierwszych:*

77377	99999199999
77477	99999999299999999
77977	9999999992999999999
7772777	999999999999919999999999999
7774777	99999999999999499999999999999
7778777	
777767777	
77777677777	
7777774777777	
777777727777777	
777777757777777	
77777777677777777	
77777777977777777	
777777777727777777777	
77777777777677777777777	
7777777777772777777777777	
777777777777757777777777777	
777777777777777777797777777777777777777	

1.6.10. *Wszystkie palindromiczne liczby pierwsze, odpowiednio* 7, 9 *i* 11*-to cyfrowe, zbudowane tylko z cyfr* 1 *i* 2.

1221221	121111121	12222122221
1212121	112212211	12121212121
	112111211	

Nie ma tego rodzaju liczb pierwszych 13*-to cyfrowych. Jest natomiast* 10 *takich liczb* 15*-to cyfrowych i tyleż samo* 17*-to cyfrowych. Oto one:*

122222121222221	12222122122122221
122212222212221	12212121112121221
122212111212221	12212112221121221
122121121121221	12211122122111221
121112111211121	12111111111111121
112222111222211	11222222122222211
112221121122211	11222211211222211
112212212212211	11121111111112111
112111212111211	11112212121221111
111111212111111	11111222122211111

1.6.11. *Każda liczba ciągu* 121, 11211, 1112111, ... *jest złożona.* ([PaT2]).

1.6.12. *Palindromiczne liczby pierwsze zbudowane z zer i jedynek.*

101
100111001
110111011
111010111
1100011100011
1110110110111
1110111110111

101000010000101
101110000011101
111100111001111
10000010101000001
10111000000011101
10111101110111101
10111110101111101
1011111110111111101

1000011111111111100001
1000111110101111110001
1001111111111111111001
1010000000010000000101
1100000000010000000011
1100000111111110000011
1110000111111110000111
1111011011111101101111
1111100000111000011111
1111101011111101011111
1111111110111011111111

10000100000100000100001
10000111111011111100001
10011111111111111111001
10110111111111111101101
11000000001110000000011
11100000011111000000111
11111100000100000111111
11111111000100011111111
11111111100100111111111
11111111111111111111111

100000001110000000111000000001
100011110001111111100011110001
100011111111110111111111110001
100111111000000000000111111001
101111111111011101111111111101
111011111111011101111111101111
111111011111111011111111011111
111111110000000100000001111111

1.6.13. *Wśród liczb postaci* $10101\dots10101$ *tylko* 101 *jest liczbą pierwszą.* ([Putn] 1990).

D. 101 jest oczywiście liczbą pierwszą. Jeśli n jest nieparzyste, to liczba postaci $100^n + 100^{n-1} + ... + 1$ jest podzielna przez 101. Jeśli natomiast n jest parzyste, to liczba taka jest podzielna przez $10^n + 10^{n-1} + ... + 1$. ⊠

1.6.14. *Każda liczba postaci* $10001,\ 100010001,\ 1000100010001, \dots$ *jest złożona.* ([Mat] 1/51 42, 59).

U. $10001 = 73 \cdot 137$, $100010001 = 3 \cdot 33336667$, $1000100010001 = 10001 \cdot 100000001$. ⊠

1.6.15. *Każda liczba postaci* $100001,\ 10000100001,\ 1000010000100001, \dots$ *jest złożona.* ([Mat] 1/54 57, [Mat] 1/51 44).

1.6.16. *Przykłady palindromicznych liczb pierwszych zbudowanych z dwóch cyfr:*

1212121, 12121212121, 1212121212121212121212121212121212121212121,
131, 1313131313131313131313131,
14141414141,
151, 151515151515151,
151515151515151515151515151515151515151515151515151515151515151,
1616161, 1616161616161616161616161616161616161616161616161616161,
1717171717171717171717171717171, 1717171717171717171717171717171717171,
181, 18181, 181818181818181818181818181818181818181818181818181818181818181,
191, 191919191919191919191919191919191,
19991, 1999199919991999199919991.

★ H. Gabai, D. Coogan, *On palindromes and palindromic primes*, [MM] 42(5)(1969) 252-254.
Tablica palindromicznych liczb pierwszych (do 9-cyfrowych włącznie) znajduje się na internetowej stronie autora `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7 Absolutne liczby pierwsze

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że liczba pierwsza jest *absolutna* jeśli pozostaje pierwsza przy każdej permutacji cyfr ([Sli]). Angielskie nazwy: *absolute primes* lub *permutable primes*. Absolutnymi liczbami pierwszymi są liczby pierwsze postaci $e_n = 11\dots11$ (n jedynek). Znamy 5 takich liczb: e_2, e_{19}, e_{23}, e_{317} i e_{1031}. Absolutnymi liczbami pierwszymi są oczywiście wszystkie liczby pierwsze jednocyfrowe: $3, 5, 7$.

