Podróże po Imperium Liczb

Część 07. Ciągi rekurencyjne

Rozdział 8

8. Liniowe ciągi rekurencyjne wyższych rzędów

Andrzej Nowicki 17 maja 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

8 Liniowe ciągi rekurencyjne wyższych rzędów **93**
8.1 Liniowe ciągi rekurencyjne n-tego rzędu 93
8.2 Ciągi trzeciego rzędu 95
8.3 Przykłady ciągów trzeciego rzędu 96
8.4 $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ 99
8.5 $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ (Ciąg Perrina) 101
8.6 Uogólnienia ciągów Lucasa i Perrina 104
8.7 Przykłady ciągów czwartego rzędu 113
8.8 Liniowa rekurencyjność ze zmiennymi współczynnikami 114

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

8 Liniowe ciągi rekurencyjne wyższych rzędów

8.1 Liniowe ciągi rekurencyjne n-tego rzędu

8.1.1 ([Mark] 16)**.** *Niech* (u_n) *będzie liniowym ciągiem rekurencyjnym rzędu* k*, tzn.* (u_n) *jest ciągiem liczbowym takim, że liczby* $u_1, \dots, u_k$ *są dowolne oraz*

$$u_{n+k} = \alpha_1 u_{n+k-1} + \alpha_2 u_{n+k-2} + \cdots + \alpha_k u_n$$

dla $n \in \mathbb{N}$*, gdzie* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *są danymi liczbami. Rozważmy ciąg sum początkowych jego wyrazów:* $s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$*. Wtedy* (s_n) *jest liniowym ciągiem rekurencyjnym rzędu* $k+1$*.*

D. Zauważmy, że $u_1 = s_1$, $u_2 = s_2 - u_1 = s_2 - s_1$, $\dots$, $u_n = s_n - (u_1 + \ldots + u_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$. Przyjmując $s_0 = 0$ tak, iż $u_1 = s_1 - s_0$ i podstawiając do powyższego równania otrzymujemy:

$$s_{n+k} - s_{n+k-1} = \alpha_1(s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) + \alpha_2(s_{n+k-2} - s_{n+k-3}) + \ldots + \alpha_k(s_n - s_{n-1}),$$

stąd $s_{n+k} = (1+\alpha_1)s_{n+k-1} + (\alpha_2 - \alpha_1)s_{n+k-2} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1})s_n - a_k s_{n-1}$. Zastępując indeks n przez $n+1$ uzyskujemy:

$$s_{n+k+1} = (1+\alpha_1)s_{n+k} + (\alpha_2 - \alpha_1)s_{n+k-1} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1})s_{n+1} - a_k s_n.$$

Otrzymaliśmy równanie rekurencyjne rzędu $k+1$. ⊠

8.1.2. *Niech* (x_n) *będzie ciągiem liczb całkowitych takim, że liczby* $x_1, \dots, x_k$ *są dowolne oraz*

$$x_{n+k} = \alpha_1 x_{n+k-1} + \alpha_2 x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_k x_n$$

dla $n \in \mathbb{N}$*, gdzie* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *są danymi liczbami całkowitymi. Wówczas reszty z dzielenia kolejnych liczb tego ciągu przez liczbę naturalną* m *tworzą ciąg okresowy* (*niekoniecznie czysty*)*.* ([Mark], [S59] 279)*.*

8.1.3. *Niech* $a_1, \dots, a_s$ *oraz* $r_1, \dots, r_s$ *będą liczbami rzeczywistymi. Rozpatrzmy ciąg* (x_n) *taki, że:* $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \dots,\ x_s = a_s$ *oraz*

$$x_{n+s} = r_1 x_{n+1} + r_2 x_{n+2} + \cdots + r_s x_{n+s}.$$

Dla danej liczby naturalnej n *przez* F_n *oznaczmy* $n \times n$ *macierz określoną następująco.*

$$F_n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n} \\ x_{2n+1} & x_{2n+2} & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{(n-1)n+1} & x_{(n-1)n+2} & \cdots & x_{n^2} \end{bmatrix}$$

Jeśli $n > s$*, to* $\det F_n = 0$*.*

D. Niech $A_1, A_2, \dots, A_n$ będą kolumnami macierzy F_n. Teza wynika z oczywistej równości $A_{s+1} = r_1A_1 + r_2A_2 + \cdots + r_sA_s$. ⊠

Załóżmy, że

$$f(x) = x^s - u_{s-1}x^{s-1} - u_{s-2}x^{s-2} - \cdots - u_1x - u_0$$

jest wielomianem o współczynnikach całkowitych i nierozkładalnym w $\mathbb{Z}[x]$. Niech $\alpha \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem tego wielomianu. Wtedy

$$\alpha^s = u_{s-1}\alpha^{s-1} + u_{s-2}\alpha^{s-2} + \cdots + u_1\alpha + u_0$$

i dla każdego $n \geqslant 0$ mamy:

$$\alpha^n = a_n^{[s-1]}\alpha^{s-1} + a_n^{[s-2]}\alpha^{s-2} + \cdots + a_n^{[1]}\alpha + a_n^{[0]},$$

gdzie każde $a_n^{[j]}$ (dla $j = 0, 1, \dots, s-1$) jest liczbą całkowitą. Dla każdego $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ mamy więc ciąg $\left(a_n^{[j]}\right)$ liczb całkowitych. Jest oczywiste, że $a_j^{[j]} = 1$ dla $j = 0, 1, \dots, s-1$ oraz, że $a_i^{[j]} = 0$ dla $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, $i \neq j$. Ponadto, $a_s^{[j]} = u_j$ dla $j = 0, 1, \dots, s-1$.

8.1.4. *Oznaczenia takie, jak powyżej. Niech $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ i niech $b_n = a_n^{[j]}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy ciąg (b_n) spełnia zależność rekurencyjną*

$$b_{n+s} = u_{s-1}b_{n+(s-1)} + u_{s-2}b_{n+(s-2)} + \cdots + u_1b_{n+1} + u_0b_n$$

dla wszystkich $n \geqslant 0$.

D. Mnożymy równość $\alpha^s = u_{s-1}\alpha^{s-1} + u_{s-2}\alpha^{s-2} + \cdots + u_1\alpha + u_0$ stronami przez α^n. Mamy wówczas:

$$\sum_{j=0}^{s-1} a_{n+s}^{[j]}\alpha^j = \alpha^{s+n} = \sum_{k=0}^{s-1} u_k\alpha^{k+n} = \sum_{k=0}^{s-1} u_k \sum_{j=0}^{s-1} a_{k+n}^{[j]}\alpha^j = \sum_{j=0}^{s-1}\left(\sum_{k=0}^{s-1} u_k a_{k+n}^{[j]}\right)\alpha^j.$$

Porównując odpowiednie współczynniki otrzymujemy tezę. ⊠

★ W. Bieliński, *Co to są funkcje tworzące?* [Dlt] 7/96 1-3.
V. G. Bołtiański, *The iteration method*, [Kw] 3/83 16-21.
A. F. Horadam, *Complex Fibonacci numbers and Fibon. quaternions*, [Mon] 70(3)(1963) 289-291.
J. Matkowski, *Ciąg geometryczny; metoda rozwiązywania równanń rekurencyjnych*, [Dlt] 7/2002.
K. Pawłowski, *O liniowych równaniach różnicowych*, [Dlt] 2/83 8-12.
R. Rabczuk, *O szeregach rekurencyjnych i ich zastosowaniach*, [Mat] 6/73 385-388.
J. Ryll, *Ciągi rekurencyjne a szeregi potęgowe*, [Dlt] 5/85.
G. Studnicki, *Problemy dotyczące rekurencji i indukcji matematycznej*, [Mat] 3/79 153-159.
J. N. Sukonnik, *Postępy arytmetyczno-geometryczne*, [Kw] 1/75 36-39.
Z. Świętochowski, *O ciągach rekurencyjnych*, [Mat] 1/87 44-48.
K. Szymański, *Ciągi rekurencyjne*, [Mat] 1/90 2-13.
K. Wachnicka, E. Wachnicki, *Badanie zbieżności ciągów określonych rekurencyjnie*, [Mat] 6/94.
J. Wróblewski, *Ciągi Pisota, czyli jak zobaczyć rekurencję liniową*, [Dlt] 7/2002 12-13.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.2 Ciągi trzeciego rzędu

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Liniowym ciągiem rekurencyjnym trzeciego rzędu nazywamy każdy ciąg (a_n) taki, że

$$a_{n+3} = ua_{n+2} + va_{n+1} + wa_n, \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0,$$

gdzie u, v i w są ustalonymi współczynnikami.

8.2.1. *Jeśli ciąg (a_n) spełnia równanie rekurencyjne*

$$a_{n+3} = 3pa_{n+2} - 3p^2 a_{n+1} + p^3 a_n,$$

gdzie p jest ustaloną niezerową liczbą, to

$$a_n = \frac{1}{2}a(n-1)(n-2)p^n - bn(n-2)p^{n-1} + \frac{1}{2}cn(n-1)p^{n-2},$$

gdzie $a = a_0$, $b = a_1$, $c = a_2$.

