

Podróże po Imperium Liczb

07 Ciągi Rekurencyjne

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Wersja poprawiona i uzupełniona

17 maja 2012

Wstęp	1
1 Liczby Fibonacciego	5
1.1 Wzór Bineta i złota liczba	6
1.2 Cyfry liczb Fibonacciego	10
1.3 Sumy i iloczyny liczb Fibonacciego	11
1.4 Kwadraty, sześciiany, . . . i liczby Fibonacciego	13
1.5 Symbole Newtona i liczby Fibonacciego	15
1.6 Liczby Fibonacciego, macierze i wyznaczniki	17
1.7 Nierówności z liczbami Fibonacciego	19
1.8 Szeregi z liczbami Fibonacciego	19
1.9 Różne fakty i zadania z liczbami Fibonacciego	20
2 Liczby Fibonacciego i relacja podzielności	23
2.1 Wokół równości $(u_n, u_m) = u_{(n,m)}$	23
2.2 Dzielniki liczb Fibonacciego	24
2.3 Liczby Fibonacciego i kongruencje	25
2.4 Podzielność i potęgi	26
2.5 Pierwsze liczby Fibonacciego	27
2.6 Podzielność liczb Fibonacciego przez liczby pierwsze	27
2.7 Liczby Fibonacciego modulo m	29
3 Ciągi Fibonacciego	31
3.1 Ogólne własności ciągów Fibonacciego	31
3.2 Ciągi Fibonacciego i podzielność	32
3.3 Ciągi Fibonacciego i liczby kwadratowe	33
3.4 Różne fakty i zadania z ciągami Fibonacciego	33
3.5 Zastosowania liczb i ciągów Fibonacciego	35
4 Liczby Lucasa	39
4.1 Równości z liczbami Lucasa	39
4.2 Równości z liczbami Lucasa i liczbami Fibonacciego	41
4.3 Liczby Lucasa i podzielność	42
4.4 Liczby Lucasa i liczby pierwsze	44
4.5 Różne fakty i zadania z liczbami Lucasa	45

5	Ogólne własności liniowych ciągów rekurencyjnych	47
5.1	Ciągi $a^{[s]}$	47
5.2	Algebra funkcji arytmetycznych jako $k[x]$ -moduł	47
5.3	Równoważne definicje liniowej rekurencyjności	48
5.4	Przykłady liniowych ciągów rekurencyjnych	50
5.5	Algebra liniowych ciągów rekurencyjnych	50
5.6	Podciągi o indeksach tworzących ciąg arytmetyczny	52
5.7	Przestrzenie $L(f)$	53
5.8	Bazy przestrzeni $L(f)$	54
5.9	Niejednorodne liniowe ciągi rekurencyjne	55
5.10	Niejednorodne liniowe ciągi rekurencyjne rzędu 1	56
5.11	Niejednorodne liniowe ciągi rekurencyjne rzędu 2	57
5.12	Niejednorodne liniowe ciągi rekurencyjne rzędu 3	57
6	Liniowe ciągi rekurencyjne drugiego rzędu	59
6.1	Wzory na n -ty wyraz	59
6.2	Własności liczb α i β	62
6.3	Baza zbioru $\mathcal{F}(u,v)$	65
6.4	Podzielność dla ciągu $a(u,v)$	66
6.5	Podzielność dla $a(u,v)$, gdy liczby u i v są względnie pierwsze	68
6.6	Ciągi $a(u,v)$, $b(u,v)$ i podzielność przez liczby pierwsze	68
6.7	Ciąg $c(u,v)$	70
6.8	Ciągi $a(u,v)$ i $c(u,v)$	74
6.9	Różne fakty i zadania z ciągami rekurencyjnymi drugiego rzędu	74
7	Przykłady ciągów drugiego rzędu	77
7.1	$a_{n+2} = ka_{n+1} - a_n$	77
7.2	$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ (liczby Pella)	83
7.3	$a_{n+2} = ka_{n+1} + a_n$	85
7.4	$a_{n+2} = c(a_{n+1} + a_n)$	86
7.5	$a_{n+2} = \pm a_{n+1} + \pm a_n$	87
7.6	Różne przykłady	88
7.7	Dwa liniowe ciągi rekurencyjne	92
8	Liniowe ciągi rekurencyjne wyższych rzędów	93
8.1	Liniowe ciągi rekurencyjne n -tego rzędu	93
8.2	Ciągi trzeciego rzędu	95
8.3	Przykłady ciągów trzeciego rzędu	96
8.4	$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$	99
8.5	$a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ (Ciąg Perrina)	101
8.6	Uogólnienia ciągów Lucasa i Perrina	104
8.7	Przykłady ciągów czwartego rzędu	113
8.8	Liniowa rekurencyjność ze zmiennymi współczynnikami	114
9	Ciągi rekurencyjne specjalnego typu	117
9.1	$a_{n+1} = f(a_n)$ lub $a_{n+1} = f(n, a_n)$	117
9.2	$pa_{n+1}a_n + qa_n + ra_{n+1} + s = 0$	121
9.3	$a_{n+2} = f(a_n, a_{n+1})$ lub $a_{n+2} = f(n, a_n, a_{n+1})$	122
9.4	$d_{n+2} = d_{n+1}d_n + 1$	124
9.5	Ciągi rekurencyjne i podzielność	126
9.6	Ciągi rekurencyjne i symbole Newtona	127
9.7	Dwa ciągi rekurencyjne	128
9.8	Problem Collatza	128
9.9	Rekurencyjność kilkustopniowa	131
9.10	Różne przykłady ciągów rekurencyjnych	133