1.7.1. *Wszystkie absolutne liczby pierwsze dwucyfrowe:* $13, 31, 17, 71, 37, 73, 79, 97$.

1.7.2. *Wszystkie absolutne liczby pierwsze trzycyfrowe:*

$$113, 131, 311,\ \ 337, 373, 733,\ \ 199, 919, 991.$$

1.7.3. *Jeśli p jest absolutną liczbą pierwszą większą od* 10*, to wszystkie cyfry liczby p należą do zbioru* $\{1, 3, 7, 9\}$.

D. Nie może pojawić się żadna z cyfr $2, 4, 6, 8, 0$, gdyż po przestawieniu takiej cyfry na koniec, otrzymujemy liczbę parzystą. Nie może też być żadnej piątki. Po przestawieniu piątki na koniec otrzymujemy liczbę podzielną przez 5. ⊠

1.7.4. *Nie ma takiej absolutnej liczby pierwszej, w której zapisie dziesiętnym występują cztery różne cyfry.* ([MM] 47(4)(1974) 233, [OM] ZSRR 1984, [Sli]).

D. Mogą być tylko cyfry $1, 3, 7, 9$. Przypuśćmy, że te wszystkie cyfry występują. Przenieśmy je na koniec. Mamy wówczas liczbę pierwszą postaci $a + 1379$, gdzie $a = 0$ lub $a > 10000$. Wówczas każda z liczb $a + 1379$, $a + 3179$, $a + 9137$, $a + 7913$, $a + 1397$, $a + 3197$, $a + 7139$ jest pierwsza. Mamy 7 liczb. Ich reszty z dzielenia przez 7 są różne (co łatwo sprawdzić). Jedna z nich musi się więc dzielić przez 7; sprzeczność. ⊠

1.7.5. *Nie ma takiej absolutnej liczby pierwszej, w której zapisie dziesiętnym występują trzy różne cyfry.* ([MM] 50(2)(1977) 100-103).

D. ([MM] 50(2)(1977))(Szkic). Przypuśćmy, że istnieje taka absolutna liczba pierwsza p, w której występują trzy parami różne cyfry. Musi ona wtedy mieć co najmniej cztery cyfry (bo znamy wszystkie trzycyfrowe absolutne liczby pierwsze) i wszystkie jej cyfry należą do zbioru $\{1, 3, 7, 9\}$. Analizujemy wszystkie przypadki.

Przypadek $\{1, 3, 7\}$. Załóżmy, że w liczbie p występują cyfry $1, 3, 7$. Wtedy nie występuje cyfra 9 (na mocy 1.7.4). Musi więc występować jeszcze raz co najmniej jedna z cyfr $1, 3, 7$. Załóżmy, że jest to cyfra 1. Przenosimy rozważane cyfry na koniec. Czterocyfrowe liczby

$$3171,\ 1317,\ 1731,\ 1137,\ 1173,\ 1713,\ 1371$$

mają reszty z dzielenia przez 7 odpowiednio równe $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Po odpowiedniej permutacji cyfr liczby p otrzymamy więc zawsze liczbę podzielną przez 7. To jest sprzeczne z tym, że p jest absolutną liczbą pierwszą.

Załóżmy, że oprócz cyfr $1, 3, 7$ występuje drugi raz cyfra 3. W podobny sposób podzielność przez 7 prowadzi do sprzeczności.

Załóżmy, że oprócz cyfr $1, 3, 7$ występuje drugi raz cyfra 7. Tutaj również podzielność przez 7 prowadzi do sprzeczności.

Przypadek $\{1, 3, 7\}$ nie jest więc możliwy. W ten sam sposób sprawdzamy przypadki $\{1, 3, 9\}$, $\{1, 7, 9\}$ oraz $\{3, 7, 9\}$. Zawsze podzielońś przez 7 doprowadzi nas do sprzeczności. ⊠

1.7.6. *Nie istnieje żadna* 4*-cyfrowa absolutna liczba pierwsza.*

D. Przypuśćmy, że p jest czterocyfrową absolutną liczbą pierwszą. Ponieważ liczba 1111 jest podzielna przez 11, więc - na mocy 1.7.5 - w liczbie p występują dokładnie dwie różne cyfry a i b, należące oczywiście do zbioru $\{1, 3, 7, 9\}$. Jeśli każda z tych cyfr występuje dokładnie dwa razy, to mamy sprzeczność, gdyż liczba postaci $\overline{aabb}$ jest podzielna przez 11. Zatem jedna z tych cyfr, powiedzmy cyfra b, występuje dokładnie jeden raz. Ponieważ żadna z liczb 1333, 7771, 9991 nie jest liczbą pierwszą, więc $b \neq 1$. Ponieważ żadna z liczb 1113, 7773, 9993 nie jest liczbą pierwszą, więc $b \neq 3$. Analogicznie $b \neq 7$, gdyż liczby 7111, 3337, 9997 są złożone. Pozostaje jedynie przypadek $b = 9$, który też jest niemożliwy, gdyż wszystkie liczby 1119, 3339, 7779 są podzielne przez 3. ⊠

1.7.7. *Jeśli absolutna liczba pierwsza jest zbudowana z dokładnie dwóch różnych cyfr* (*oczywiście należących do zbioru* $\{1, 3, 7, 9\}$), *to jedna z tych cyfr występuje dokładnie jeden raz.* ([MM] 50(2)(1977) 102).