8.2.2. *Niech $a_0 = 1$, $a_1 = b + p$, $a_2 = b^2 + 2p$,*

$$a_{n+3} = (b+2)a_{n+2} - (2b+1)a_{n+1} + ba_n,$$

gdzie b i p są ustalonymi liczbami. Wtedy

$$a_n = b^n + pn$$

dla wszystkich $n \geqslant 0$.

Załóżmy, że $f(x) = x^3 - ux^2 - vx - w$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych i nierozkładalnym w $\mathbb{Z}[x]$. Niech $\alpha \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem tego wielomianu. Wtedy $\alpha^3 = u\alpha^2 + v\alpha + w$ i dla każdego $n \geqslant 0$ mamy:

$$\alpha^n = a_n\alpha^2 + b_n\alpha + c_n,$$

gdzie $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{Z}$. Mamy zatem trzy ciągi (a_n), (b_n) i (c_n) o wyrazach całkowitych.

8.2.3. *Jeśli (a_n), (b_n) i (c_n) są ciągami takimi jak powyżej, to:*

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+3} = ua_{n+2} + va_{n+1} + wa_n;\\
&b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_{n+3} = ub_{n+2} + vb_{n+1} + wb_n;\\
&c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_{n+3} = uc_{n+2} + vc_{n+1} + wc_n.
\end{aligned}$$

(Wynika to z 8.1.4).

8.2.4. *Ciągi (a_n), (b_n) i (c_n), określone powyżej, tworzą bazę przestrzeni wszystkich ciągów (d_n) spełniających zależność rekurencyjną*

$$d_{n+3} = ud_{n+2} + vd_{n+1} + wd_n.$$

Innymi słowy, jeśli ciąg (d_n) spełnia powyższą zależność rekurencyjną, to istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby α, β, γ takie, że

$$d_n = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n$$

dla wszystkich $n \geqslant 0$. (Patrz 8.2.3).

8.2.5. *Jeśli* (a_n), (b_n) *i* (c_n) *są ciągami takimi jak powyżej, to dla każdego* $n \geqslant 0$ *zachodzą równości:*

$$a_{n+1} = a_n u + b_n, \quad b_{n+1} = a_n v + c_n, \quad c_{n+1} = a_n w.$$

D.
$$\begin{aligned} a_{n+1}\alpha^2 + b_{n+1}\alpha + c_{n+1} &= \alpha^{n+1} = \alpha \cdot \alpha^n = \alpha \cdot (a_n\alpha^2 + b_n\alpha + c_n) \\ &= a_n(u\alpha^2 + v\alpha + w) + b_n\alpha^2 + c_n\alpha \\ &= (a_n u + b_n)\alpha^2 + (a_n v + c_n)\alpha + a_n w. \boxtimes \end{aligned}$$

8.2.6 (Waddill 1990)**.** *Jeśli ciąg* (a_n) *spełnia równość rekurencyjną:*

$$a_{n+3} = ra_{n+2} + sa_{n+1} + ta_n,$$

gdzie r, s, t *są ustalonymi liczbami, to*

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}.$$

dla $n \geqslant 3$. ([MR] 93i:11017).

★ S. J. Scott, *On the number of zeros of a cubic recurrence*, [Mon] 67(2)(1960) 169-170.

A. G. Shannon, A. F. Horadam, *Some properties of third - order recurrence relations*, [FQ] 10(1972) 135-145.

A. G. Shannon, A. F. Horadam, *Generating functions for power of third - order recurrence sequences*, [Duke] 38(1971) 791-794.

M. F. Smiley, *On the zeros of a cubic recurrence*, [Mon] 63(3)(1956) 171-172.

M. Ward, *On the number of vanishing terms in an integral cubic recurrence*, [Mon] 62(3)(1955) 155-160.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.3 Przykłady ciągów trzeciego rzędu

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.3.1. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że* $a_{n+3} = -a_n$. *Wtedy istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby rzeczywiste* a, b, c *takie, że*

$$a_n = a(-1)^n + b\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + c\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right).$$ ([Kozn] 88, 268).

8.3.2. *Niech* $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_{n+3} = 2x_{n+1} + x_n$. *Wtedy dla każdej liczby naturalnej* m *istnieje liczba naturalna* n *taka, że liczby* a_n *i* a_{n+1} *są podzielne przez* m. ([Kw] 10/81 34).

8.3.3. *Niech* $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 15$, $a_{n+3} = 15a_{n+1} - 4a_n$. *Jeśli* a_n *jest liczbą pierwszą, to* n *jest liczbą pierwszą.* ([Zw] 2002).

U. Ciąg (a_n) można również zdefiniować równościami: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$. $\boxtimes$

8.3.4. *Niech* $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 6$, $a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n$. *Wtedy*

$$a_n = (-2)^n + n$$

dla wszystkich $n \geqslant 0$.

8.3.5. *Niech* $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+3} = a_{n+1} + 1998a_n$. *Wtedy*

$$a_{2n-1} = 2a_n a_{n+1} + 1998a_{n-1}^2,$$

dla wszystkich $n \geqslant 1$. ([KoM] 1997 N160).

8.3.6. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że* $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n$. *Wtedy*

$$a_n = 2\left(1 - 2^{(n-3)/2}\sin(n\pi/2)\right). \quad \text{([Kozn] 70).}$$

8.3.7. *Niech* $a_1 = a > 0$, $a_2 = b > 0$, $a_3 = c > 0$ *oraz* $a_{n+3} = \frac{1}{3}(a_n + a_{n+1} + a_{n+2})$. *Wtedy*

$$\lim a_n = \frac{1}{6}(a + 2b + 3c).$$

([Mat] 5-6/68 264).

8.3.8. *Niech* $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_n$. *Wtedy* $p \mid a_p$ *dla każdej liczby pierwszej* p. (Na podstawie [MG] 505(2002) s.146 z.86A).

8.3.9. *Niech* $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_n$. *Wtedy* $p \mid a_p(a_p + 1)$, *dla każdej liczby pierwszej* $p \geqslant 7$ ([IMO] Longlist 1988).

8.3.10. *Niech* $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_{n+3} = 2a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n$. *Wtedy* $a_1 = a_2 = a_5 = a_7 = a_{14} = a_{53} = 0$, *natomiast*

$$a_{52} = -884763262976.$$

([EvP] 28).

8.3.11 (M. Mignotte). *Niech* $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_{n+3} = 2a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n$. *Wtedy*

$$a_n = 0 \iff n = 1, 2, 5, 7, 14 \quad \textit{lub} \quad 53.$$

([Coh1] 283).

8.3.12. *Niech* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$. *Wtedy*

$$a_n = u_n^2,$$

gdzie (u_n) *jest ciągiem Fibonacciego.* (patrz 5.5.5, [MG] 87(509)(2003) s.194).

8.3.13. *Niech* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$. *Wtedy*

$$a_n = u_n u_{n+1},$$

gdzie (u_n) *jest ciągiem liczb Fibonacciego.* (patrz 5.5.6).

8.3.14. *Niech* $a_1 = 1$, $a_2 = 12$, $a_3 = 20$, $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$. *Wtedy, dla każdego* $n \in \mathbb{N}$, *liczba*

$$1 + 4a_n a_{n+1}$$

jest kwadratowa. ([Kw] 12/89 26).

8.3.15. *Niech* a, b, c *będą dowolnymi liczbami i niech* (a_n) *będzie ciągiem takim, że* $a_0 = c$, $a_1 = a + b + c$, $a_2 = 4a + 2b + c$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$. *Wtedy*

$$a_n = an^2 + bn + c$$

dla wszystkich $n \geqslant 0$.

8.3.16. *Niech* $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$. *Wtedy*

$$a_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

([Str67] 60, Wynika z 8.3.15).

8.3.17. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem takim, że* $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$. *Wtedy* $a_n = n^2$ *dla wszystkich* $n \geqslant 0$. (Wynika z 8.3.15).

8.3.18. *Niech* (a_n) *będzie takim ciągiem o wyrazach z ciała* k, *że* $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 7$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy istnieją jednoznacznie wyznaczone elementy* $a, b, c \in k$ *takie, że* $a_n = a + bn + cn^2 + \frac{7}{6}n^3$. ([Kozn] 88, 268).

8.3.19. *Niech* (a_n) *będzie takim ciągiem o wyrazach z ciała* k, *że* $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$ *oraz* $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 5$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy*

$$a_n = -3 + \frac{49}{6}n - 5n^2 + \frac{5}{6}n^3.$$

([Kozn] 77).

8.3.20. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem takim, że* $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 6$,

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n.$$

Wtedy $a_n = 2^n + n$ *dla wszystkich* $n \geqslant 0$. (Patrz 5.5.2).

8.3.21. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem takim, że* $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$,

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n.$$

Wtedy $a_n = 2^n - n$ *dla wszystkich* $n \geqslant 0$.