10 Jednorodne ciągi rekurencyjne	135
10.1 Ogólne własności i przykłady jednorodnych ciągów rekurencyjnych	135
10.2 Ciąg $a_n = (a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2)/a_{n-3}$	136
10.3 Ciąg $a_n = (a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-3}^2)/a_{n-4}$	138
10.4 Ciąg $z_n = (z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + \dots + z_{n-s}^2)/z_{n-(s+1)}$	138
10.5 Ciąg $a_n = (a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + ba_{n-1}a_{n-2})/a_{n-3}$	139
10.6 Ciąg $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})^2/a_{n-3}$	141
10.7 Ciąg $b_n = (b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3})^2/b_{n-4}$	142
10.8 Ciąg $c_n = (c_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-3} + c_{n-4})^2/c_{n-5}$	144
10.9 Ciąg $z_n = (z_{n-1} + z_{n-2} + \dots + z_{n-s})^2/z_{n-(s+1)}$	146
10.10 Ciąg $x_n = (x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-3}x_{n-4})/x_{n-5}$	146
10.11 Ciąg $y_n = (y_{n-1}y_{n-2} + y_{n-3}y_{n-4} + y_{n-5}y_{n-6})/y_{n-7}$	148
10.12 Ciągi eliptyczne	148
10.13 Inne jednorodne rekurencyjne ciągi	149
11 Ciągi Somosa i ich ogólnienia	151
11.1 Ciągi Somosa 2-go rzędu	151
11.2 Ciągi Somosa 3-go rzędu	151
11.3 Ciągi Somosa 4-go rzędu	152
11.4 Ciągi Somosa 5-go rzędu	154
11.5 Ciągi Somosa 6-go rzędu	155
11.6 Ciągi Somosa 7-go rzędu	156
11.7 Ciągi Somosa wyższych rzędów	156
11.8 Dodatkowe informacje o ciągach Somosa	156
11.9 Biliniowe ciągi rekurencyjne	157
12 Całkowitość wyrazów pewnych ciągów rekurencyjnych	159
12.1 Ciąg $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$	159
12.2 Ciąg $x_{n+2} = f(n)x_{n+1} + g(n)x_n$	160
12.3 Ciąg $x_{n+2} = (x_{n+1}^s + 1)/x_n$	160
12.4 Ciąg $x_{n+2} = (x_{n+1}^2 + p)/x_n$	162
12.5 Ciąg $x_{n+3} = (x_{n+1}x_{n+2} + p)/x_n$	164
12.6 Ciągi rekurencyjne z pierwiastkami	166
12.7 Różne ciągi	167
Spis cytowanej literatury	168
Skorowidz nazwisk	173
Skorowidz	176