D. ([MM] 50(2)(1977)).(Szkic). Z powyższych faktów wynika, że możemy założyć iż rozpatrywana absolutna liczba pierwsza ma co najmniej 5 cyfr. Przypuśćmy, że jest ona zbudowana z cyfr a i b, gdzie $a \neq b$ i każda z tych dwóch cyfr występuje co najmniej dwa razy. Rozpatrujemy wszystkie możliwe przypadki.

Rozpatrzmy przykładowo przypadek $(a, b) = (1, 3)$. W tym przypadku piąta istniejąca cyfra musi (na mocy 1.7.5) być równa 1 lub 3. Załóżmy, że jest równa 1. Permutując cyfry liczby 11133 można otrzymać wszystkie reszty z podzielności przez 7. Dokładniej, reszty z dzielenia przez 7 liczb

$$31311,\ 11313,\ 13113,\ 11133,\ 13311,\ 11331,\ 13131$$

są odpowiednio równe $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Istnieje więc taka permutacja cyfr rozpatrywanej liczby, że otrzymamy liczbę podzielną przez 7. Zatem rozpatrywana liczba nie jest absolutną liczbą pierwszą. Podobnie postępujemy w przypadku, gdy piąta istniejąca cyfra jest równa 3.

Tak samo postępujemy w przypadku $(a, b) = (1, 7)$ i we wszystkich pozostałych przypadkach. Zawsze podzielność przez 7 prowadzi do sprzeczności. ⊠

1.7.8. *Każda wielocyfrowa absolutna liczba pierwsza jest postaci* e_n *lub postaci*

$$B_n(a, b) = \underbrace{aa\ldots a}_{n-1}b,$$

gdzie a, b *są różnymi cyframi ze zbioru* $\{1, 3, 7, 9\}$. (Wynika z 1.7.7, [Sli]).

1.7.9. *Niech* $B_n(a, b)$ *będzie takie, jak w* 1.7.8*. Jeśli dla* $n > 3$ *liczba* $B_n(a, b)$ *jest absolutną liczbą pierwszą, to* $(a, b) \neq (9, 7), (9, 1), (1, 7), (7, 1), (3, 9), (9, 3)$. ([Sli]).

1.7.10. *Jeśli* p *jest absolutną liczbą pierwszą* n*-cyfrową, różną od* e_n*, to* n *jest podzielne przez* 11088. ([Sli]).

Oprócz pewnych liczb postaci e_n, nie są znane żadne absolutne liczby pierwsze posiadające co najmniej 4 cyfry.

1.7.11. *Liczby pierwsze, które są liczbami pierwszymi przy każdym cyklicznym przestawieniu cyfr:*

$$\begin{aligned} dwucyfrowe: &\quad 13, 37, 17, 79;\\ trzycyfrowe: &\quad 113, 197, 199, 337;\\ czterocyfrowe: &\quad 1193, 3779;\\ pięciocyfrowe: &\quad 11939, 19937;\\ sześciocyfrowe: &\quad 193939, 199933.\end{aligned}$$

Nie ma 7*-mio i* 8*-mio cyfrowych takich liczb.* (K. Brown, Reflective and cyclic sets of primes).

★ T. N. Bhargava, P. H. Doyle, [MM] 47(4)(1974) 233.
J. L. Boal, J. H. Bevis, *Permutable primes*, [MM] 55(1)(1982) 38-41.
A. Lada, *Liczby naturalne o szczególnym rozmieszczeniu cyfr*, [Pmgr] 2009.
D. Mavlo, *Absolute prime numbers*, [MG] 79(485)(1995) 299-304.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8 Cyfry potęg liczb pierwszych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8.1. *Największą liczbą pierwszą p taką, że p^2 nie ma podwójnych cyfr jet $p = 21397$. Wtedy $p^2 = 457831609$.* ([Mon] 47(4)(1940) E385).

1.8.2. *Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wiadomo, że liczba p^n jest 20-cyfrowa. Wykazać, że co najmniej trzy cyfry są jednakowe.* ([WyKM] 809).

D. Gdyby tak nie było, to każda z cyfr $0, 1, \dots, 9$ występowałaby dokładnie dwa razy. Suma cyfr podzielna byłaby przez 3, a więc liczba p^n byłaby podzielna przez 3. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.9 Liczby pierwsze utworzone z kolejnych liczb naturalnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wszystkie liczby naturalne wypisano kolejno bez odstępów i otrzymano nieskończony ciąg cyfr $123456789101112131415\dots$. Niech a_n oznacza n-cyfrową liczbę naturalną otrzymaną z n początkowych cyfr tego ciągu. Przykłady: $a_1 = 1$, $a_2 = 12$, $a_3 = 123, \dots, a_9 = 123456789$, $a_{10} = 1234567891$, $a_{20} = 12345678910111213141$.