8.3.22. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem takim, że* $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0$,

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n.$$

Wtedy $a_n = 2^n - 2n$ *dla wszystkich* $n \geqslant 0$.

8.3.23. *Ciąg* (a_n) *spełnia równość rekurencyjną* $a_{n+3} = 5a_{n+2} - 9a_{n+1} + 9a_n$. *Jeśli* $|a_n| \leqslant 2^n$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$, *to*

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n.$$

([OM] Czechosłowacja 1983/1984).

8.3.24. *Niech* $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 9$, $a_{n+3} = 15a_{n+2} - 15a_{n+1} + a_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Przykłady:*

$$\begin{array}{rclcl}
a_1 & = & 1 & = & 1^2 \\
a_2 & = & 1 & = & 1^2 \\
a_3 & = & 9 & = & 3^2 \\
a_4 & = & 121 & = & 11^2 \\
a_5 & = & 1681 & = & 41^2 \\
a_6 & = & 23409 & = & 153^2 \\
a_7 & = & 326041 & = & 571^2 \\
a_8 & = & 4541161 & = & 2131^2 \\
a_9 & = & 63250209 & = & 7953^2 \\
a_{10} & = & 880961761 & = & 29681^2.
\end{array}$$

Wszystkie wyrazy tego ciągu są kwadratami liczb naturalnych. ([OM] Bułgaria 1987, [Pa97]).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.4 $\mathbf{a}_{n+3} = \mathbf{a}_{n+2} + \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.4.1. *Prostokąt* $1 \times n$ *zapełniamy prostokątami o wymiarach* 1×1, 1×2 *i* 1×3. *Jeśli* t_n *oznacza liczbę różnych sposobów takiego zapełnienia, to* $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$ *oraz*

$$t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n$$

dla $n \geqslant 1$. ([KoM] 7/96).

8.4.2. *Niech* $g_0 = 1$, $g_1 = 2$, $g_2 = 4$,

$$g_{n+3} = g_{n+2} + g_{n+1} + g_n.$$

Ciąg ten nazywa się często "tribonacci sequence". Każda liczba naturalna n *ma jednoznaczne przedstawienie w postaci*

$$n = \sum_{i=0}^{r} \varepsilon_i g_i,$$

gdzie $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ *i przy tym* $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_{i+2} = 0$. (Sirvent: [FQ] 1997).

U. Podobne jednoznaczne przedstawienie zachodzi dla zwykłych liczb Fibonacciego. Warunek $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_{i+2} = 0$ zastąpiony jest wtedy warunkiem $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = 0$. W tym przypadku takie przedstawienie nazywa się "Zeckendorf decomposition" (patrz 1.3.11). ⊠

8.4.3 (Waddill 1978). *Niech* $t_0 = 1$, $t_1 = t_2 = 1$,

$$t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n.$$

Dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 2$ *ciąg* $(t_n \bmod m)$ *jest czysto-okresowy. Niech* $h(m)$ *oznacza długość okresu ciągu* (t_n) *modulo* m.

(1) *Jeśli* $m = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ *jest rozkładem na czynniki pierwsze liczby* m, *to*

$$h(m) = \operatorname{nww}\Big(h(p_1^{r_1}), \ldots, h(p_k^{r_k})\Big).$$

(2) *Jeśli* $p \in \mathbb{P}$ *i* $h(p) \neq h(p^2)$, *to* $h(p^r) = p^{r-1}h(p)$ *dla wszystkich* $r > 1$. ([MR] 80b:10016).

8.4.4. *Niech* $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$ *oraz* $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$. *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Wówczas, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, *liczba* a_n *jest śladem macierzy* A^n. ([EvP] 186).

8.4.5. *Niech* (z_n) *będzie ciągiem zdefiniowanym równościami:*

$$\begin{cases} z_0 & = & 3, \\ z_1 & = & 1, \\ z_2 & = & 3, \\ z_{n+3} & = & z_{n+2} + z_{n+1} + z_n \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Wtedy dla każdej liczby pierwszej p zachodzą następujące kongruencje:

(1) $z_p \equiv 1 \pmod{p}$;

(2) $z_{np} \equiv z_n \pmod{p}$ *dla* $n \in \mathbb{N}_0$;

(3) $z_{np^r} \equiv z_{np^{r-1}} \pmod{p^r}$ *dla wszystkich liczb naturalnych* n, r.

D. Jest to twierdzenie 8.6.13 dla $a = b = c = 1$. ⊠

★ A. Krishnaswami, V. E. Hoggatt, *On tribonacci numbers and related functions*, [FQ] 15(1977) 42-45.

J. Sharp, *Have you seen this number ?* [MG] 494(1998) 203-215. (O zależności $x_{n+3} = x_n + x_{n+1} + x_{n+2}$ i bryłach geometrycznych).

J. D. Sally, P. J. Sally, *The tribonacci games*, [SalS] 22-26.

V. F. Sirvent, *A semigroup associated with the k-bonacci numbers with dynamic interpretation*, [FQ] 35(1997) 335-340.

W. R. Spickerman, *Binet formula for tribonacci numbers*, [FQ] 20(1982) 118-120.

M. E. Waddill, *Some properties of a generalized Fibonacci sequence modulo m*, [FQ] 16(1978) 344-353.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.5 $\mathbf{a}_{n+3} = \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n$ (Ciąg Perrina)

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Ciągiem Perrina nazywa się ciąg (w_n) zdefiniowany równościami:

$$\begin{cases} w_0 &= 3, \\ w_1 &= 0, \\ w_2 &= 2, \\ w_{n+3} &= w_{n+1} + w_n, \ \text{dla } n \geqslant 0. \end{cases}$$

8.5.1 (Maple). *Początkowe wyrazy ciągu Perrina wraz z ich rozkładami kanonicznymi.*

$w_0 = 3$,	$w_{10} = 17$	$= 17$,	$w_{20} = 277$	$= 277$,	
$w_1 = 0$,	$w_{11} = 22$	$= 2 \cdot 11$,	$w_{21} = 367$	$= 367$,	
$w_2 = 2$,	$w_{12} = 29$	$= 29$,	$w_{22} = 486$	$= 2 \cdot 3^5$,	
$w_3 = 3$,	$w_{13} = 39$	$= 3 \cdot 13$,	$w_{23} = 644$	$= 2^2 \cdot 7 \cdot 23$,	
$w_4 = 2$,	$w_{14} = 51$	$= 3 \cdot 17$,	$w_{24} = 853$	$= 853$,	
$w_5 = 5$,	$w_{15} = 68$	$= 2^2 \cdot 17$,	$w_{25} = 1130$	$= 2 \cdot 5 \cdot 113$,	
$w_6 = 5$,	$w_{16} = 90$	$= 2 \cdot 3^2 \cdot 5$,	$w_{26} = 1497$	$= 3 \cdot 499$,	
$w_7 = 7$,	$w_{17} = 119$	$= 7 \cdot 17$,	$w_{27} = 1983$	$= 3 \cdot 661$,	
$w_8 = 10$,	$w_{18} = 158$	$= 2 \cdot 79$,	$w_{28} = 2627$	$= 37 \cdot 71$,	
$w_9 = 12$,	$w_{19} = 209$	$= 11 \cdot 19$,	$w_{29} = 3480$	$= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$.	

W 1878 roku Edouard Lucas zauważył, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to liczba w_p jest podzielna przez p. Dowód tego faktu podamy za chwilę. To samo udowodnił w 1899 roku R. Perrin. W 1982 roku William Adams i Daniel Shanks opublikowali w Mathematics of Computations pracę, w której (w_n) nazwali *ciągiem Perrina*.

Wielomianem charakterystycznym rozważanego ciągu rekurencyjnego jest

$$f(t) = t^3 - t - 1.$$

Łatwo prawdzić, że wielomiany $f(t)$ i $f'(t)$ (gdzie $f'(t) = 3t^2 - 1$ jest pochodną wielomianu $f(t)$) są względnie pierwsze. Wielomian $f(t)$ ma zatem trzy parami różne pierwiastki (zespolone). Oznaczmy te pierwiastki przez α, β oraz γ. Co najmniej jeden z tych pierwiastków, powiedzmy α, jest dodatnią liczbą rzeczywistą. W artykule Kevina Browna z 2000 roku jest informacja, że:

8.5.2. $\alpha = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}} = 1,437734932\cdots$. ([Br]).

Z tej informacji nie skorzystamy.

Ponieważ $t^3 - t - 1 = (t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)$, więc:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1, \quad \alpha\beta\gamma = 1.$$

Rozpatrzmy nowy ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$, dla $n \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $a_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 3$, $a_1 = \alpha + \beta + \gamma = 0$ oraz

$$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0 - 2(-1) = 2.$$

Zatem $a_0 = w_0$, $a_1 = w_1$ oraz $a_2 = w_2$. Mamy ponadto:

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= \alpha^{n+3} + \beta^{n+3} + \gamma^{n+3} = \alpha^n\alpha^3 + \beta^n\beta^3 + \gamma^n\gamma^3 \\ &= \alpha^n(\alpha+1) + \beta^n(\beta+1) + \gamma^n(\gamma+1) \\ &= \left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \gamma^{n+1}\right) + (\alpha^n + \beta^n + \gamma^n) \\ &= a_{n+1} + a_n. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $w_n = a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Zapamiętajmy:

8.5.3. *Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n zachodzi równość*

$$w_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n,$$

gdzie α, β, γ są pierwiastkami wielomianu $t^3 - t - 1$.