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

Skorowidz

- Adams W., 101, 104
Alfred U., 30
Alfutova N.B., 168
Anderson P.G., 168
Anderson S., 130
Andreescu T., 168
Andrews G.E., 168
Andrica D., 168
Arkin J., 22, 115, 123
Atiyah M.F., 168
- Balcerzyk S., 168
Basin S.L., 37
Bednarek W., 168
Belov A., 169
Benjamin A.T., 37, 45, 168
Berezin W., 22
Bergum G.E., 28, 43–45
Bernik V.I., 168
Bernoulli M., 41
Białynicki Birula A., 168
Bicknell M., 13, 18, 28, 30, 85
Bicknell-Johnson M., 27, 43, 77, 84, 86
Bickner M., 29, 44
Bieliński W., 94, 134
Binet J.P.M., 6
Bisht C.S., 73, 108, 113
Bloom D.M., 35, 75
Boltianski W.G., 94, 134, 168
Brown K., 30, 91, 101, 104, 168
Brown S.L., 17
Bryński M., 168
Buchanan F., 14
Burn B., 29
- Caldwell Ch.K., 168
Carlitz L., 85
Cesaro E., 15, 16
Chajrullin G.T., 22
Chapman R., 102
Chen C.C., 168
Clark D.S., 17
Cohen H., 168
Cohn J.H.E., 14, 42
Collatz L., 128
Corbalan F., 168
- Deshpande M.N., 13
Di Porto A., 44
Diaz-Barrero J.L., 85
Dickson L.E., 102
Dickson L.E., 168
- Djukić D., 169
Dunlap R.A., 10, 22, 37, 45, 169
Dynkin J., 17, 30, 32, 169
- Edgar, 25
Eggart M.H., 37
Enescu B., 168
Escott E.B., 102
Everest G., 149, 156, 169
- Federico P.J., 37
Fedorov R., 169
Feng Z., 168
Filippini P., 13
Fomin D.V., 169
Freitag H.T., 25
Freyd P., 29
- Gale D., 156
Galperin G.A., 169
Ganis S.E., 22
Garbner M., 127
Garris S.E., 14
Gauthier N., 32
Gelfand S.I., 169
Genkin S.A., 169
Gerwer M.L., 169
Good I.J., 20
Graham R.L., 33, 132, 169
Green T.M., 127
Griffiths H.B., 19
Griffiths M., 13
Grigorjan A.A., 171
Grześkowiak M., 156
Guy R.K., 14, 130, 169
- Hardy G.H., 169
Hart E.L., 13
Hathway D.K., 17
Hilburn A., 24
Hilton P., 33, 42, 44
Hoggatt Jr. V.E., 13, 30
Hoggatt V.E., 12, 15, 18, 25, 27–30, 32, 33, 43–45, 77, 84–86, 100, 115, 123, 169
Holte J.M., 67, 70
Horadam A.F., 33, 35, 37, 94, 96
- Itenberg I.W., 169
- Jagłom I.M., 22
Jamieson M.J., 22
Janković V., 169
Jaroma J.H., 29, 45

- Jeśmanowicz L., 169
 Jegorow A.A., 172
 Johnston L.S., 22
 Józefiak T., 168

 Kalman D., 37
 Kanel-Belov A.J., 169
 Kaplansky I., 169
 Kasturiwale N.N., 13
 Kedlaya K.S., 169
 Kimberling C., 13
 Kiryłow A.A., 169
 Klamkin M.S., 166
 Knuth D.E., 33, 132, 169
 Koźniewska I., 170
 Koninck De J.-M., 169
 Konjagin S.W., 171
 Kordiemski B., 22, 170
 Koree I., 130
 Koshy T., 33, 45, 170
 Kostrykin A.I., 170
 Kovaldzhii A., 169
 Kramer J., 29, 30, 32, 33, 45
 Krishnaswami A., 100
 Kuźmin E., 127
 Kumar S., 37
 Kurlandczyk L., 139, 156