1.9.1. *Liczbami pierwszymi postaci a_n (dla $n \leqslant 500$) są:*

$$\begin{aligned}
a_{10} &= 1234567891, \\
a_{14} &= 12345678910111, \\
a_{24} &= 123456789101112131415161, \\
a_{235} &= 123456789101112131415\dots1121131141. \text{ (Maple).}
\end{aligned}$$

1.9.2. *Wykazać, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $2003 \mid a_n$.* ([Kw] 5/2003 s.25, patrz 1.9.4).

O. (Maple). Najmniejszym takim n jest 440. Liczba $a_{440} = 1234\dots18018118218$ jest podzielna przez 2003. Liczby $a_{1437} = 1234\dots513\,514\,515$ i $a_{1607} = 1234\dots569\,570\,571\,57$ również są podzielne przez 2003. Są to jedyne tego typu liczby dla $n \leqslant 2000$. ⊠

1.9.3. *Dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych a i b istnieje liczba naturalna n taka, że liczba a_n jest podzielna przez 2^a5^b.*

D. Niech $m = \max(a, b)$. W ciągu (a_n) występują oczywiście liczby zakończone m zerami. Te liczby spełniają tezę. ⊠

1.9.4. *Niech m będzie liczbą naturalną względnie pierwszą z 10. Istnieje wtedy nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $m \mid a_n$.*

D. Niech $q = 10^{\varphi(m)}$. Wiemy (twierdzenie Eulera), że $q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ m)$. Dana liczba naturalna n dzieli się zatem przez m wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby n w zapisie numeracji o podstawie q dzieli się przez m. Wybierzmy z ciągu (a_n) liczbę b postaci

$$b = 1234\ldots00\ldots00\,\underbrace{00\ldots001}_{q}\underbrace{00\ldots001}_{q}\ldots\underbrace{00\ldots001}_{q}$$

przy czym układów $\underbrace{00\ldots001}_{q}$ jest m.

Część początkową tej liczby oznaczmy przez c, tzn. $c = 1234\ldots00\ldots00$. Oczywiście c jest wyrazem ciągu (a_n). Niech r będzie resztą z dzielenia liczby c przez m. Jeśli $r = 0$, to liczba c jest podzielna przez m. Jeśli $r \neq 0$, to dopisujemy do liczby c układy $\underbrace{00\ldots001}_{q}$; dopisujemy $m - r$ takich układów. Otrzymana liczba jest wyrazem ciągu (a_n) i (na mocy wspomnianej cechy podzielności przez m) jest ona podzielna przez m.

W ten sposób wykazujemy istnienie liczby postaci a_n podzielnej przez m. Ponieważ liczb typu b jest nieskończenie wiele, więc istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $m \mid a_n$. ⊠

1.9.5. *Dla danej liczby naturalnej m (względnie pierwszej z 10) oznaczmy przez $A(m)$ najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $m \mid a_n$. Istnienie liczby $A(m)$ wynika z* 1.9.4.

Przykłady: $A(3) = 2$, $A(7) = 13$, $A(9) = 8$, $A(11) = 66$, $A(13) = 13$, $A(15) = 5$, $A(17) = 16$, $A(19) = 20$, $A(23) = 57$, $A(27) = 43$, $A(29) = 18$, $A(31) = 42$, $A(33) = 156$, $A(37) = 33$, $A(41) = 3$, $A(43) = 29$, $A(47) = 8$, $A(53) = 157$, $A(59) = 116$, $A(61) = 94$, $A(67) = 13$, $A(71) = 65$, $A(73) = 82$, $A(79) = 29$, $A(83) = 133$, $A(89) = 174$, $A(97) = 27$, $A(101) = 150$. (Maple).

Liczba 1901 jest pierwsza. Dwudziesty wiek rozpoczął się więc rokiem przedstawiającym liczbę pierwszą. W dwudziestym wieku mieliśmy jeszcze takie liczby pierwsze: 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997 oraz 1999. Najmniejszą tego rodzaju liczbą pierwszą w dwudziestym pierwszym wieku była liczba 2003. W tym wieku spotkamy się jeszcze z następującymi liczbami pierwszymi: 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089 oraz 2099.

1.9.6. *Przykłady liczb pierwszych powstałych przez sklejenie cyfr kolejnych liczb naturalnych z przedziału* $(1900, 2100)$. (Maple).