8.5.4 (Lucas)**.** *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to liczba w_p jest podzielna przez p.*

D. Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozpatrzmy równości

$$0 = (\alpha + \beta + \gamma)^p = \sum_{i+j+k=p} \langle i, j, k\rangle \alpha^i\beta^j\gamma^k,$$

gdzie sumowanie przebiega wszystkie tójki (i, j, k), nieujemnych liczb całkowitych takich, że $i+j+k = p$. Każde $\langle i, j, k\rangle$ jest uogólnionym symbolem Newtona:

$$\langle i, j, k\rangle = \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

(patrz na przykład [N11]. W naszym przypadku

$$\langle i, j, k\rangle = \frac{p!}{i!j!k!} = \frac{p!(i+j)!}{i!j!k!(i+j)!} = \binom{p}{k}\binom{i+j}{i},$$

a więc wszystkie liczby $\langle i, j, k\rangle$, oprócz trzech liczb: $\langle p, 0, 0\rangle$, $\langle 0, p, 0\rangle$ oraz $\langle 0, 0, p\rangle$ (które są równe 1), są podzielne przez p. Mamy zatem równość $0 = \alpha^p + \beta^p + \gamma^p + pb$, czyli $0 = w_p + pb$, gdzie b jest sumą iloczynów postaci $\alpha^i\beta^j\gamma^k$ pomnożonych przez jakieś liczby całkowite. Liczby α, β, γ są elementami całkowitymi nad pierścieniem $\mathbb{Z}$ (gdyż są pierwiastkami monicznego wielomianu $t^3 - t - 1$), a zatem liczba b jest również elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$. Ale $b = -\frac{w_p}{p}$, więc b jest liczbą wymierną. Każda liczba wymierna, która jest elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$, jest oczywiście liczbą całkowitą. Zatem $b \in \mathbb{Z}$. Mamy więc $w_p = p(-b)$, gdzie $b \in \mathbb{Z}$, czyli p dzieli w_p. ⊠

Powyższe twierdzenie ma kilka różnych dowodów. Wspominaliśmy już o tym, że znane są dowody podane w 1878 roku przez Lucasa i w 1899 roku przez Perrina. W 1908 roku twierdzenie to pojawiło się jako zadanie 151 podane przez Escotta w [Mon] 15(1908) s.22. Rozwiązanie, podane również przez Escotta, jest w [Mon] 15(1908) na stronie 187. Rozwiązanie w ogólniejszej formie podał L.E. Dickson na stronie 209. W czasopiśmie [Mon] spotkamy się z tym twierdzeniem jeszcze co najmniej dwa razy: Dec. 1992 jako Problem 10268 (w numerze June-July 1995 podano błędne rozwiązanie; korekta jest w Dec. 1996) oraz April 1998 jako Problem 10655. Trzy różne dowody omawianego twierdzenia podał Robin Chapman w [MG] March 1998. Dowód znajdziemy również w [Cmj] 2000 s.223. W 2011 roku trzy różne dowody podał Gregory Minton w [MM] 84(1)(2011) 33-37. Jeden z jego dowodów wykorzystuje znane własności elementów całkowitych nad pierścieniem liczb całkowitych. Ten właśnie dowód tutaj przedstawiliśmy. W podrozdziale "Uogólnienia ciegów Lucasa i Perrina" udowodnimy, że omawiane twierdzenie jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego twierdzenia (patrz 8.6.10).

Przedstawimy teraz pewne inne własności ciągu Perrina.

8.5.5. $w_{3n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_k$, *dla* $n \in \mathbb{N}_0$. ([Mon] 6(102)(1995) s.557).

D. $w_{3n} = \left(\alpha^3\right)^n + \left(\beta^3\right)^n + \left(\gamma^3\right)^n = (\alpha+1)^n + (\beta+1)^n + (\gamma+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\alpha^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\beta^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\gamma^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\alpha^k + \beta^k + \gamma^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_k$. ⊠

8.5.6. $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} w_{3k}$, *dla* $n \in \mathbb{N}_0$.

D.
$$\begin{aligned} w_n &= \alpha^n + \beta^n + \gamma^n = \left(\alpha^3 - 1\right)^n + \left(\beta^3 - 1\right)^n + \left(\gamma^3 - 1\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\alpha^{3k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\beta^{3k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\gamma^{3k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\alpha^{3k} + \beta^{3k} + \gamma^{3k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k} w_{3k}. \ \boxtimes \end{aligned}$$

Z 8.5.4 i 8.5.5 wynika:

8.5.7. $w_{3p} \equiv 3 \pmod{p}$ *dla* $p \in \mathbb{P}$.

8.5.8. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to*

$$w_{pn} \equiv w_n \pmod{p}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. (Patrz 8.6.8).

8.5.9. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to*

$$w_{p^r n} \equiv w_{p^{r-1} n} \pmod{p^r}$$

dla wszystkich $n, r \in \mathbb{N}$. (Patrz 8.6.9).

8.5.10. *W ciągu* (a_n) *liczby* a_1, a_2, a_3 *są naturalne oraz* $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą i* $n \in \mathbb{N}$, *to liczba*

$$a_{n+3p+1} - a_{n+p+1} - a_{n+1}$$

jest podzielna przez p. ([Kw] 6/94 M1437, Jest to szczególny przypadek stwierdzenia 8.6.22).

8.5.11. *Niech $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ oraz $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$, dla $n \in \mathbb{N}$. Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $m \mid a_n$.* ([Dlt] 7/2003 z.1030).

8.5.12. *Niech $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 4$ oraz*

$$a_{n+3} = 2a_{n+1} + a_n$$

dla $n \geqslant 0$. Przykłady:

$$\begin{array}{rcl rcl} a_3 &=& 3 & a_{12} &=& 323 \\ a_4 &=& 8 & a_{13} &=& 520 \\ a_5 &=& 10 & a_{14} &=& 844 \\ a_6 &=& 19 & a_{15} &=& 1363 \\ a_7 &=& 28 & a_{16} &=& 2208 \\ a_8 &=& 48 & a_{17} &=& 3570 \\ a_9 &=& 75 & a_{18} &=& 5779 \\ a_{10} &=& 124 & a_{19} &=& 9348 \\ a_{11} &=& 198 & a_{20} &=& 15128. \end{array}$$

Dla dowolnej liczby pierwszej p, liczba a_p jest podzielna przez p.

★ W. Addams, D. Shanks, *Strong primality tests that are not sufficient*, [MatC] 39(159)(1982) 255-300.

K. Brown, *Perrin's sequence*, [Br], Kmath 345, 2000.

G. Minton, *Three approaches to a sequence problem*, [MM] 81(1)(2011) 33-40.

R. Perrin, *Item* 1484, L'Intermédiare des Math., 6(1899), 76-77.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.6 Uogólnienia ciągów Lucasa i Perrina

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Ciąg liczb Lucasa oznaczaliśmy przez (v_n). Przypomnijmy, że $v_0 = 2$, $v_1 = 1$ oraz $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ dla $n \in \mathbb{N}_0$. W poprzednim podrozdziale rozpatrywaliśmy ciąg Perrina (w_n), określony równościami $w_0 = 3$, $w_1 = 0$, $w_2 = 2$ oraz $w_{n+3} = w_{n+1} + w_n$ dla $n \in \mathbb{N}_0$. Wykazaliśmy (patrz 4.1.1), że każde v_n jest równe $\alpha^n + \beta^n$, gdzie α, β są pierwiastkami wielomianu $t^2 - t - 1$. Podobną własność posiada ciąg (w_n). Wykazaliśmy (patrz 8.5.3), że każde w_n jest równe $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$, gdzie α, β, γ są pierwiastkami wielomianu $t^3 - t - 1$. W jednym i drugim przypadku pojawiły się pierwiastki monicznych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

W tym podrozdziale zajmiemy się sytuacją ogólniejszą. Zbadamy ciągi liczbowe (x_n), w których każde x_n będzie sumą n-tych potęg wszystkich pierwiastków ustalonego wielomianu monicznego o współczynnikach całkowitych. Wykażemy, że pewne znane twierdzenia dla ciągów Lucasa i Perrina są szczególnymi przypadkami ogólniejszych twierdzeń.

Wykorzystamy pewne znane pojęcia i fakty z algebry, które dotyczyć będą głównie pierścieni przemiennych z jedynką. Dowody Czytelnik znajdzie w wielu książkach z podstaw algebry. Polecamy książki: [AtM][1], [Ka74], [B-B] [BaJ], [La84], [MoS].