 Lagarias J.C., 130
 Lagrange, 25
 Lang S., 170
 Leman W.G., 168
 Lemmermeyer F., 170
 Lewis B., 14, 37, 42
 Łoś J., 169
 Long C.T., 13, 40, 42
 Lubawski W., 104
 Luca F., 10
 Lucas E., 39, 41, 101, 102

 Macdonald I.G., 168
 Malouf J.L., 156
 Mamangakis S.E., 30, 141, 142, 146, 148
 Markuszewicz A.J., 170
 Marshall A.G., 30
 Matić I., 169
 Matijasevic J.W., 26
 Matkowski J., 94
 Matulis A.Yu., 22
 McDaniel W., 43
 Melham R.S., 14, 77
 Melnikow O.W., 168
 Mena R., 37
 Mercier A., 169
 Michałek M., 104

 Mignotte M., 97
 Minton G., 103, 104
 Miszyna A.P., 170
 Moivre de A., 6
 Mollin R.A., 170
 Montgomery P., 25
 Mordell L.J., 170
 Morton H.R., 67
 Mostowski A., 170

 Nagell T., 88
 Narkiewicz W., 171
 Nash Ch., 29
 Nicol J.W., 33
 Nieto H., 36
 Nowicki A., 139, 156, 171

 Osler T.J., 24

 Patashnik O., 132, 169
 Pawłowski H., 171
 Pawłowski K., 94, 134
 Pedersen J., 33, 42
 Pederson J., 44
 Perrin R., 101, 102, 104
 Petrović N., 169
 Philips G.M., 22
 Piegat E., 171
 Podkolzin A.S., 171
 Poonen B., 169
 Poorten van der A., 169
 Propp J., 156
 Proskuriakow I.W., 170

 Quinn J.J., 37, 45

 Rabczuk R., 22, 94, 134
 Ramowicz Z., 171
 Ransom W.R., 22
 Rao K.S., 13
 Ribenboim P., 62, 171
 Robinson R.M., 171
 Rouse J.A., 168
 Ryll J., 94, 134

 Sadowicz W.A., 171
 Sally J.D., 100, 171
 Sally Jr. P.J., 171
 Sally P.J., 100
 Santana S.F., 85
 Santos D.A., 171
 Savukinas A.Yu., 22
 Scholes J., 117
 Scott J.A., 35
 Scott S.J., 96

- Scoville, 85
Sedrakyan N.M., 22
Shanks D., 101, 104
Shannon A.G., 14, 33, 96
Sharp J., 100
Shishebor Z., 17
Shparlinski I., 169
Sierpiński W., 171
Silike, 81
Silva A., 13
Silverman J.H., 22, 171
Silvester J.R., 19
Sirvent V.F., 99, 100
Smiley M.F., 96
Smith C., 29, 30, 32, 33, 45
Somos M., 151, 156
Spickerman W.R., 100
Stark M., 170
Straszewicz S., 171, 172
Studnicki G., 94, 134
Sukonnik J.N., 94, 134
Sun Zh-H., 30
Sury B., 10
Swart C.S., 172
Świętochowski Z., 94, 134
Szirszow A.I., 127
Szymański K., 94, 134
- Tattersall J.J., 172
Tetiva M., 36
Tołpygo A.K., 169
- Ulam S., 128
Uspienski W., 17, 30, 32, 169
Ustinov A.W., 168
- Vakil R., 169
Vella A., 33
Vella D., 33
- Wachnicka K., 94, 134
Wachnicki E., 94, 134
Waddill M.E., 96, 99, 100
Wall D.D., 30
Ward M., 96
Ward T., 169
Wasilev N.B., 172
Wieczorkowski S., 45, 67, 172
Wilson B., 29
Witty C., 120
Worobjow N.N., 172
Wróblewski J., 94
Wright E.M., 169
Wyler O., 75
Wylie O., 14
- Yang K-W., 10
Yashchenko I., 169
Yee W.L., 27
- Zeckendorf E., 12, 13
Zeitlin D., 13, 17, 22
Znam S., 130
Żuk I.K., 168