1904 1905 ⋯ 1917,
1907 1908 ⋯ 1913,
1910 1911 ⋯ 1923,
1916 1917 1918 1919,
1920 1921,
1923 1924 ⋯ 1951,
1928 1929 1930 1931,
1928 1929 ⋯ 1959,
1936 1937 1938 1939,

1954 1955 ⋯ 1963,
1954 1955 ⋯ 1969,
1956 1957,
1962 1963,
1964 1965 1966 1967,
1964 1965 ⋯ 2003,
1967 1968 ⋯ 1991,
1968 1969,
1975 1976 ⋯ 1981,
1976 1977,
1976 1977 1978 1979,
1985 1986 ⋯ 1989,
1989 1990 ⋯ 2017,
1998 1999,

2000 2001 2002 2003,
2008 2009 ⋯ 2023,
2009 2010 ⋯ 2049,
2015 2016 ⋯ 2027,
2019 2020 ⋯ 2059,
2020 2021 2022 2023,
2021 2022 ⋯ 2043,
2025 2026 ⋯ 2029,
2030 2031 2031 2033,
2032 2033 ⋯ 2047,
2035 2036 ⋯ 2041,
2042 2043,
2044 2045 2046 2047,
2046 2047,
2048 2049 ⋯ 2073,

2054 2055 2056 2057,
2054 2055 ⋯ 2079,
2063 2064 ⋯ 2067,
2066 2067 ⋯ 2073,
2068 2069 2070 2071,
2069 2070 ⋯ 2073,
2071 2072 ⋯ 2083,
2072 2073,
2077 2078 ⋯ 2083,
2084 2085 2086 2087,
2086 2087 ⋯ 2089.

1.9.7. *Przykłady liczb pierwszych utworzonych z kolejnych liczb naturalnych.* (Maple).

23	4567	23456789
67	14151617	678910111213
89	20212223	3637383940414243
1213	34353637	4445464748495051
3637	58596061	45678910111213
4243	64656667	20212223242526272829
5051	1516171819	68697071727374757677
5657	3940414243	88899091929394959697
6263	5758596061	567891011121314151617
6869	6566676869	5051525354555657585960616263
7879	7778798081	345678910111213141516171819
8081	8384858687	2324252627282930313233343536373839404 1
9091	8990919293	5960616263646566676869707172737475767 7
9293	78910111213	3839404142434445464748495051525354555657
9697	37383940414243	1718192021222324252627282930313233343536373839

1.9.8. *Przykłady liczb pierwszych utworzonych z kolejnych liczb naturalnych.* (Maple).

23456789101112131415161718192021222324252627
2526272829303132333435363738394041424344454647484 9
78798081828384858687888990919293949596979899100101102103
1617181920212223242526272829303132333435363738394041424 3

Wszystkie liczby naturalne, począwszy od danej liczby naturalnej s, wypisano kolejno bez odstępów i otrzymano nieskończony ciąg cyfr. Niech $x[s]_n$ oznacza n-cyfrową liczbę naturalną otrzymaną z n początkowych cyfr tego ciągu.

1.9.9. *Niech m będzie liczbą naturalną względnie pierwszą z 10. Istnieje wtedy nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że m dzieli $x[s]_n$.* (Dowodzimy to tak samo jak 1.9.4).

1.9.10. *Wszystkie liczby pierwsze postaci $x[s]_n$ dla $s = 2, 3, 4, 5$ oraz $n \leqslant 500$.* (Maple).

$$\begin{aligned}
x[2]_2 &= 23,\\
x[2]_8 &= 23456789,\\
x[2]_{44} &= 23456789101112131415161718192021222324252627;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x[3]_{27} &= 345678910111213141516171819,\\
x[3]_{58} &= 3456789101112131415161718192021222324252627282930313233343;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x[4]_4 &= 4567,\\
x[4]_7 &= 4567891,\\
x[4]_{11} &= 45678910111,\\
x[4]_{14} &= 45678910111213,\\
x[4]_{208} &= 4567\ldots 104\,105\,106\,1,\\
x[4]_{427} &= 4567\ldots 177\,178\,179\,1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x[5]_8 &= 56789101,\\
x[5]_{21} &= 567891011121314151617,\\
x[5]_{129} &= 5678\ldots 68\,69\,70\,71,\\
x[5]_{185} &= 5678\ldots 97\,98\,99\\
x[5]_{257} &= 5678\ldots 121\,122\,123.
\end{aligned}$$

1.9.11. *Wszystkie liczby pierwsze postaci $x[s]_n$ dla $s = 6, 7, 8, 9$ oraz $n \leqslant 500$.* (Maple).

$$\begin{aligned}
x[6]_2 &= 67,\\
x[6]_5 &= 67891,\\
x[6]_{12} &= 678910111213;\\
x[7]_6 &= 789101,\\
x[7]_{11} &= 78910111213,\\
x[7]_{267} &= 78910\dots 125\,126\,127;\\
x[8]_2 &= 89,\\
x[8]_5 &= 89101,\\
x[8]_{51} &= 891011121314151617181920212223242526272829303132333,\\
x[8]_{332} &= 8910\dots 147\,148\,149;\\
x[9]_{10} &= 9101112131,\\
x[9]_{14} &= 91011121314151,\\
x[9]_{18} &= 910111213141516171,\\
x[9]_{410} &= 91011\dots 173\,174\,175\,1,\\
x[9]_{445} &= 91011\dots 185\,186\,187.
\end{aligned}$$