[1]Istnieje przekład tej książki na język polski pt. *Wprowadzenie do algebry komutatywnej*; Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2008; tłumaczenie :Wojciech Lubawski, Mateusz Michałek.

Niech $A \subset B$ będą pierścieniami przemiennymi z jedynką i niech $b \in B$. Mówimy, że element b jest *całkowity nad* A, jeśli zachodzi równość postaci

$$b^s + a_1 b^{s-1} + a_2 b^{s-2} + \cdots + a_{s-1} b + a_s,$$

gdzie s jest liczbą naturalną oraz $a_1, a_2, \ldots, a_s$ są elementami należącymi do pierścienia A. Innymi słowy, element $b \in B$ jest całkowity nad A jeśli jest pierwiastkiem jakiegoś wielomianu monicznego jednej zmiennej o współczynnikach z pierścienia A.

8.6.1. *Jeśli $A \subset B$ są pierścieniami z jedynką, to zbiór wszystkich tych elementów pierścienia B, które są całkowite nad A, jest podpieścieniem pierścienia B zawierającym A.*

W szczególności, dowolne skończone sumy i iloczyny elementów całkowitych nad A są elementami całkowitymi nad A.

Rozpatrywać będziemy pewne takie liczby rzeczywiste, a nawet zespolone, które będą elementami całkowitymi nad pierścieniem $\mathbb{Z}$. Oczywiście każda zwykła liczba całkowita jest elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$. Dla liczb wymiernych mamy:

8.6.2. *Jeśli liczba wymierna q jest elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$, to q jest liczbą całkowitą.*

Wykorzystamy również klasyczne twierdzenie o wielomianach symetrycznych.

8.6.3. *Niech $h(x_1, \ldots, x_s)$ będzie wielomianem zmiennych $x_1, \ldots, x_s$ o współczynnikach całkowitych. Jeśli wielomian ten jest symetryczny, to istnieje taki wielomian o współczynnikach całkowitych $H(x_1, \ldots, x_s)$, że*

$$h(x_1, \ldots, x_s) = H\Big(\sigma_1(x_1, \ldots, x_s),\ \sigma_2(x_1, \ldots, x_s),\ \ldots,\ \sigma_s(x_1, \ldots, x_s)\Big),$$

gdzie $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ są podstawowymi wielomianami symetrycznymi.

Przypomnijmy również, że jeśli $i_1, \ldots, i_s$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, to

$$\langle i_1, i_2, \ldots, i_s \rangle = \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_s)!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \cdots \cdot i_s!}.$$

Każde takie $\langle i_1, \ldots, i_s \rangle$ jest liczbą naturalną (patrz [N11]).

8.6.4. *Dla $m \in \mathbb{N}_0$ oraz dowolnych liczb $y_1, \ldots, y_s$ zachodzi równość*

$$\Big(y_1 + \cdots + y_s\Big)^m = \sum_{i_1 + \cdots + i_s = m} \langle i_1, \ldots, i_s \rangle y_1^{i_1} \cdots y_s^{i_s},$$

gdzie sumowanie przebiega wszystkie ciągi nieujemnych liczb całkowitych $(i_1, \ldots, i_s)$ takich, że $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = m$.

8.6.5. *Niech $i_1, \ldots, i_s$ będą nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że $i_1 + \cdots + i_s = p$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Jeśli każda z liczb $i_1, \ldots, i_s$ jest ostro mniejsza od p, to liczba $\langle i_1, \ldots, i_s \rangle$ jest podzielna przez p.*

Przystępujemy teraz do omówienia zapowiedzianych wcześniej zagadnień. Stosować będziemy następujące oznaczenia:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & \text{ustalona liczba naturalna;} \\ f(t) & = & t^s - c_1 t^{s-1} - c_2 t^{s-2} - \cdots - c_{s-1} t - c_s; \\ & & \text{moniczny wielomian stopnia } s \\ & & \text{o całkowitych współczynnikach } -c_1, \cdots - c_s, \\ & & \text{przy czym } c_s \text{ jest różne od zera;} \\ \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s & : & \text{wszystkie pierwiastki wielomianu } f(t); \\ z_n & = & \delta_1^n + \delta_2^n + \cdots + \delta_s^n, \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{array} \right.$$

Pierwiastki $\delta_1, \ldots, \delta_s$ są liczbami zespolonymi i dla nich zachodzi równość

$$f(t) = (t - \delta_1)(t - \delta_2) \cdots (t - \delta_s).$$

Nie zakładamy, że te pierwiastki są parami różne. Mamy zatem następujące równości:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1(\delta_1, \ldots, \delta_s) & = & c_1, \\ \sigma_2(\delta_1, \ldots, \delta_s) & = & -c_2, \\ & \vdots & \\ \sigma_s(\delta_1, \ldots, \delta_s) & = & (-1)^{s-1} c_s, \end{array}$$

gdzie $\sigma_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, \sigma_s(x_1, \ldots, x_s)$ są podstawowymi wielomianami symetrycznymi. Założenie $c_s \neq 0$ gwarantuje, że wszystkie pierwiastki $\delta_1, \ldots, \delta_s$ są niezerowe. Ponieważ $\delta_1, \ldots, \delta_s$ są pierwiastkami monicznego wielomianu $f(t)$, więc każde δ_i jest elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$.

Interesować nas będzie głównie ciąg (z_n). Przypomnijmy, że

$$z_n = \delta_1^n + \cdots + \delta_s^n$$

dla $n \in \mathbb{N}_0$. W szczególności $z_0 = s$ oraz

$$z_1 = \sigma_1(\delta_1, \ldots, \delta_s) = \delta_1 + \cdots + \delta_s = c_1.$$

Wyrazy z_0 i z_1 są więc liczbami całkowitymi.

8.6.6. *Wszystkie wyrazy ciągu (z_n) są liczbami całkowitymi.*

D. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy wielomian s-zmiennych

$$h(x_1, \ldots, x_s) = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_s^n.$$

Jest to symetryczny wielomian należący do pierścienia $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_s]$. Z twierdzenia 8.6.3 wynika, że istnieje wielomian $H \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_s]$ taki, że

$$h(x_1, \ldots, x_s) = H\Big(\sigma_1(x_1, \ldots, x_s),\ \sigma_2(x_1, \ldots, x_s),\ \ldots,\ \sigma_s(x_1, \ldots, x_s)\Big),$$

gdzie $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ są podstawowymi wielomianami symetrycznymi zmiennych $x_1, \dots, x_s$. W powyższej równości wielomianowej podstawiamy $\delta_1, \dots, \delta_s$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} z_n &= \delta_1^n + \dots + \delta_s^n = h(\delta_1, \dots, \delta_s) \\ &= H\Big(\sigma_1(\delta_1, \dots, \delta_s),\ \sigma_2(\delta_1, \dots, \delta_s),\ \dots,\ \sigma_s(\delta_1, \dots, \delta_s)\Big) \\ &= H\Big(c_1,\ -c_2,\ \dots,\ (-1)^{s-1}c_s\Big). \end{aligned}$$

Ponieważ liczby $c_1, \dots, c_s$ są całkowite oraz wszystkie współczynniki wielomianu $H(x_1, \dots, x_s)$ są również całkowite, więc $z_n = H\Big(c_1,\ -c_2,\ \dots,\ (-1)^{s-1}c_s\Big)$ jest liczbą całkowitą. ⊠

Pewnymi ciągami (z_n) zajmowaliśmy się już wcześniej. Cały podrozdział o ciągu $c(u, v)$ (patrz 6.7.1 - 6.7.8) dotyczył tego rodzaju ciągów dla $s = 2$.

Przypadek $s = 1$ jest oczywisty. W tym przypadku wielomian $f(t)$ jest postaci $t - c$ oraz każde z_n jest równe c^n, gdzie c jest ustaloną niezerową liczbą całkowitą. Ciąg (z_n) jest więc ciągiem geometrycznym, którego ilorazem jest liczba c, W tym przypadku, dla każdej liczby pierwszej p zachodzą kongruencje:

$$z_p \equiv z_1 \pmod{p}, \quad z_{p^r} \equiv z_{p^{r-1}} \pmod{p^r}.$$

Pierwsza z tych kongruencji, to małe twierdzenie Fermata, a druga wynika z twierdzenia Eulera. Z tych kongruencji szybko wynikają następne dwie kongruencje:

$$z_{np} \equiv z_n \pmod{p}, \quad z_{np^r} \equiv z_{np^{r-1}} \pmod{p^r},$$

zachodzące dla dowolnej liczby naturalnej n. Tak się dzieje dla $s = 1$. Udowodnimy teraz, że to wszystko zachodzi dla każdego $s \geqslant 1$.