Skorowidz

- algebra funkcji arytmetycznych, 47, 48
- algorytm Euklidesa, 24, 68
- arccot, 82

- baza przestrzeni liniowej, 49, 54, 65, 95
- bikwadrat liczby całkowitej, 26, 27
- bryła geometryczna, 100

- ciąg
 - $a^{[s]}$, 47–51, 53, 94
 - arytmetyczny, 21, 45, 52, 79, 82, 134
 - Collatza, 128, 130
 - eliptyczny, 81, 148
 - Fibonacciego, 3, 31–35, 37, 51, 52, 59, 157, 163
 - geometryczny, 50, 107, 109, 151
 - liczb Fibonacciego, 3
 - liczb Lucasa, 3
 - Lucasa, 104, 112
 - nieograniczony, 119, 131
 - okresowy, 29, 30, 32, 42, 45, 78, 81, 86, 93, 99, 119, 120, 122, 130, 132, 161, 163, 167
 - Perrina, 101, 102, 104, 110–112
 - Somosa, 3, 151–157
- ciało, 48–57, 98, 119, 121, 135, 157
- cosinus, 8, 62, 78, 79, 84, 89, 96, 114
- cyfry, 10, 27, 33, 37, 45, 85, 118, 124, 136, 138, 141, 142, 146, 148
 - końcowe, 10, 11, 30, 45, 120, 133
 - początkowe, 7, 10
- część całkowita, 2, 9, 10, 16, 19, 81, 84, 90, 91, 117–120, 126, 132, 133, 151, 157

- delta Kroneckera, 53
- długość okresu, 29, 30, 32, 45, 81, 99, 122, 161, 163

- element całkowity, 62, 71, 102, 105

- funkcja
 - φ , 2, 25, 150
 - φ , 64
 - arytmetyczna, 47, 48
 - wymierna, 118

- granica ciągu, 8, 75, 97, 122, 123

- hipoteza, 67, 87, 89

- ideał, 48, 50
- IMO, 1, 22, 81, 88
 - Longlist, 28, 32, 78, 83, 90, 97, 128, 134
 - Shortlist, 19, 21, 79, 84, 85, 117, 118, 120, 125, 126, 132, 166
- indukcja matematyczna, 12, 18, 23, 26, 63, 66, 68, 71, 72, 112, 126, 137, 140, 144, 145, 147, 152–154, 160

- kolejne
 - liczby Fibonacciego, 11, 13, 23, 29
 - liczby naturalne, 33, 35, 82, 129
 - wyrazy ciągu, 42, 93, 126
- kongruencja, 24–28, 32, 43–45, 62, 63, 67, 69–71, 74, 75, 84, 86, 103, 115, 120, 122, 123, 127, 140, 143–145, 164
- kryterium porównawcze, 19
- krzywa eliptyczna, 151