1.9.12. *Wszystkie liczby pierwsze postaci $x[s]_n$ dla $s = 10$ i 11 oraz $n \leqslant 500$.* (Maple).

$$\begin{aligned}
x[10]_3 &= 101,\\
x[10]_5 &= 10111;\\
x[11]_7 &= 1112131,\\
x[11]_{57} &= 111213141516171819202122232425262728293031323334353637383.
\end{aligned}$$

1.9.13. *Czy liczba* $19202122\dots787980$ *dzieli się przez* 1980 *?* Odp. *Tak.* ([WaJ] 284(80)).

1.9.14. *Wszystkie liczby pierwsze postaci $x[s]_n$ dla $s = 100$, 101, i 1000 oraz $n \leqslant 500$.*

$$\begin{aligned}
x[100]_{52} &= 1001011021031041051061071081091101111121131141151161,\\
x[100]_{142} &= 100101\dots 144\,145\,146\,1,\\
x[100]_{145} &= 100101\dots 145\,146\,147\,1,\\
x[100]_{275} &= 100101\dots 188\,189\,190\,19;\\
x[101]_3 &= 101,\\
x[101]_{53} &= 10110210310410510610710810911011111211311411511611711;\\
x[1000]_{13} &= 1000100110021,\\
x[1000]_{93} &= 10001001\dots 1020\,1021\,1022\,1,\\
x[1000]_{293} &= 10001001\dots 1070\,1071\,1072\,1.
\end{aligned}$$
(Maple).

Spójrzmy na liczby naturalne powstałe przez sklejenie wszystkich wyrazów ciągu

$$n,\ n-1,\ n-2,\ \dots, m+2,\ m+1,\ m,$$

gdzie $n > m$ są liczbami naturalnymi. Oznaczmy tego rodzaju liczby przez $y(n, m)$. Mamy na przykład: $y(12, 3) = 1211109876543$, $y(100, 97) = 100999897$, $y(5, 1) = 54321$.

1.9.15. *Liczby pierwsze postaci $y(n, n-1)$:* 43, 109, 2221, 2423, 3433, 4241, 5857.

1.9.16. *Pewne liczby pierwsze postaci* $y(n, m)$. *W nawiasach kwadratowych podano liczby cyfr.* (Maple).

$$\begin{array}{lll} y(82,1) & = & 828180\cdots54321, [155]; \\ y(7,3) & = & 76543, [5]; \\ y(46,3) & = & 464544\cdots76543, [81]; \\ y(10,7) & = & 10987, [5]; \\ y(68,11) & = & 686766\cdots131211, [116]; \\ y(25,13) & = & 252423\cdots151413, [26]; \\ y(48,17) & = & 484746\cdots191817, [64]; \\ y(22,19) & = & 22212019, [8]; \\ y(73,21) & = & 737271\cdots232221, [106]; \\ y(79,21) & = & 797877\cdots232221, [118]; \\ y(27,23) & = & 2726252423, [10]; \\ y(140,23) & = & 140139\cdots252423, [277]. \end{array}$$

1.9.17. *Wszystkie liczby naturalne począwszy od* 32 *do* 75 *wypisano w dowolnej kolejności otrzymując liczbę* 88*-cyfrową. Czy tak otrzymana liczba może być pierwsza?* Odp. *Nie. Taka liczba dzieli się przez* 11.

1.9.18. *Wszystkie liczby naturalne począwszy od* 111 *do* 999 *wypisano w dowolnej kolejności otrzymując liczbę* 888*-cyfrową. Czy tak otrzymana liczba może być pierwsza?* Odp. *Nie. Taka liczba dzieli się przez* 37. ([MaS] 5/1985 z.2891).

★ Inne informacje o liczbach utworzonych z cyfr kolejnych liczb naturalnych znajdują się w [N-2].

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.10 Liczby pierwsze utworzone z kolejnych liczb nieparzystych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.10.1. *Przykłady liczb pierwszych powstałych z cyfr kolejnych liczb nieparzystych od* 1 *do* n. *W nawiasach kwadratowych podano liczby cyfr.*

$$\begin{array}{ll} (n=3) & 13, [2]; \\ (n=19) & 135791113151719, [15]; \\ (n=31) & 135791113151719212325272931, [27]; \\ (n=67) & 1357911\cdots61636567, [63]; \\ (n=97) & 1357911\cdots91939597, [93]. \text{ (Maple)}. \end{array}$$

1.10.2. *Przykłady liczb pierwszych powstałych z cyfr kolejnych liczb nieparzystych. W nawiasach kwadratowych podano liczby cyfr.*

$$\begin{array}{l} 357911131517192123252729, [24]; \\ 35791113\cdots737577, [72]; \\ 35791113\cdots283285287, [376]; \\ 57911131517, [11]; \\ 57911131517192123252729313335373941, [35]. \text{ (Maple)}. \end{array}$$

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.11 Jednolite liczby pierwsze

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech p będzie n-cyfrową liczbą pierwszą. Załóżmy, że $n \geqslant 2$ i załóżmy, że wszystkie cyfry liczby p są niezerowe.