8.6.7. *Przy założeniach* $(*)$. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to*

$$z_p \equiv c_1 \pmod{p}.$$

D. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Rozpatrzmy równości

$$c_1^p = (\delta_1 + \dots + \delta_s)^p = \sum_{i_1 + \dots + i_s = p} \langle i_1, \dots, i_s \rangle \delta_1^{i_1} \cdots \delta_s^{i_s},$$

gdzie sumowanie przebiega wszystkie nieujemne liczby całkowite $i_1, \dots, i_s$ takie, że $i_1 + \dots + i_s = p$ (patrz 8.6.4). Liczby

$$\langle p, 0, \dots, 0 \rangle, \quad \langle 0, p, \dots, 0 \rangle, \quad \dots, \quad \langle 0, 0, \dots, p \rangle$$

są równe 1. Wszystkie pozostałe liczby $\langle i_1, \dots, i_s \rangle$ są podzielne przez p (patrz 8.6.5). Mamy zatem równość $c_1^p = \delta_1^p + \dots + \delta_s^p = pb$, czyli

$$c_1^p = z_p + pb,$$

gdzie b jest sumą iloczynów postaci $\delta_1^{i_1} \cdots \delta_s^{i_s}$ pomnożonych przez jakieś liczby całkowite. Wiemy, że liczby $\delta_1, \dots, \delta_s$ są elementami całkowitymi nad $\mathbb{Z}$. Z twierdzenia 8.6.1 wynika zatem, że b jest elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$. Ale

$$b = \frac{c_1^p - z_p}{p}$$

i przy tym $p,\ c_1^p,\ z_p$ są liczbami całkowitymi, więc b jest liczbą wymierną. Każda liczba wymierna, która jest elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$, jest liczbą całkowitą (patrz 8.6.2). Zatem $b \in \mathbb{Z}$ i wobec tego $z_p \equiv c_1^p \pmod{p}$. Z małego twierdzenia Fermata wiemy, że

$$c_1^p \equiv c_1 \pmod{p},$$

a zatem $z_p \equiv c_1 \pmod{p}$. ⊠

Przypomnijmy, że $z_1 = c_1$. Udowodniliśmy więc, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi kongruencja $z_p \equiv z_1 \pmod{p}$. Można udowodnić więcej:

8.6.8. *Przy założeniach* $(*)$. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to*

$$z_{np} \equiv z_n \pmod{p}$$

dla wszystkich liczb naturalnych n.

D. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą oraz n ustaloną liczbą naturalną. Rozpatrzmy równości

$$z_n^p = (\delta_1^n + \cdots + \delta_s^n)^p = \sum_{i_1+\cdots+i_s=p} \langle i_1, \dots, i_s \rangle \delta_1^{ni_1} \cdots \delta_s^{ni_s},$$

gdzie sumowanie przebiega wszystkie nieujemne liczby całkowite $i_1, \dots, i_s$ takie, że $i_1 + \cdots + i_s = p$ (patrz 8.6.4). Liczby

$$\langle p, 0, \dots, 0 \rangle, \quad \langle 0, p, \dots, 0 \rangle, \quad \dots, \quad \langle 0, 0, \dots, p \rangle$$

są równe 1. Wszystkie pozostałe liczby $\langle i_1, \dots, i_s \rangle$ są podzielne przez p (patrz 8.6.5). Mamy zatem równość $z_n^p = \delta_1^{np} + \cdots + \delta_s^{np} = pb$, czyli

$$z_n^p = z_{np} + pb,$$

gdzie b jest sumą iloczynów postaci $\delta_1^{ni_1} \cdots \delta_s^{ni_s}$ pomnożonych przez jakieś liczby całkowite. Wiemy, że liczby $\delta_1, \dots, \delta_s$ są elementami całkowitymi nad $\mathbb{Z}$. Z twierdzenia 8.6.1 wynika zatem, że b jest elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$. Ale

$$b = \frac{z_n^p - z_{np}}{p}$$

i przy tym p, z_n^p, z_{np} są liczbami całkowitymi, więc b jest liczbą wymierną. Każda liczba wymierna, która jest elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$, jest liczbą całkowitą (patrz 8.6.2). Zatem $b \in \mathbb{Z}$ i wobec tego $z_{np} \equiv z_n^p \pmod{p}$. Z małego twierdzenia Fermata wiemy, że $z_n^p \equiv z_n \pmod{p}$, a zatem $z_{np} \equiv z_n \pmod{p}$. ⊠

Można udowodnić również następujące ogólniejsze twierdzenie.

8.6.9 (C.S. Bisht 1984). *Przy założeniach* $(*)$. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to*

$$z_{np^r} \equiv z_{np^{r-1}} \pmod{p^r}$$

dla wszystkich liczb naturalnych n, r.

Dla $s = 2$ dowód tego twierdzenia podaliśmy wcześniej. Patrz twierdzenie 6.7.8.

Załóżmy teraz, że $c_1 = 0$ oraz $s \geqslant 3$. Wówczas z powyższych twierdzeń otrzymujemy następujące uogólnienie twierdzenia Lucasa 8.5.4.

8.6.10. *Niech $s \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną i niech*

$$g(t) = t^s + d_2 t^{s-2} + d_3 t^{s-3} + \cdots + d_{s-1} t + d_s$$

będzie monicznym wielomianem o współczynnikach całkowitych (współczynnik przy t^{s-1} jest równy zero). Niech $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ będą wszystkimi pierwiastkami (zespolonymi) wielomianu $g(t)$. Rozważmy ciąg (x_n) określony wzorem

$$x_n = \gamma_1^n + \gamma_2^n + \cdots + \gamma_s^n$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Ciąg ten posiada następujące własności.

(1) *Każdy wyraz ciągu (x_n) jest liczbą całkowitą.*

(2) *Dla każdej liczby pierwszej p liczba x_p jest podzielna przez p.*

(3) *Dla każdej liczby pierwszej p wszystkie liczby x_p, x_{p^2}, $x_{p^3}, \ldots$ są podzielne przez p.*

Zajmiemy się teraz przykładami ciągów posiadających rozważane własności. Jak już wspomnieliśmy, w przypadku $s = 1$ mamy do czynienia ze zwykłymi ciągami geometrycznymi o niezerowych całkowitych ilorazach. Przypadkiem $s = 2$ zajmowaliśmy się dokładnie w podrozdziale dotyczącym ciągu $c(u, v)$ (patrz 6.7.1 - 6.7.8). Teraz podamy przykłady dla $s \geqslant 3$. Rozpoczynamy od $s = 3$.

8.6.11. *Niech a, b będą dowolnymi liczbami całkowitymi i niech c będzie liczbą całkowitą różną od zera. Rozważmy ciąg (z_n) określony równościami:*

$$\begin{cases} z_0 &= 3, \\ z_1 &= a, \\ z_2 &= a^2 + 2b, \\ z_{n+3} &= a z_{n+2} + b z_{n+1} + c z_n \quad dla \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$z_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n,$$

gdzie α, β, γ są wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f(t) = t^3 - at^2 - bt - c$.

D. Oznaczmy $q_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ dla $n \in \mathbb{N}_0$. Udowodnimy, że $q_n = z_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Jest jasne, że $q_0 = z_0$ oraz $q_1 = z_1$. Sprawdzamy, że $q_2 = z_2$:

$$q_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = a^2 - 2(-b) = a^2 + 2b = z_2.$$

Mamy ponadto:

$$\begin{aligned} q_{n+3} &= \alpha^{n+3} + \beta^{n+3} + \gamma^{n+3} = \alpha^n \alpha^3 + \beta^n \beta^3 + \gamma^n \gamma^3 \\ &= \alpha^n (a\alpha^2 + b\alpha + c) + \beta^n (a\beta^2 + b\beta + c) + \gamma^n (a\gamma^2 + b\gamma + c) \\ &= a\Big(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} + \gamma^{n+2}\Big) + b\Big(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \gamma^{n+1}\Big) + cb\Big(\alpha^n + \beta^n + \gamma^n\Big) \\ &= a q_{n+2} + b q_{n+1} + c q_n. \end{aligned}$$

Zatem istotnie $z_n = q_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. ⊠

8.6.12. *Pewne przykłady takich ciągów (z_n), które spełniają równość*

$$z_{n+3} = az_{n+2} + bz_{n+1} + cz_n$$

oraz ich n-ty wyraz jest postaci $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$, gdzie α, β, γ są liczbami całkowitymi.