- liczba
 - π , 78, 79, 82, 84, 87, 89, 96, 97, 114
 - bezzerowa, 10
 - Fibonacciego, 3, 5, 6, 9–31, 33, 37, 39, 41–43, 45, 84, 86, 89, 97, 99, 136, 161
 - kwadratowa, 13, 14, 19, 20, 26, 33, 40–42, 66, 74, 78, 80, 82–84, 88, 92, 97–99, 120, 122, 132–134
 - Lucasa, 3, 13, 14, 27, 31, 33, 39–45, 59, 71–73, 81, 84, 86, 101, 104, 112, 113
 - Mersenne’a, 11, 56, 90
 - nieparzysta, 42
 - parzysta, 42
 - Pella, 83, 85
 - pierwsza, 7, 27–30, 32, 33, 37, 44, 62, 63, 69–73, 81, 88, 89, 91, 96, 97, 102, 103, 105, 113, 115, 117, 123, 160, 165
 - rzeczywista, 6, 21, 34, 39, 56, 62, 75, 77, 79, 86, 88, 93, 96, 97, 114, 118, 119, 122, 123, 128, 149
 - specjalna, 130
 - trójkątna, 79
 - wymierna, 20, 65, 72, 78, 102, 105, 107, 108, 119, 131, 132
 - złożona, 33, 125, 126
 - złota, 7–9, 20, 39–42, 118
 - zespólna, 59, 62, 65, 68, 94, 95, 106, 134
- liczby względnie pierwsze, 23, 67, 68, 119, 136–141, 147, 148, 152–155, 160, 162, 165
- liniowy ciąg rekurencyjny, 3
- logarytm, 10, 20, 127

- macierz, 17, 18, 66, 93, 100
- Maple, 1, 7, 10, 11, 13, 87–89, 101, 124, 129, 136, 138,
- max, 133

- min, 37, 81, 133
 nierówność, 19, 20, 29, 34, 80, 87, 90, 114, 118, 120, 121, 132, 133
 nierozstrzygnięta kwadratowa, 69, 70
 nwd, 1, 24, 32, 33, 42, 43, 54, 67, 90, 126, 136, 141, 143–145, 148
 nww, 1, 29, 54, 99
 Olimpiada Matematyczna
 Austria, 149
 Belgia, 91
 Białoruś, 132
 Brazylia, 44, 122
 Bułgaria, 82, 86, 90, 99, 120, 163
 Czechosłowacja, 80, 81, 91, 99, 121, 134
 Czechy-Słowacja, 92, 114, 123, 133
 Estonia, 34
 Finlandia, 120
 Francja, 132
 Holandia, 75
 Irlandia, 159, 164
 Kanada, 78, 122
 Moskwa, 126
 Niemcy, 165
 Polska, 34, 79, 88, 113, 121, 126
 Rosja, 131, 132
 RPA, 32, 166
 Rumunia, 82, 83, 112, 119
 Słowenia, 118, 120, 167
 Serbia-Czarnogóra, 159
 Singapur, 22
 St Petersburg, 28, 34, 117, 126, 128, 134
 Tajwan, 159
 Ukraina, 88, 117
 USA, 92
 W. Brytania, 79, 166, 167
 Węgry-Izrael, 10, 42, 44
 Włochy, 79
 Wietnam, 22, 80, 92, 120, 166
 ZSRR, 118, 166
 para liczb
 naturalnych, 22, 34, 67, 78, 122
 rzeczywistych, 21
 pierścień, 3, 47, 48, 55, 59
 $\mathbb{Z}[x]$, 65, 68–70, 94, 95, 117
 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, 106
 $k[x]$, 47, 48, 50, 52–56, 135
 przemienny z jedynką, 104
 pierwiastek wielomianu, 6, 16, 39, 54, 55, 59, 62, 65, 68, 69, 94, 95, 112, 135
 pochodna, 101
 podzbiór, 35–37, 48, 53
 podzielność, 23, 25, 26, 28, 32, 43, 44, 66–68, 82, 96, 117, 124–126, 137, 140, 143, 145, 147, 150, 152–154, 160, 162
 przez 3, 27, 42, 161
 przez 4, 28, 124, 149
 przez 5, 27
 przez 6, 81
 przez 7, 126
 przez 11, 29
 przez 20, 92
 przez 25, 44
 przez liczbę pierwszą, 28, 62, 68, 100, 103, 105, 107–110, 112
 przez potęgę liczby pierwszej, 63
 przez tę liczbę pierwszą, 72, 73
 pole trójkąta, 13, 82
 potęga
 dwójki, 11, 15, 16, 19–21, 24, 25, 28, 29, 32, 41, 44, 45, 50, 51, 55–57, 84–86, 88–92, 98, 114, 115, 117, 119, 120, 126, 131, 133, 150, 167
 liczby pierwszej, 44, 45, 63, 67, 70, 72, 73, 87, 99, 100, 103, 107, 108, 110–112, 127
 piątki, 16, 21, 25, 28–30, 44, 45
 siódemki, 89, 119
 trójki, 20, 25, 28, 29, 32, 44, 45, 54, 56, 57, 88–92, 114, 115, 135, 167
 prawo wzajemności reszt kwadratowych, 28, 89
 problem Collatza, 128
 prostokąt, 7, 37, 99
 przestrzeń liniowa, 49, 51, 53, 54, 56, 95
 pytanie, 30, 50, 52, 67, 86, 122, 155, 156
 reguła rekurencyjna, 3
 relacja typu równoważności, 127
 reszta, 12, 24, 29, 42, 93
 kwadratowa, 28, 69, 89
 równanie, 9, 16
 diofantyczne, 22, 77, 78
 rekurencyjne, 61, 93, 95
 rozkład
 kanoniczny, 2, 70, 101
 Zeckendorfa, 12, 13, 99
 rozwiązanie
 naturalne, 16, 22, 77
 nieujemne, 78
 rzeczywiste, 9
 rozwinięcie Laplace'a, 17
 rząd ciągu rekurencyjnego, 48–52, 56, 57, 59, 74, 93, 95, 114, 119
 silnia, 50, 56, 57, 85, 115, 121, 123, 127
 sinus, 8, 62, 78, 79, 87, 89, 96, 97, 114
 stopień wielomianu, 48, 53
 symbol Legendre'a, 28, 89, 149