Mówić będziemy, że ta liczba pierwsza p jest *prawostronnie jednolita*, jeśli dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ liczba, powstała z liczby p przez skreślenie jej k końcowych cyfr, również jest liczbą pierwszą.

Spójrzmy na liczbę 3119. Jest to liczba pierwsza posiadająca tylko niezerowe cyfry. Skreślając kolejno jej końcowe cyfry otrzymujemy liczby 311, 31 i 3. Wszystkie są liczbami pierwszymi. Powiemy więc, że 3119 jest prawostronnie jednolitą liczbą pierwszą.

1.11.1. *Istnieje* 9 *dwucyfrowych liczb pierwszych prawostronnie jednolitych. Są to liczby:* $23, 29, 31, 37, 53, 59, 71, 73, 79$.

Istnieje 14 *trzycyfrowych liczb pierwszych prawostronnie jednolitych. Są to liczby:* $233, 239, 293, 311, 313, 317, 373, 379, 593, 599, 719, 733, 739, 797$.

1.11.2. *Niech $\gamma(n)$ oznacza liczbę wszystkich n-cyfrowych liczb pierwszych prawostronnie jednolitych. Z powyższych przykładów wiemy, że $\gamma(2) = 9$, $\gamma(3) = 14$. Mamy ponadto: $\gamma(4) = 16$, $\gamma(5) = 15$, $\gamma(6) = 12$, $\gamma(7) = 8$, $\gamma(8) = 5$.* (Maple).

1.11.3. *Istnieją dokładnie* 83 *prawostronnie jednolite liczby pierwsze. Każda prawostronnie jednolita liczba pierwsza ma co najwyżej* 8 *cyfr. Istnieje dokładnie* 5 *ośmiocyfrowych takich liczb:* 23399339, 29399999, 37337999, 59393339, 73939133. (Maple).

Niech p będzie n-cyfrową liczbą pierwszą. Załóżmy, że $n \geqslant 2$ i załóżmy, że wszystkie cyfry liczby p są niezerowe.

Mówić będziemy, że ta liczba pierwsza p jest *lewostronnie jednolita*, jeśli dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ liczba, powstała z liczby p przez skreślenie jej k początkowych cyfr, również jest liczbą pierwszą.

Rozważmy liczbę 2113. Jest to liczba pierwsza mająca tylko niezerowe cyfry. Skreślając kolejno jej początkowe cyfry otrzymujemy liczby 113, 13 i 3. Wszystkie są liczbami pierwszymi. Powiemy więc, że 2113 jest lewostronnie jednolitą liczbą pierwszą.

1.11.4. *Istnieje* 11 *dwucyfrowych liczb pierwszych lewostronnie jednolitych. Są to liczby:* $13, 23, 43, 53, 73, 83, 17, 37, 47, 67, 97$.

Istnieje 39 *trzycyfrowych liczb pierwszych lewostronnie jednolitych. Są to liczby:*

$$\begin{gathered}113, 313, 613, 223, 523, 823, 443, 643, 743, 353, 653, 853, 953, \\ 173, 373, 673, 773, 283, 383, 683, 883, 983, 317, 617, 137, 337, \\ 937, 347, 547, 647, 947, 167, 367, 467, 967, 197, 397, 797, 997.\end{gathered}$$

1.11.5. *Niech $\delta(n)$ oznacza liczbę wszystkich n-cyfrowych liczb pierwszych lewostronnie jednolitych. Z powyższych przykładów wiemy, że $\delta(2) = 11$, $\delta(3) = 39$. Mamy ponadto: $\delta(4) = 99$, $\delta(5) = 192$, $\delta(6) = 326$, $\delta(7) = 429$, $\delta(8) = 521$, $\delta(9) = 545$, $\delta(10) = 517$, $\delta(11) = 448$, $\delta(12) = 354$, $\delta(13) = 276$, $\delta(14) = 212$, $\delta(15) = 117$, $\delta(16) = 72$, $\delta(17) = 42$, $\delta(18) = 24$, $\delta(19) = 13$, $\delta(20) = 6$, $\delta(21) = 5$, $\delta(22) = 4$, $\delta(23) = 3$, $\delta(24) = 1$.* (Maple).