(z_0, z_1, z_2)	(a, b, c)	z_n
$(3, 3, 35)$	$(3, 13, -15)$	$z_n = 1^n + (-3)^n + 5^n$
$(3, 2, 14)$	$(2, 5, -6)$	$z_n = 1^n + (-2)^n + 3^n$
$(3, 7, 45)$	$(7, -2, -40)$	$z_n = (-2)^n + 4^n + 5^n$
$(3, 6, 30)$	$(6, -3, -10)$	$z_n = (-1)^n + 2^n + 5^n$
$(3, 7, 27)$	$(7, -11, 5)$	$z_n = 2 + 5^n$
$(3, 6, 14)$	$(6, -11, 6)$	$z_n = 1^n + 2^n + 3^n$
$(3, 9, 35)$	$(9, -23, 15)$	$z_n = 1^n + 3^n + 5^n$
$(3, 9, 29)$	$(9, -26, 24)$	$z_n = 2^n + 3^n + 4^n$
$(3, 9, 29)$	$(9, -26, 24)$	$z_n = 2^n + 3^n + 4^n$
$(3, 12, 50)$	$(12, -47, 60)$	$z_n = 3^n + 4^n + 5^n$
$(3, 14, 74)$	$(14, -61, 84)$	$z_n = 3^n + 4^n + 7^n$

Ze stwierdzenia 8.6.11 oraz z wszystkich udowodnionych tutaj twierdzeń otrzymujemy:

8.6.13. *Niech (z_n) będzie ciągiem zdefiniowanym równościami:*

$$\begin{cases} z_0 &= 3, \\ z_1 &= a, \\ z_2 &= a^2 + 2b, \\ z_{n+3} &= az_{n+2} + bz_{n+1} + cz_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

gdzie a, b, $0 \neq c$ są dowolnymi liczbami całkowitymi. Wtedy dla każdej liczby pierwszej p zachodzą następujące kongruencje:

(1) $z_p \equiv a \pmod{p}$;

(2) $z_{np} \equiv z_n \pmod{p}$ *dla* $n \in \mathbb{N}_0$;

(3) $z_{np^r} \equiv z_{np^{r-1}} \pmod{p^r}$ *dla wszystkich liczb naturalnych* n, r.

W szczególnym przypadku, gdy $a = 0$, otrzymujemy stąd następujące uogólnienie twierdzenia Lucasa 8.5.4 dotyczącego ciągu Perrina.

8.6.14. *Niech (z_n) będzie ciągiem zdefiniowanym równościami:*

$$\begin{cases} z_0 &= 3, \\ z_1 &= 0, \\ z_2 &= 2b, \\ z_{n+3} &= bz_{n+1} + cz_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

gdzie b, $0 \neq c$ są liczbami całkowitymi. Wtedy dla każdej liczby pierwszej p, liczba z_p jest podzielna przez p.

Następne stwierdzenia dotyczą przypadku $s = 4$. Pierwsze z tych stwierdzeń dowodzimy tak samo jak stwierdzenie 8.6.11.

8.6.15. *Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami całkowitymi i niech d będzie liczbą całkowitą różną od zera. Rozważmy ciąg (z_n) określony równościami:*

$$\begin{cases} z_0 &= 3, \\ z_1 &= a, \\ z_2 &= a^2 + 2b, \\ z_3 &= a^3 + 3ab + 3c, \\ z_{n+4} &= az_{n+3} + bz_{n+2} + cz_{n+1} + dz_n \quad dla \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$z_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f(t) = t^4 - at^3 - bt^2 - ct - d$.

Z tego stwierdzenia oraz z wszystkich udowodnionych tutaj twierdzeń otrzymujemy:

8.6.16. *Niech (z_n) będzie ciągiem zdefiniowanym równościami:*

$$\begin{cases} z_0 &= 3, \\ z_1 &= a, \\ z_2 &= a^2 + 2b, \\ z_3 &= a^3 + 3ab + 3c, \\ z_{n+4} &= az_{n+3} + bz_{n+2} + cz_{n+1} + dz_n \quad dla \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

gdzie $a, b, c,\ 0 \neq d$ są dowolnymi liczbami całkowitymi. Wtedy dla każdej liczby pierwszej p zachodzą następujące kongruencje:

(1) $z_p \equiv a \pmod{p}$;

(2) $z_{np} \equiv z_n \pmod{p}$ *dla* $n \in \mathbb{N}_0$;

(3) $z_{np^r} \equiv z_{np^{r-1}} \pmod{p^r}$ *dla wszystkich liczb naturalnych* n, r.

W szczególnym przypadku, gdy $a = 0$, otrzymujemy stąd następujące uogólnienie twierdzenia Lucasa 8.5.4 dotyczącego ciągu Perrina.

8.6.17. *Niech (z_n) będzie ciągiem zdefiniowanym równościami:*

$$\begin{cases} z_0 &= 3, \\ z_1 &= 0, \\ z_2 &= 2b, \\ z_3 &= 3c, \\ z_{n+4} &= bz_{n+2} + cz_{n+1} + dz_n \quad dla \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

gdzie $b, c,\ 0 \neq d$ są liczbami całkowitymi. Wtedy dla każdej liczby pierwszej p, liczba z_p jest podzielna przez p.

8.6.18. *Niech* $x_0 = 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3b$,

$$x_{n+4} = ax_n + bx_{n+1} + cx_{n+2}$$

dla $n \geqslant 0$, *gdzie* $a, b, c \in \mathbb{Z}$, b *nieparzyste. Wtedy* $p \mid x_{p^m}$ *dla wszystkich* $p \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{N}$. ([OM] Rumunia 2004).

8.6.19. *Niech* $a_0 = 4$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 3$ *oraz* $a_{n+4} = a_{n+1} + a_n$. *Wtedy* $p \mid a_p$ *dla wszystkich* $p \in \mathbb{P}$. *Ponadto,*

$$a_n = t_1^n + t_2^n + t_3^n + t_4^n,$$

gdzie t_1, t_2, t_3, t_4 *są pierwiastkami wielomianu* $t^4 - t - 1$. ([Mon] 3(107) 2000, [Dic1] 397).

Dla danej liczby naturalnej $s \geqslant 3$ rozważmy ciąg (d_n) określony równościami:

$$\begin{cases} d_0 = m, \\ d_1 = d_2 = \cdots = d_{m-2} = 0, \\ d_{s-1} = s - 1, \\ d_{n+s} = d_{n+1} + d_n, \ \text{dla } n \geqslant 0. \end{cases}$$

Jeśli $s = 3$, to (d_n) jest powyższym ciągiem Perrina. (W przypadku $m = s$ otrzymujemy ciąg Lucasa.)

8.6.20. *Jeśli* $s \geqslant 3$ *i* p *jest liczbą pierwszą, to* $p \mid d_p$. ([Cmj] 31(3)(2000) 223-224).

8.6.21. *Niech* $s \geqslant 2$ *i niech* (a_n) *będzie ciągiem takim, że* $a_{n+s} = a_{n+1} + a_n$, *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}_0$. *Wtedy dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych* n, m *zachodzi równość*

$$a_{n+sm} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_{n+j}.$$

D. Indukcja ze względu na m. Dla $m = 0$ oraz $m = 1$ to jest oczywiste. Załóżmy, że rozważana równość zachodzi dla pewnego $m \geqslant 1$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} a_{n+s(m+1)} &= a_{(n+sm)+s} = a_{(n+sm)+1} + a_{n+sm} = a_{(n+1)+sm} + a_{n+sm} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_{(n+1)+j} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_{n+j} + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} a_{n+j} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_{n+j} \\ &= a_{n+m+1} + a_n + \sum_{j=1}^{m} \left(\binom{m}{j-1} + \binom{m}{j} \right) a_{n+j} = a_{n+m+1} + a_n + \sum_{j=1}^{m} \binom{m+1}{j} a_{n+j} \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} a_{n+j} \end{aligned}$$

i to kończy dowód. ⊠

8.6.22. *Niech* $s \geqslant 2$ *i niech* (a_n) *będzie ciągiem takim, że* $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$ *są liczbami całkowitymi oraz*

$$a_{n+s} = a_{n+1} + a_n,$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. *Jeśli* p *jest liczbą pierwszą i* n *jest dowolną liczbą naturalną, to liczba* $a_{n+sp} - a_{n+p} - a_n$ *jest podzielna przez* p.

D. Wykazaliśmy (patrz 8.6.21), że

$$a_{n+sp} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} a_{n+j}.$$

Ponieważ wszystkie symbole Newtona $\binom{p}{1}, \ \ldots, \ \binom{p}{p-1}$ są podzielne przez p, więc $a_{n+s} \equiv a_{n+p} + a_{n+0} \pmod{p}$. ☒

★ C. S. Bisht, *Some congruence properties of generalized Lucas integral sequences*, [FQ], 22(1984) 290-295.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.7 Przykłady ciągów czwartego rzędu

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.7.1. *Niech* $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ *oraz*

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} - 4a_{n+1} - 2a_n.$$

Wtedy $31 \mid a_{31} = 1107179136$. *Liczba* 31 *jest jedyną liczbą pierwszą* p *taką, że* $p \mid a_p$. ([Br] Congruences of 4th order ...).

8.7.2. *Dany jest ciąg* (a_n) *określony wzorami* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$,

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n$$

dla $n \geqslant 0$. *Udowodnić, że* $n \mid a_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([OM] Polska 1988).

8.7.3. *Niech* a, b, c, d *będą dowolnymi liczbami i niech* (a_n) *będzie ciągiem takim, że*

$$\begin{cases} a_0 & = & d \\ a_1 & = & a + b + c + d \\ a_2 & = & 8a + 4b + 2c + d \\ a_3 & = & 27a + 9b + 3c + d \\ a_{n+4} & = & 4a_{n+3} - 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - a_n. \end{cases}$$

Wtedy $a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ *dla wszystkich* $n \geqslant 0$.