- symbol Newtona, 15, 16, 21, 31, 32, 62, 84, 102, 127, 159, 160
 - uogólniony, 102, 105, 107, 108, 127
- sześcian liczby całkowitej, 13, 14, 17, 26, 27, 40, 43, 78, 113, 120, 162, 167
- szereg, 19, 20, 45, 75, 85, 127
- trójkąt, 82
 - Pascala, 32
 - Pitagorasa, 13, 21, 45, 84
- trójka liczb całkowitych, 137, 141, 167
- tribonacci sequence, 99
- twierdzenie
 - cosinusów, 8
 - Eulera, 64, 73, 107, 150
 - Lucasa, 109–111
 - małe Fermata, 62, 72, 107, 108
 - o wielomianach symetrycznych, 105, 106
 - Zeckendorfa, 12
- ułamek łańcuchowy
 - nieskończony, 8
- wielomian, 22, 47–50, 53–56, 112, 117, 135
 - charakterystyczny, 48, 53, 55, 62, 101, 135
 - czwartego stopnia, 112, 135
 - dwóch zmiennych, 22
 - jednorodny, 135
 - minimalny, 48–52
 - moniczny, 50, 53, 71, 104, 105
 - n-zmiennych, 106
 - niezdeklarowany, 65, 68–70, 94, 95
 - symetryczny, 105, 106
 - trójmian kwadratowy, 6, 16, 22, 39, 51, 52, 59, 62, 65, 68–70
 - trzeciego stopnia, 51, 52, 54, 55, 57, 95
- wielomiany względnie pierwsze, 101
- właściwa liczba pierwsza, 29
- wymiar przestrzeni liniowej, 49, 51, 53
- wyróżnik wielomianu, 59
- wyznacznik, 17–19, 93, 114
 - Casaroti'ego, 114
- wzór Bineta, 6, 8, 9, 39
- zasada szufladkowa Dirichleta, 24
- zbiór, 37, 47, 53, 59, 67, 132
 - \mathbb{N}_0 , 1
 - liczb całkowitych, 1, 105
 - liczb naturalnych, 1, 35, 114
 - liczb pierwszych, 1
 - liczb rzeczywistych, 1, 34, 56, 62, 75, 77, 114, 118, 119, 122
 - liczb wymiernych, 1, 65, 132
 - liczb zespolonych, 1, 62, 65, 68, 94, 95