1.11.6. *Istnieje dokładnie* 4258 *lewostronnie jednolitych liczb pierwszych. Każda lewostronnie jednolita liczba pierwsza jest co najwyżej* 24*-cyfrowa. Istnieje tylko jedna taka liczba pierwsza* 24*-cyfrowa. Jest nią* 357686312646216567629137*. Istnieją dokładnie* 3 *takie liczby* 23*-cyfrowe:* 96686312646216567629137, 57686312646216567629137, 95918918997653319693967.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.12 Początkowe i końcowe cyfry liczb pierwszych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Istnieje liczba pierwsza, której początkowe cyfry tworzą liczba 123456789. Istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych, które na początku mają tysiąc siódemek. Wynika to z następującego twierdzenia.

1.12.1. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr* (*układu dziesiętnego*) $c_1, c_2, \dots, c_m$ *istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, których* m *początkowymi cyframi są kolejno* $c_1, \dots, c_m$. ([S59], [Trost] 51, [S88]).

Dowód tego twierdzenia będzie podany w następnym rozdziale (patrz 2.9.17).

Mówiliśmy o cyfrach początkowych. Podobnie jest z cyframi końcowymi.

1.12.2. *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych, których ostatnie cyfry tworzą liczbę* 123456789.

D. Niech $a = 123456789$, $b = 10^9$ i rozpatrzmy ciąg arytmetyczny $(a + bn)$. Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną, której zapis dziesiątny jest postaci $\dots 123456789$. Ponieważ liczby a, b są względnie pierwsze, więc - na mocy twierdzenia Dirichleta (patrz twierdzenie 6.1.1) - w ciągu $(a+bn)$ istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. ⊠

1.12.3. *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych, które na końcu mają tysiąc siódemek.*

D. Niech $a = 77\dots7$ (tysiąc siódemek), $b = 10^{1000}$ i rozpatrzmy ciąg arytmetyczny $(a + bn)$. Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną mającą na końcu tysiąc siódemek. Ponieważ liczby a, b są względnie pierwsze, więc - na mocy twierdzenia Dirichleta (patrz twierdzenie 6.1.1) - w ciągu $(a+bn)$ istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. ⊠

W ten sam sposób dowodzimy:

1.12.4. *Niech* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *będzie skończonym ciągiem cyfr układu dziesiętnego i niech* c *będzie jedną z cyfr* $1, 3, 7$ *lub* 9*. Istnieje wtedy nieskończenie wiele liczb pierwszych, których* $(n+1)$ *ostatnimi cyframi są cyfry* $c_1, \dots, c_n, c$. ([S59] 346).

Literatura

[Ca06] Ch. K. Caldwell, *Special types of primes*, 1996, `http://www.utm.edu/research/primes/`.

[Ca07] Ch. K. Caldwell, *The largest known prime by year; A brief histry*, 1996, `http://www.utm.edu/research/primes/`.

[Ca08] Ch. K. Caldwell, *The largest known primes*, 1996, `http://www.utm.edu/research/primes/largest.html`.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[MaS] Matematyka w Szkole, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N-2] A. Nowicki, *Cyfry Liczb Naturalnych*, Podróże po Imperium Liczb, cz.2, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2008.

[No-0] A. Nowicki, *Liczby pierwsze o szczególnym rozmieszczeniu cyfr*, Miniatury Matematyczne 4, Aksjomat, Toruń, 2000.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[PaT2] H. Pawłowski, W. Tomalczyk, *Zadania z Matematyki dla Olimpijczyków*, Index Books, Toruń, 1992.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition.

[Rabc] R. Rabczuk, *O liczbach palindromicznych*, Matematyka, 5(1994), 279-281.

[Ri97] P. Ribenboim, *Mała Księga Wielkich Liczb Pierwszych*, WNT, Warszawa, 1997.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[S88] W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers*, Editor: A. Schinzel, North-Holland Mathematical Library, Vol. 31, 1988.

[Sli] A. Slinko, *Absolute primes*, Preprint, Internet 2002.

[Trost] E. Trost, *Primzahlen*, Verlag Birkhauser, Basel - Stuttgard. Tłumaczenie rosyjskie, Moskwa 1959.

[WaJ] N. B. Wasilev, A. A. Jegorow, *Zadania Olimpiad Matematycznych Związku Radzieckiego* (po rosyjsku), 1961-1987, Moskwa, Nauka, 1988.

[WyKM] W. A. Wyszenskij, I. W. Kartaszow, W. I. Michaiłowskij, M. I. Jadrenko, *Zbiór Zadań Kijowskich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), 1935-1983, Kijów, 1984.

[Yat2b] S. Yates, *Collecting gigantic and titanic primes*, J. Rec. Math., 24(3)(1992) 193-201.

[Yat4] S. Yates, *Titanic primes*, J. Rec. Math., 16(4)(1983-84) 250-262.

[Yat5] S. Yates, *Sinkers of the titanics*, J. Rec. Math., 17(4)(1984-85) 268-274.