8.7.4. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem takim, że* $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 8, a_3 = 27$,

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} - 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - a_n.$$

Wtedy $a_n = n^3$ *dla wszystkich* $n \geqslant 0$. (Wynika z 8.7.3).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.8 Liniowa rekurencyjność ze zmiennymi współczynnikami

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozważać będziemy ciągi (a_n) spełniające, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, równość

$$\lambda_s(n)a_{n+s} + \lambda_{s-1}(n)a_{n+s-1} + \cdots + \lambda_1(n)a_{n+1} + \lambda_0(n)a_n = h(n),$$

gdzie $h, \lambda_0, \dots, \lambda_s$ są funkcjami ze zbioru $\mathbb{N}$, liczb naturalnych. Jeśli $\lambda_s \neq 0$, to mówić będziemy, że ciąg (a_n) jest *rzędu* s.

8.8.1. *Załóżmy, ciągi $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ spełniają równość rekurencyjną*

$$(*) \qquad \lambda_s(n)a_{n+s} + \lambda_{s-1}(n)a_{n+s-1} + \cdots + \lambda_1(n)a_{n+1} + \lambda_0(n)a_n = 0,$$

gdzie $\lambda_0, \dots, \lambda_s$ są danymi funkcjami określonymi na zbiorze liczb naturalnych. Jeśli wyznacznik (zwany wyznacznikiem Casorati'ego)

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \dots & \varphi_s(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_s(2) \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \dots & \varphi_s(s) \end{vmatrix}$$

jest różny od zera, to każdy ciąg $a = (a_n)$, spełniający równość rekurencyjną $(*)$, jest postaci

$$a = c_1\varphi_1 + \cdots + c_s\varphi_s,$$

gdzie $c_1, \dots, c_s$ są jednoznacznie wyznaczonymi stałymi. ([Kozn] 114).

8.8.2. *Niech $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 8n$. Wtedy $a_n = (2n-1)^2$.* ([GeG] 17).

8.8.3. *Niech $a_1 = 1$, $a_{n+1} - 2a_n = n$. Wtedy $a_n = 3 \cdot 2^n - n - 2$.* ([Kozn] 92).

8.8.4. *Nich $a_1 = 1$, $a_{n+1} - 2a_n = 2(n+1)$. Wtedy $a_n \leqslant 2^{n+2}$ dla $n \in \mathbb{N}$.*
([OM] Czechy-Słowacja 1996/97).

8.8.5. *Niech $a_0 = a \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} - 2a_n = -n^2$. Każdy wyraz tego ciągu jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $a \geqslant 3$.* ([Putn] 1980).

8.8.6. *Niech $a_0 = 3$, $a_{n+1} - 3a_n = -2n(n+2)$. Wtedy $a_n = 3^n + n^2 + 3n + 2$.* ([Chen]).

8.8.7. *Niech $a_{n+1} - a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Wtedy*

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(\lambda + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\right). \qquad \text{([Kozn] 91).}$$

8.8.8. *Niech $a_1 = \dfrac{1}{2}$ i $a_{n+1} - a_n = \cos(n\varphi)$, gdzie φ jest liczbą rzeczywistą nie będącą całkowitą wielokrotnością liczby 2π. Wtedy*

$$a_n = \frac{\sin(n - (1/2))\varphi}{2\sin(\varphi/2)}. \qquad \text{([Kozn] 91).}$$

8.8.9. *Jeśli* $a_0 = 3$, $a_1 = 8$, $a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$, *to* $a_n = 2 + 2^n + n2^{n+1}$. ([Chen]).

8.8.10. *Jeśli* $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$, *to istnieją stałe* a, b *takie, że* $a_n = a + bn + 2^n$. ([Kozn] 118).

8.8.11. *Jeśli* $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n$, *to istnieją stałe* a, b *takie, że* $a_n = a + bn + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$. ([Kozn] 118).

8.8.12. *Jeśli* $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, *to istnieją stałe* a, b *takie, że*

$$a_n = a + bn + \frac{1}{2n}.$$

([Kozn] 101).

8.8.13. *Jeśli* $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n + n + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, *to istnieją stałe* a, b *takie, że*

$$a_n = a + bn + 2^n + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2n}.$$

([Kozn] 118).

8.8.14. *Jeśli* $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n2^n$, *to istnieją stałe* a, b *takie, że*

$$a_n = 2^n\left(a + bn + \frac{1}{24}n^{(3)}\right),$$

gdzie $n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$. ([Kozn] 102).

8.8.15. *Jeśli* $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2^{n+1}(3n-1)$, *to istnieją stałe* a, b *takie, że*

$$a_n = a3^n - 2^{n-1}\left(b + 10n + 3n(n-1)\right). \quad \text{([Kozn] 111, 268).}$$

8.8.16. *Niech* $a_1 = a$, $a_2 = b$ *oraz* $na_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_n = 0$. *Wtedy*

$$a_n = b + (b-a)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}. \quad \text{([Kozn] 126).}$$

D. Podstawiając $y_n = a_{n+1} - a_n$ otrzymujemy równość rekurencyjną $ny_{n+1} - y_n = 0$ z warunkiem $y_1 = b - a$. Stąd wynika, że $y_n = \frac{b-a}{(n-1)!}$, czyli $a_{n+1} - a_n = \frac{b-a}{(n-1)!}$ i stąd łatwo otrzymuje się tezę. ⊠

8.8.17. *Niech* $a_{n+2} - n(n+1)a_n = 0$. *Wtedy*

$$a_n = (n-1)!\left(a + b(-1)^n\right),$$

gdzie a *i* b *są jednoznacznie wyznaczonymi stałymi.* ([Kozn] 140).

8.8.18. *Niech* $a_{n+2} - n(n+1)a_n = (n+1)!$. *Wtedy*

$$a_n = \frac{1}{2}(n-1)!\left(a + b(-1)^n + n\right),$$

gdzie a *i* b *są jednoznacznie wyznaczonymi stałymi.* ([Kozn] 142).

8.8.19 (Arkin, Hoggatt 1975)**.** *Niech* $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_{n+1} = (2n+1)x_n - n^2x_{n-1}$. *Jeśli* $x_{k-1} \equiv 0 \pmod{k^2}$, *to* k *jest liczbą pierwszą.* ([MR] 50#12900).

8.8.20. *Niech* $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_n = (n+4)x_{n-1} - 4nx_{n-2} + (4n-8)x_{n-3}$ *dla* $n \geqslant 3$. *Wtedy* $x_n = n! + 2^n$. ([Putn] 1990).

Literatura

[AtM] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley Publishing Company, 1969; (tł. ros. 1972).

[B-B] A. Białynicki Birula, *Zarys Algebry*, PWN, Warszawa 1987.

[BaJ] S. Balcerzyk, T. Józefiak, *Pierścienie przemienne*, PWN, Warszawa 1985.

[Br] K. Brown, *Algebra and number theory*, `http://mathpages.com/`, 2000.

[Chen] C. C. Chen, Preprint 2000, Internet, `http://www.math.nus.edu.sg/~matccc`.

[Cmj] The College Mathematics Journal, The Mathematical Association of America.

[Coh1] H. Cohen, *Number Theory. Volume I: Tools and Diophantine Equations*, Graduate Texts in Mathematics 239, Springer, 2007.

[Dic1] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. I. *Divisibility and primality*, Carnegie Institute of Washington, 1919. Reprinted by AMS Chelsea Publishing, New York, 1992.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Duke] Duke Mathematical Journal, (Duke Math. J.).

[EvP] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, *Recurrence Sequences*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 104, AMS, 2003.

[FQ] The Fibonacci Quarterly, czasopismo matematyczne.

[GeG] S. I. Gelfand, M. L.Gerwer, A. A. Kiryłow, N. N. Konstantinow, A. G. Kusznirenko, *Zadania z elementarnej matematyki, Ciągi, Kombinatoryka, Granice* (po rosyjsku), Nauka, Moskwa, 1965.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[Ka74] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Chicago, London 1974.

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2012.

[Kozn] I. Koźniewska, *Równania Rekurencyjne*, PWN, Warszawa, 1972.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[La84] S. Lang, *Algebra*, Second Edition, Addison–Wesley Publ. Comp. 1984.

[Mark] A. J. Markuszewicz, *Ciągi Rekurencyjne*, Warszawa, 1955.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MatC] Mathematics of Computations, American Mathematical Society, czasopismo matematyczne.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[MoS] A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, (wydanie 8), Warszawa 1975.

[MR] Mathematical Reviews.

[N11] A. Nowicki, *Silnie i Symbole Newtona*, Podróże po Imperium Liczb, cz.11, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pa97] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata*, Tutor, Toruń, 1997.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[SalS] J. D. Sally, P. J. Sally, Jr., *A Vertical Development of Mathematical Problems*, AMS, 2007.

[Str67] S. Straszewicz, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom III, 11-15, 59/60 - 63/64, PZWS, Warszawa, 1967.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.